

數學解題訓練第一、二、三期參考答案

鄭金塗 劉賢建
臺北市立士林國民中學

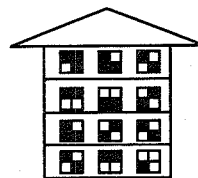
《解題訓練—第一期參考答案》

(1) 由 791、275、362、612 四數及四層樓的窗戶，我們不難發現：

$$\begin{array}{|c|} \hline \blacksquare \\ \hline \square \\ \hline \end{array} = 2, \quad \begin{array}{|c|} \hline \blacksquare \\ \hline \square \\ \hline \end{array} = 1, \quad \begin{array}{|c|} \hline \blacksquare \\ \hline \blacksquare \\ \hline \end{array} = 3, \quad \begin{array}{|c|} \hline \square \\ \hline \blacksquare \\ \hline \end{array} = 5,$$

$$\begin{array}{|c|} \hline \square \\ \hline \square \\ \hline \end{array} = 6, \quad \begin{array}{|c|} \hline \square \\ \hline \square \\ \hline \end{array} = 7, \quad \begin{array}{|c|} \hline \square \\ \hline \square \\ \hline \end{array} = 9,$$

所以第三層樓所表示的數為 791。



(2) 觀察： $11^2 = 121 \Rightarrow 1 + 2 + 1 = 4 = 2^2$

$$111^2 = 12321 \Rightarrow 1 + 2 + 3 + 2 + 1 = 9 = 3^2$$

$$1111111111^2 = 1234567900987654321,$$

$$\Rightarrow 1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 + 7 + 9 + 0 + 0 + 9 + 8 + 7 + 6 + 5 + 4 + 3 + 2 + 1 = 82 \neq 100 = 10^2$$

觀察 $1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 + 7 + 8 + 9 + 10 + 9 + 8 + 7 + 6 + 5 + 4 + 3 + 2 + 1 = 100 = 10^2$

與 $1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 + 7 + 9 + 0 + 0 + 9 + 8 + 7 + 6 + 5 + 4 + 3 + 2 + 1 = 82 = 10^2 - 18$

再看 $1111111111^2 = 123456790120987654321$

$$1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 + 7 + 9 + 0 + 1 + 2 + 0 + 9 + 8 + 7 + 6 + 5 + 4 + 3 + 2 + 1 = 85 = 11^2 - 36$$

每次進"1"都會使數字和差 9，

因此 1111111111111111111^2

$$= 123456789 \underbrace{10 \ 11 \ 12 \ 13 \ 14 \ 15 \ 16 \ 17 \ 18 \ 19 \ 20 \ 19 \ 18 \ 17 \ 16 \ 15 \ 14 \ 13 \ 12 \ 11 \ 10}_{\substack{\text{進 1 (9 次)} \quad \text{進 2 (4 次)} \quad \text{進 1 (9 次)}}} 987654321$$

其結果會差 $9 \times (9 + 4 \times 2 + 9) = 234$

故 1111111111111111111^2 的數字總和應為 $20^2 - 234 = 400 - 234 = 166$

其結果會差 $9 \times (9 + 4 \times 2 + 9) = 234$

故 1111111111111111111^2 的數字總和應為 $20^2 - 234 = 400 - 234 = 166$

(3) 首先，我們假設全部用加法，即： $1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 + 7 + 8 + 9 + 10 = 55$

今欲將某數由相加改成相減，則在加減之間即相差該數的 2 倍。

即不論有多少減號 (-)，其值均為 $55 - (2 \text{ 的倍數})$ [奇數 - 偶數 \rightarrow 必為奇數]

所以可以推得：1~10，10 個數字間不是用加法就是用減法作連接時，所得的結果必為奇數。

此題也可以這樣想：利用奇數與奇數的相加減，其結果必為偶數；奇數與偶數的相加減，其結果必為奇數；偶數與偶數的相加減，其結果必為偶數。現在，1~10 中有 5 個奇數，因此這 10 個整數相加減，其結果必為奇數。

I	II	III	IV	V
	1	3	5	7
15	13	11	9	
	17	19	21	23
31	29	27	25	
...
...

由第 I 行發現 $31 - 15 = 16$ ，
推斷數字每兩列以 16 循環，故：
 $1999 \div 16 = 124 \dots\dots 15$
 $124 \times 2 = 248$
又餘 15 為該組循環之第二列第 I 行，所以
 $248 + 2 = 250$
故 1999 排在 第 250 列第 I 行。

《解題訓練—第二期參考答案》

(1) 已知 $1 = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}$

設 $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} = \frac{1}{2}$ (令 $x < y$)

$xy - 2x - 2y = 0$

$(x-2)(y-2) = 4 = 1 \times 4 \Rightarrow x=3, y=6$

$= 2 \times 2 \Rightarrow x=4, y=4$

取 $x=3, y=6$ ，則 $1 = \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{6}$

依此推敲下去，則

$1 = \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{6}$

$= \frac{1}{4} + \frac{1}{12} + \frac{1}{7} + \frac{1}{42} + \frac{1}{8} + \frac{1}{24} + \frac{1}{9} + \frac{1}{18} + \frac{1}{10} + \frac{1}{15}$

$\therefore \{a, b, c, d, e, f, g, h, i, j\}$ 可能為 $\{4, 7, 8, 9, 10, 12, 15, 18, 24, 42\}$

<其餘可能值自行推敲>

(2) $a = \frac{19991998}{1999} = 10001 + \frac{-1}{1999}$

$b = \frac{19991998}{1998} = 10001 + \frac{10000}{1998}$

$c = \frac{19981999}{1999} = 10001 + \frac{-10000}{1999}$

$d = \frac{19981999}{1998} = 10001 + \frac{1}{1998}$

$\therefore \frac{10000}{1998} > \frac{1}{1998} > \frac{-1}{1999} > \frac{-10000}{1999}$

$\therefore b > d > a > c$

(3) 求末四位數字 \Rightarrow 即求該數除以 10000 (或說以 10000 來分類) 所得之餘數

若以 10000 來分類： 195 以 10000 分類餘 195

1999995 以 10000 分類餘 9995 (或說不足 5)

∴ S 以 10000 來分類，其各項分別餘：15、195、1995、(-5)、(-5)、(-5)、...、(-5)

其和即為末四位

$$15 + 195 + 1995 + \underbrace{(-5) + (-5) + (-5) + \dots + (-5)}_{42 \text{ 個}}$$

$$= 2205 + (-5) \times 42$$

$$= 1995 \quad \Rightarrow \text{數字和： } 1 + 9 + 9 + 5 = 24$$

$$(4) \left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4}\right) \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5}\right) - \left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5}\right) \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4}\right)$$

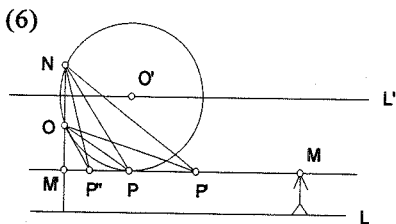
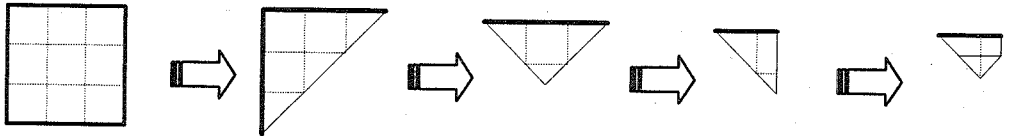
$$= (1+a)b - (1+b)a$$

$$= b + ab - a - ab$$

令 $a = \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4}$
 $b = \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5}$

(5) 想像正方形已被分割成九塊大小相同的正方形 (如左下圖)，

再將圖中虛線摺成一直線即可，程序如下。



1. 過 M 作 $\overline{MM'} \parallel L$

2. 作一圓過 O、N 且與 $\overline{MM'}$ 相切於 P 點

當眼睛在 P 點時，視角最大。

(∵ $\angle OPN$ 為圓周角， $\angle OP'N$ 及 $\angle OP''N$ 均為圓外角
 ∴ $\angle OPN > \angle OP'N$ ， $\angle OPN > \angle OP''N$)

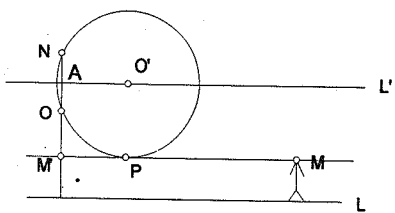
如何作圓找出切點 P？

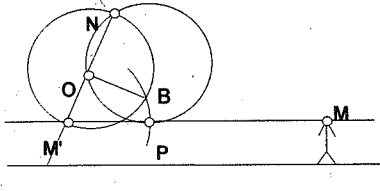
a. 若 \overline{ON} 延長線與 L 垂直

1. 作 \overline{ON} 之中垂線 L' ，A 為垂足

2. 以 O 為圓心， $\overline{M'A}$ 為半徑畫弧交 L_1 於 O'

3. 以 O' 為圓心， $\overline{M'A}$ 為半徑畫圓交 $\overline{MM'}$ 於 P 則 P 即為
 所求





b.若 \overline{ON} 延長線與 L 不垂直

1.以 $\overline{M'N}$ 為直徑作圓

2.過 O 作 $\overline{OB} \perp \overline{NM'}$ 交圓於 B

3.以 M' 為圓心，M'、B 距離為半徑，畫弧交 $\overline{MM'}$ 於 P
則 P 即為所求

(以 P、O、N 三點作圓將與 $\overline{MM'}$ 相切)

(7) 正確答案： $f(-1) = -10 + 9 - 8 + 7 - 6 + 5 - 4 + 3 - 2 + 1$
 $= -5$

阿土誤得 7 $\Rightarrow 7 - (-5) = 12$

\therefore 正與負來回相差該數的兩倍 (如 -a 與 a 相差 2a)

$\therefore 12 \div 2 = 6$

\therefore 阿土看錯係數為 6 之 x^5 項之符號

《解題訓練 - 第三期參考答案》

(1)

□ □ □ □ □ □ □ □ □ □

只能填入 1~9，且知偶數位為偶數。

5

← 前五位為 5 的倍數， \therefore 第五個數為 0 或 5，沒有 0， \therefore 為 5。

[0 2 1]

← 考慮 3 與 6 的倍數。從餘數的組合來看，四、五、六位 (除以 3) 的餘數只有這三種組合。再加上偶數 (2、4、8)

[1 2 0]

的倍數因素，這三個數可能為 456、654、258、852。又 4

[2 2 2]

的倍數中，若要十位數為奇數則個位只能是 2、6，故只剩下 654 與 258。

2 5 8

6 5 4

1 4 7 2 5 8 9 6 3

← 再考慮 8 的倍數及後三位餘數的組合，再將剩下的數填入。

7 4 1 2 5 8 9 6 3

8 的倍數有 -25896_、-65432_、-65472_。

7 8 9 6 5 4 3 2 1

9 8 7 6 5 4 3 2 1

1 8 9 6 5 4 3 2 7

9 8 1 6 5 4 3 2 7

1 8 9 6 5 4 7 2 3

9 8 1 6 5 4 7 2 3

1 8 3 6 5 4 7 2 9

3 8 1 6 5 4 7 2 9

→ 最後考慮 7 的倍數，得 381654729 能符合題目要求。

(2) ∴ 每列數字和，每行數字和，及對角線數字和均相等

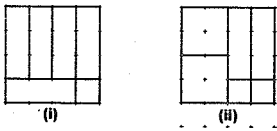
a=4	b	c
d=19	e	f
g	h	i=22

$$\begin{aligned} \therefore b+e+h &= a+e+i \\ b+h &= a+i \\ &= 4+22=26 \end{aligned}$$

(3) 左圖為由面積 1、3、4 的 9 塊矩形構成正方形，其面積共為 25
欲求得一面積為 16 之正方形

$$25 - 16 = 9$$

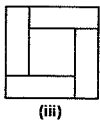
因此我們只要拿掉面積和為 9 的矩形在拼成即可。



① 用 6 塊拼成，（原有 9 塊，所以我們要拿走 3 塊使其面積和為 9）

$$9 = 4 + 4 + 1 \rightarrow \text{剩下 1 塊 1 及 5 塊 3 (如圖(i))}$$

$$= 3 + 3 + 3 \rightarrow \text{剩下 2 塊 1、2 塊 3 及 2 塊 4 (如圖(ii))}$$



② 用 5 塊拼成，（要拿走 4 塊使面積和為 9）

$$9 = 4 + 3 + 1 + 1 \rightarrow \text{剩下 4 塊 3 及 1 塊 4 (如圖(iii))}$$

③ 用 7 塊拼成，（要拿走 2 塊使面積和為 9）

但因為我們的方塊中，面積最大為 4， $4 + 4 = 8 < 9$ ，故我們無法用 7 塊拼成 4×4 的正方形。

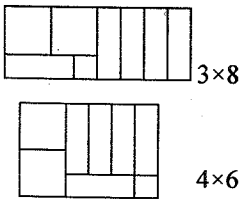
④ 面積 24（ $= 25 - 1$ ，因此要拿走 1 塊 1。）

$$24 = 1 \times 24 \quad (\because \text{有 } 2 \times 2 \text{ 的正方形，}\therefore \text{無法得到寬為 1 的矩形})$$

$$= 2 \times 12 \quad (\because \text{面積 3 的矩形有奇數個，}\therefore \text{無法組得長為 12 的矩形})$$

$$= 3 \times 8$$

$$= 4 \times 6$$



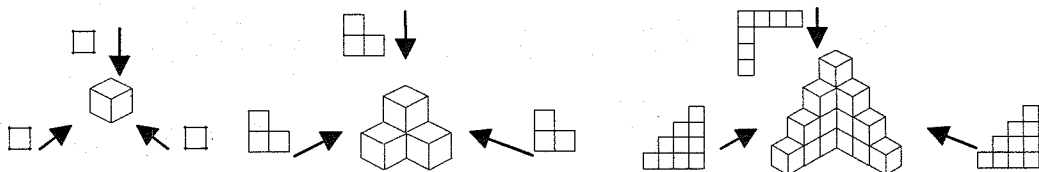
(4) 我們將立體圖形分成 前、後、左、右、上、下 六個方向，發現（前、後）、（左、右）、（上、下）所看到的形狀是一樣的，所以我們可以得到這樣的式子：

表面積 = $2 \times (\text{前} + \text{左} + \text{上})$

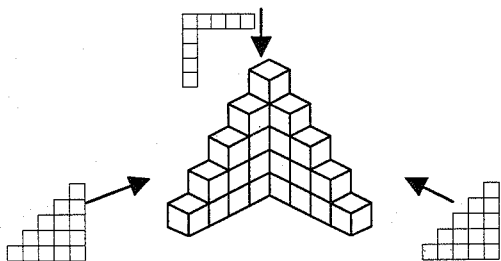
$2 \times (1+1+1) = 6$

$2 \times (2+2+2 \times 2) = 16$

$2 \times (5+5+5 \times 5) = 70$



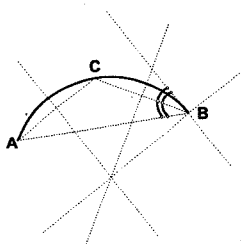
$$2 \times (1+1+1) = 6 \quad 2 \times [(1+2)+(1+2)+(2 \times 2-1)] = 18 \quad 2 \times [(1+2+3+4)+(1+2+3+4)+(2 \times 4-1)] = 54$$



堆 5 層時，

$$\begin{aligned} \text{表面積} &= 2 \times [(1+2+3+4+5)+(1+2+3+4+5)+(2 \times 5-1)] \\ &= 78 \end{aligned}$$

(5)



步驟：1. 首先在 \widehat{AB} 上找一 C 點，摺出兩條弦 \overline{AC} 與 \overline{BC} 。

2. 分別摺出 \overline{AC} 與 \overline{BC} 的中垂線。

此兩中垂線的交點設為 O。

3. 打開紙，摺出直線 BO。

4. 過 B 摺一條 \overline{BO} 垂線。

5. 將 AB 弦摺出。

則以 B 為頂點之角度即為所求。

(6) ① ∵ ”集 7 瓶空瓶可換飲料一瓶”

∴ $370 \div 7 = 52 \dots 6$ → 可以換 52 瓶，得 52 個空瓶。

$52 + 6 = 58$ → 連同原先剩下的空瓶。

$58 \div 7 = 8 \dots 2$ → 可以換 8 瓶，得 8 個空瓶。

$8 + 2 = 10$

$10 \div 7 = 1 \dots 3$ → 換到 1 瓶，得 1 個空瓶。

$1 + 3 = 4 < 7$ → ∵ 已經不夠 7 瓶，∴ 不能再換了。

∴ $52 + 8 + 1 = 61$ ⇒ 最多可以喝到飲料 61 瓶。

< 思索 > 7 瓶空瓶換飲料 1 瓶，喝完後還剩下 1 瓶空瓶。也就是說如果可以（假裝）借到 1 瓶空瓶，那實際上就只需要 6 瓶就可以換飲料了。

∴ 我們也可以這樣做：

$$(370 - 7) \div (7 - 1) = 60 \dots 3$$

$$60 + 1 = 61$$

② 要喝到 43 瓶飲料，只要 $43 \times 6 + 1 = 259$ 個空瓶即可。