八十九年度大學數學學力測驗試題與解答

編輯室

一、微積分試題

第一部分：**選擇題**（每題**恰有一個選項是正確的**，答對得 5 分，**答錯不倒扣**，共 50 分，請將答案劃記在「**答案卡**」上。）

1.設函數 $f(x)$ 在 $x=2$ 可微分，函數 $h(x)=(f(x)+2x^2+1)^3$。若 $f(2)=-7$ 且 $h'(2)=36$，則 $f'(2)$ 之值爲何？

(1) 3　(2) 7　(3) -5　(4) -6

2.設 $f:[0,1]\to \boldsymbol{R}$ 爲連續函數，下列何者不能保證 $f(x)=0$，$\forall\, x\in[0,1]$？

(1) $\int_0^1 |f(t)|dt=0$；　(2) $\int_0^1 f(t)dt=0$；

(3) $\int_0^x f(t)dt=0$，$\forall\, x\in[0,1]$；　(4) $\int_x^y f(t)dt=0$，$\forall\, x,y\in[0,1]$。

3.若 $a_n>0$，$b_n>0$，$\forall\, n\geq 1$，且 $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ 與 $\sum_{n=1}^{\infty}b_n$ 皆收斂，則下列何者正確？

(1) $\sum_{n=1}^{\infty}\sqrt{a_n}$ 必收斂；　(2) $\sum_{n=1}\frac{a_n}{b_n}$ 必收斂；

(3) $\lim_{n\to\infty}(a_n^2+b_n^2)>0$；　(4) $\sum_{n=1}^{\infty}(a_n+b_n)x^n$ 在 $[-1,1]$ 中必收斂。

4. 冪級數 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^n}{n!}(2x+3)^n$ 之收斂半徑爲何？

(1) 0　(2) 1　(3) $\frac{1}{e}$　(4) $\frac{1}{2e}$

5. 設 $L=\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{4n}\frac{k}{n\sqrt{9n^2+k^2}}$，則 L 之值爲何？

(1) $\sqrt{10}-3$　(2) 1　(3) 2　(4) $\sqrt{10}$

6. 設 f 爲一連續函數且 $\int_0^{\pi} f(\sin x)dx=2$，則 $\int_0^{\pi} x f(\sin x)dx$ 之值爲何？

(1) π　(2) 2π　(3) π^2　(4) $2\pi^2$

7. 設 $g(x)=\begin{cases}\frac{x}{2}+x^2\sin\frac{1}{x}, & x\neq 0\\ 0, & x=0\end{cases}$，則下列三個敘述中哪些是正確的？

(甲) g 在 $x=0$ 連續；

(乙) $g'(0)>0$；

(丙) g' 在 $x=0$ 連續。

(1) 僅(甲)是正確的；　(2) 僅(甲)、(乙)是正確的；

(3)　(甲)、(乙)、(丙)皆正確；　　　　(4)　(甲)、(乙)、(丙)皆不正確。

8. 下列哪一個敘述表示 $\lim_{x\to x_0} f(x)=+\infty$？

(1)　$\forall M>0$，$\exists\delta>0$ 使得：$0<|x-x_0|<\delta \Rightarrow f(x)>M$；

(2)　$\forall\delta>0$，$\exists M>0$ 使得：$0<|x-x_0|<\delta \Rightarrow f(x)>M$；

(3)　$\exists M>0$，$\forall\delta>0$ 使得：$0<|x-x_0|<\delta \Rightarrow f(x)>M$；

(4)　$\exists\delta>0$，$\forall M>0$ 使得：$0<|x-x_0|<\delta \Rightarrow f(x)>M$。

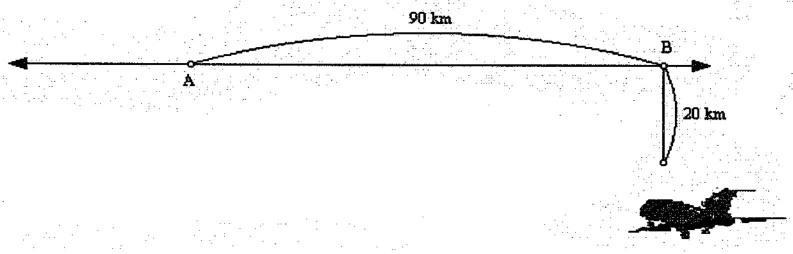
9. 設函數 $g(x,y)=\begin{cases}\dfrac{xy^2}{x^4+y^4}, & (x,y)\neq(0,0)\\ 0, & (x,y)=(0,0)\end{cases}$，則下列哪一個敘述是正確的？

(1)　$\lim_{(x,y)\to(0,0)} g(x,y)$ 存在；　　(2)　$\lim_{y\to 0}\lim_{x\to 0} g(x,y)$ 不存在；

(3)　$\dfrac{\partial g}{\partial x}(0,0)$ 存在；　　(4)　$\dfrac{\partial g}{\partial y}(0,0)$ 不存在。

10. 一飛機迫降大草原，降落地點距公路最近點 B 為 20 公里，B 點 90 公里外之公路上 A 點為救護站（圖示如下）。救護車在公路上時速為每小時 100 公里，而在草原上則為 60 公里，那麼救護車由 A 至迫降點之最短時間為多少小時？

(1) $\dfrac{\sqrt{85}}{6}$　　(2) $\dfrac{37}{30}$　　(3) $\dfrac{4}{3}$　　(4) $\dfrac{7}{6}$



第二部分：**填充題**（甲至癸題，將答案依作答說明劃記在「**答案卡**」上所標示的列號 11 至 38 處。每題完全答對得 5 分，答錯不倒扣，**未完全答對者不給分。如果填充題答案要求的是分數時，必須以最簡分數表示。**）

甲. 設 $f:\boldsymbol{R}\to\boldsymbol{R}$ 為一連續函數且對 $x,y\in\boldsymbol{R}$，$f(x+y)=f(x)f(y)$。若 $f(2)=2$，則 $f(1)$ 之值為 $\sqrt{⑪}$。

乙. 設 $f(x)=\sqrt[3]{x+|x|}$，則 $f'(\frac{27}{2})$ 之值為 $\dfrac{⑫}{⑬⑭}$。

丙. 設函數 $f(x)=\begin{cases}-5\sin x & x\le\pi\\ mx+b & x>\pi\end{cases}$。若 f 在 $x=\pi$ 可微分，則數對 (m,b) 為

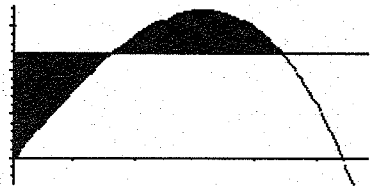
(⑮, ⑯⑰ π) 。

丁. 定積分 $\int_1^2 \frac{1}{x^3+x}dx$ 之值為 $\frac{⑱}{⑲}\ln\frac{⑳}{㉑}$ ，其中 $\ln y$ 表示自然對數函數。

戊. 設 $f(t)$ 為一連續函數且 $\int_1^{2x} f(t)dt = x\sin\pi x$ ，則 $f(1)$ 之值為 $\frac{㉒}{㉓}$ 。

己. 曲線 $r=5(1+\cos\theta)$ 在 $0\le\theta\le 2\pi$ 之弧長為 ㉔㉕ 。

庚. 已知直線 $y=c$ 與曲線 $y=8x-27x^3$ 相交（如圖所示），則當 c 之值為 $\frac{㉖㉗}{㉘㉙}$ 時，能使圖中兩個陰影區域的面積相等。



辛. 若 $\int_0^4\int_{\sqrt{y}}^2 e^{x^3}dxdy$ 之值為 $\frac{e^{\alpha}+\beta}{3}$ ，則數對 (α,β) 為 (㉚, ㉛㉜) 。

壬. 已知橢圓 $3x^2+(y-1)^2=1$ 與拋物線 $y=2x^2$ 除原點外還有兩個交點，將這兩個交點的連線與拋物線所圍的區域繞 y 軸旋轉，則所得的旋轉體體積為 $\frac{\pi}{㉝㉞}$ 。

癸. 設函數 $F(x,y,z)=6x+3y+2z+50$，則 $F(x,y,z)$ 在橢圓面 $4x^2+2y^2+z^2=70$ 之最大值為 ㉟㊱ ，最小值為 ㊲㊳ 。

二、線性代數試題

第一部分：**選擇題**（每題 5 分，共 50 分，請將答案劃記在「**答案卡**」上。）

壹、**單選題**（每題**恰有一個選項是正確的**，答對得 5 分，**答錯不倒扣**。）

1. 矩陣

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 & 3 & 4 \\ 10 & 11 & 12 & 13 & 14 \\ 20 & 21 & 22 & 23 & 24 \\ 30 & 31 & 32 & 33 & 34 \\ 40 & 41 & 42 & 43 & 44 \end{bmatrix}$$

的秩(rank)為何？

(1) 1　　(2) 2　　(3) 3　　(4) 4

2. 設 $A=\begin{bmatrix}1&0&0&0\\2&1&0&0\\4&1&1&0\\0&1&-1&1\end{bmatrix}$。若 $A^{-1}=\begin{bmatrix}*&*&*&*\\*&*&*&*\\\alpha&*&*&*\\*&*&\beta&*\end{bmatrix}$，則數對 (α,β) 爲何？

(1) $(2,1)$　(2) $(2,-1)$　(3) $(-2,1)$　(4) $(-2,-1)$

3. 設 $T:\boldsymbol{R}^2\to\boldsymbol{R}^3$ 爲一線性變換，滿足 $T(1,1)=(1,0,2)$，$T(2,3)=(1,-1,4)$，則 $T(8,11)$ 爲何？

(1) $(-3,5,16)$　(2) $(3,5,16)$　(3) $(-5,3,-16)$　(4) $(5,-3,16)$

4. 若 $A=\begin{bmatrix}1&-1\\2&0\end{bmatrix}$ 且 $g(t)=t^{12}-t^{11}+2t^{10}+t-1$，則 $g(A)$ 爲何？

(1) $\begin{bmatrix}0&-1\\2&-1\end{bmatrix}$　(2) $\begin{bmatrix}-1&0\\-1&2\end{bmatrix}$　(3) $\begin{bmatrix}-1&1\\0&2\end{bmatrix}$　(4) $\begin{bmatrix}1&-1\\2&0\end{bmatrix}$

5. 已知二次型 $f=2x_1^2+3x_2^2+3x_3^2+2ax_2x_3$　$(a>0)$ 經坐標旋轉化成標準型 $f=y_1^2+2y_2^2+5y_3^2$，則 a 之值爲何？

(1) 1　(2) 2　(3) 3　(4) 4

貳、**多重選擇題**（每題**至少有一個選項是正確的**。每個選項各自獨立計分，答對得 $\frac{5}{4}$ 分，答錯倒扣 $\frac{5}{4}$ 分；每題最低分數爲 0 分，完全不答者得 0 分。）

6. 設 W 爲一有限維向量空間 V 之子空間，試問下列哪些敘述是正確的？

(1) 若 U 爲 V 的另一子空間，則 $W\cup U$ 亦爲 V 之子空間；

(2) 若 U 爲 V 的另一子空間，則 $W\cap U$ 亦爲 V 之子空間；

(3) W 的每一組基底必爲 V 之某一組基底的子集合；

(4) 從 V 之每一組基底中可找出一組 W 之基底。

7. 設 A 爲一個 $m\times n$ 階矩陣，且設方程組 $A\vec{x}=\vec{0}$ 只有 $\vec{x}=\vec{0}$ 的解。試問下列哪些敘述是正確的？

(1) 對於所有的 $\vec{b}\in\boldsymbol{R}^m$，$A\vec{x}=\vec{b}$ 皆有解；

(2) 設 $\vec{b}\in\boldsymbol{R}^m$，若 $A\vec{x}=\vec{b}$ 有解，則其解唯一；

(3) $m\le n$；

(4) $n\le m$。

8. 設 A 與 B 爲兩個 n 階實方陣，試問下列哪些敘述是正確的？

(1) AB 與 BA 有相同的跡(trace)；

(2) AB 與 BA 有相同的行列式值；

(3) AB 與 BA 有相同的秩；

(4) AB 與 BA 有相同的特徵多項式(characteristic polynomial)。

9. 設 A 與 B 爲相似的 n 階實方陣，試問下列哪些敘述是正確的？

(1) 若 A 爲可逆方陣，則 B 亦是可逆方陣；

(2) 若 A 爲對稱方陣，則 B 亦是對稱方陣；

(3) A 與 B 有相同的固有值(eigenvalue)；

(4) A 與 B 有相同的固有向量(eigenvector)。

10. 設 A 爲二階實方陣，且 $A=A^{-1}$，試問下列哪些敘述是正確的？

(1) A 的行列式值 $\det(A)$ 等於 1 或-1；

(2) A 的跡 $tr(A)$ 等於 2 或 0；

(3) x^2-1 爲 A 的特徵多項式；

(4) A 可對角化。

第二部分：**填充題**（甲至癸題，將答案依作答說明劃記在「**答案卡**」上所標示的列號 11 至 45 處。每題完全答對得 5 分，答錯不倒扣，**未完全答對者不給分。如果填充題答案要求的是分數時，必須以最簡分數表示。**）

甲. 設 $A=\begin{bmatrix}2 & 3 & 4 & 6\\ 2 & 0 & -9 & 6\\ 4 & 1 & 0 & 2\\ 0 & 1 & -1 & 0\end{bmatrix}$，則 $\det(A)=$ <u>⑪⑫⑬</u>。

乙. 設 $T(x_1,x_2,x_3,x_4)=(x_1-x_3+2x_4,\ x_2+x_3, 4x_2+3x_4, -x_1+2x_2-x_3+x_4)$ 爲 $\boldsymbol{R}^4$ 上的線性變換，若 a 爲 Ker(T) 的維數，而 b 爲 Im(T) 的維數，其中

$Ker(T)=\left\{(x_1,x_2,x_3,x_4)\in\boldsymbol{R}^4 \mid T(x_1,x_2,x_3,x_4)=(0,0,0,0)\right\}$，

$\mathrm{Im}(T)=\left\{T(x_1,x_2,x_3,x_4) \mid (x_1,x_2,x_3,x_4)\in\boldsymbol{R}^4\right\}$，

則 $(a,b)=$ <u>(⑭ , ⑮)</u>。

丙. 設 $P_3(\boldsymbol{R})$ 表所有次數小於或等於 3 的實係數多項式，$M_{2\times2}(\boldsymbol{R})$ 表所有的二階實方陣。設 T 爲從 $P_3(\boldsymbol{R})$ 映至 $M_{2\times2}(\boldsymbol{R})$ 上的一個線性變換，其定義爲

$$T(f(x))=\begin{bmatrix}f(1) & f(2)\\ f(3) & f(4)\end{bmatrix}。$$

令 $\beta=\{x^3,x^2,x,1\}$ 與 $\gamma=\left\{\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & 0\end{bmatrix},\begin{bmatrix}0 & 1\\ 0 & 0\end{bmatrix},\begin{bmatrix}0 & 0\\ 1 & 0\end{bmatrix},\begin{bmatrix}0 & 0\\ 0 & 1\end{bmatrix}\right\}$ 分別爲 $P_3(\boldsymbol{R})$ 與 $M_{2\times2}(\boldsymbol{R})$ 的有序基

底(ordered basis)，且 $[T]_\beta^\gamma=\begin{bmatrix}1&1&1&1\\a&*&*&*\\*&b&*&*\\*&*&c&*\end{bmatrix}$ 爲 T 對 β 與 γ 的矩陣表示，

則 $(a,b,c)=$ (⑯ , ⑰ , ⑱)。

丁. 設 A 爲一個三階實方陣，滿足：(i) $\det(A)=2$ ； (ii) $tr(A)=0$ ；(iii) A 爲對稱矩陣；(iv) A 只有兩個相異固有值 a 及 b，其中 $a>b$，則 $(a,b)=$ (⑲ , ⑳㉑) 。

戊. 在 $\boldsymbol{R}^4$ 中，若 W 爲由 $\{(1,1,0,0),(1,0,1,1)\}$ 所生成的子空間，則 $(1,2,3,4)$ 在 W 上的正射影向量(orthogonal projection)爲 $\left(\frac{14}{5},\frac{㉒}{5},\frac{㉓㉔}{5},\frac{㉕㉖}{5}\right)$。

己. 設 $A=\begin{bmatrix}4&3\\4&5\end{bmatrix}$。若 a 與 b 爲 A 的兩個固有值，其中 $a>b$，則 $(a,b)=$ (㉗ , ㉘)。

庚. 承上題，若 B 爲一個二階實方陣，滿足 $B^3=A$，則 $B=\begin{bmatrix}\frac{㉙㉚}{7}&\frac{㉛}{7}\\\frac{㉜}{7}&\frac{㉝㉞}{7}\end{bmatrix}$。

辛. 設 $A=\begin{bmatrix}2&1&0\\-1&0&1\\1&3&1\end{bmatrix}$ 且 $A^{-1}=aA^2+bA$，則 $(a,b)=\left(\frac{㉟㊱}{4},\frac{㊲}{4}\right)$。

壬. 設 $A=\begin{bmatrix}1\times1&1\times2&1\times3&1\times4&1\times5\\2\times1&2\times2&2\times3&2\times4&2\times5\\3\times1&3\times2&3\times3&3\times4&3\times5\\4\times1&4\times2&4\times3&4\times4&4\times5\\5\times1&5\times2&5\times3&5\times4&5\times5\end{bmatrix}$。若 $A^{100}=(a^b)A$，其中 a,b 爲正整數，

則 $(a,b)=$ (㊳㊴, ㊵㊶)。

癸. 設 $A=\begin{bmatrix}*&\alpha&*\\*&\beta&*\\\gamma&*&*\end{bmatrix}$ 爲一個三階實方陣，若對於 $\boldsymbol{R}^3$ 上任意一點 (a,b,c) 與其對於平面 $x+y+z=0$ 的對稱點 (a',b',c') 之間都有 $A\begin{bmatrix}a\\b\\c\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}a'\\b'\\c'\end{bmatrix}$ 之關係，

則 $(\alpha,\beta,\gamma)=\left(\frac{㊷㊸}{3},\frac{㊹}{3},\frac{㊺㊻}{3}\right)$。

三、微積分答案

第一部分：選擇題

1. (3)　2. (2)　3. (4)　4. (4)　5. (3)　6. (1)　7. (2)　8. (1)　9. (3)　10. (4)

第二部分：填充題

甲. $\sqrt{2}$　乙. $\frac{2}{27}$　丙. $(5,-5\pi)$　丁. $\frac{1}{2}\ln\frac{8}{5}$　戊. $\frac{1}{2}$

已. 40　庚. $\frac{32}{27}$　辛. $(8,-1)$　壬. $\frac{\pi}{16}$　癸. 85, 15.

四、線性代數答案

第一部分：選擇題

題號	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
答案	(2)	(3)	(4)	(1)	(2)	(2)(3)	(2)(4)	(1)(2)	(1)(3)	(1)(4)

第二部分：填充題

題號	甲	乙	丙	丁	戊
答案	320	(1,3)	(8,9,4)	(2,-1)	$(\frac{14}{5},\frac{1}{5},\frac{13}{5},\frac{13}{5})$

題號	己	庚	辛	壬	癸
答案	(8,1)	$\begin{bmatrix}\frac{10}{7} & \frac{3}{7}\\ \frac{4}{7} & \frac{11}{7}\end{bmatrix}$	$(\frac{-1}{4},\frac{3}{4})$	(55, 99)	$(\frac{-2}{3},\frac{1}{3},\frac{-2}{3})$