平面的分割

李奕柏
國立臺灣師範大學附屬高級中學

很多人都知道，平面上 n 條直線最多可以將平面分割成 $s(n)=2+2+3+4+\cdots+n=\dfrac{n(n+1)}{2}+1$ 個區塊。這個問題使我想到，是不是比 $s(n)$少而比 $s(n\text{-}1)+1$ 多的任何區塊數也都可以分割出來呢？爲了研究這個問題，我又想到：利用不平行的直線是不是可以把平面分割成任意多個區塊呢？經過研究，我發現利用不平行的直線不能把平面分割成 3 個區塊，5 個區塊，9 個區塊和 17 個區塊。因爲 $3=2^1+1$, $5=2^2+1$, $9=2^3+1$, $17=2^4+1$。所以我猜測 2^k+1, $k=1, 2, 3, 4, 5\cdots$，個區塊都不能分割出來，其他的數目才可以分割出來。後來經過仔細研究，才發現只有上面 4 個區塊數分不出來，而證明了下面的定理：

定理：若 $m=2^k+1$, $k=1, 2, 3, 4$，則利用不平行的直線不可能將平面分割成 m 個區塊。若 m 是其他的正整數，則可以用不平行的直線將平面分割成 m 個區塊。（$m=1$ 時不必分）

首先證明，利用不平行的直線不能將平面分割成 3, 5, 9 或 17 個區塊。

一條直線一定將平面分割成 2 個區塊。兩條不平行的直線一定有一個交點，所以將平面分割成 4 個區域。直線越多，分割的區塊數越多。所以利用不平行的直線不能將平面分割成 3 個區塊。

1 條直線分成 2 個區塊

圖 1

2 條直線分成 4 個區塊

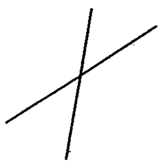


圖 2

現在再加一條不平行的直線。如果這條新加的直線通過原來的交點，那麼這三條直線將平面分割成 6 個區塊（圖 3-a）。如果這條新加的直線不通過原來的交點，那麼這條直線和原來的兩條直線各有一個交點，所以這三條直線會將平面分割成 7 個區塊（圖 3-b）。

6 區塊

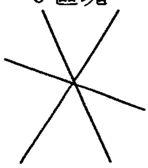


圖 3-a

7 區塊

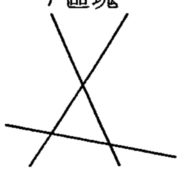


圖 3-b

所以利用不平行的直線不能將平面分割成 5 個區塊。

現在再加第 4 條不平行的直線。這條直線可能通過原來的交點，也可能不通過這些交點，所以只有下列幾種情形：

8 區塊

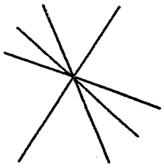


圖 4-a

10 區塊

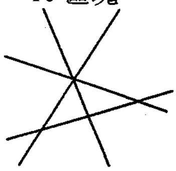


圖 4-b

10 區塊

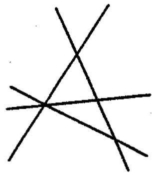


圖 4-c

11 區塊

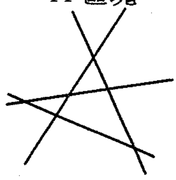


圖 4-d

它們分別將平面分成 8, 10, 10, 11 個區塊（圖 4-b 和圖 4-c 是同一類形）。所以利用不平行的直線不能將平面分割成 9 個區塊。

再加第 5 條不平行的直線時，可將平面分割成 10, 13, 14, 15 和 16 個區塊，如下圖。

10 區塊

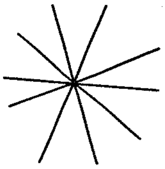


圖 5-a

13 區塊

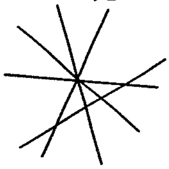


圖 5-b

14 區塊

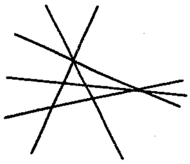


圖 5-c

15 區塊

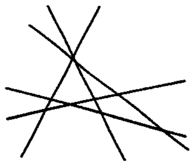


圖 5-d

16 區塊

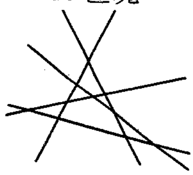


圖 5-e

再加第 6 條不平行的直線時，只有下列幾種情形

12 區塊

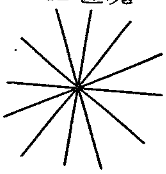


圖 6-a

16 區塊

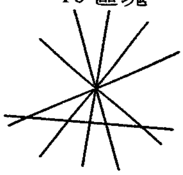


圖 6-b

18 區塊

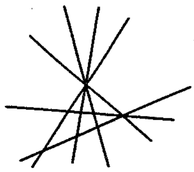


圖 6-c

19 區塊

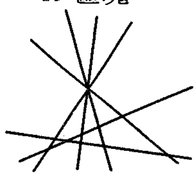


圖 6-d

20 區塊

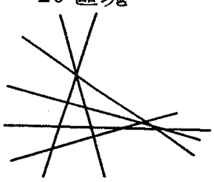


圖 6-e

21 區塊

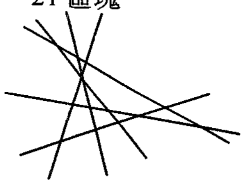


圖 6-f

22 區塊

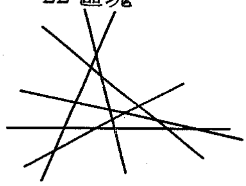


圖 6-g

在圖 6-b, …, 圖 6-g 中若再增加一條不平行的直線，則所分成的區塊數必比 17 個區塊多，所以不可能將平面分割成 17 個區塊。而在圖 6-a 中，若所增加的直線不通過交點，則所分成的區塊數也比 17 個區塊多，若所增加的直線通過交點，則會將平面分割成 14 個區塊。

再繼續增加不平行的直線，則分割成的區塊數，必為偶數（增加的直線通過交點）或超過 17 個區塊（增加的直線不通過交點）。所以，無論如何，都不可能將平面分割成 17 個區塊。因此可知，利用不平行的直線不能將平面分割成 17 個區塊。

現在我們已經證明，利用不平行的直線不能將平面分割成 3, 5, 9 或 17 個區塊，但是可以分割成 1（不用分割）2, 4, 6, 7, 8, 10, …, 16, 18, …, 22 個區塊。

因為 6 條不平行的直線可以將平面分割成 18, 19, 20, 21 和 22 個區塊（圖 6-c～6-g），再加入第 7 條直線時，若這條直線不通過原來的交點，則有 6 個新交點，所以可增加 7 個區塊，所以 7 條不平行的直線可將平面分割成 25, 26, 27, 28 和 29 個區塊。另外，若在圖 6-c 中加入一條通過三直線交點的直線，則可增加 5 個區塊，故得 23 個區塊（圖 7-a）。若在圖 6-c 中加入一條通過二直線的交點而不通過其他交點的直線，則可得 24 個區塊（圖 7-b）。

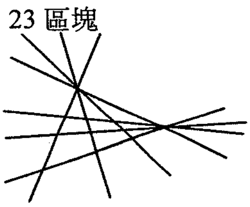


圖 7-a

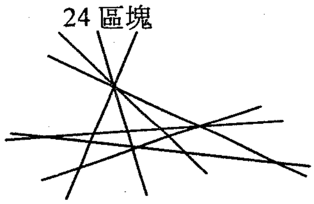
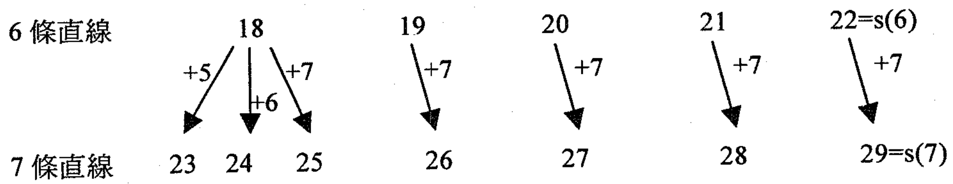


圖 7-b

用圖形表示：



所以 7 條直線可以將平面分割成

23(=s(6)+1), 24, 25, 26, 27, 28 或 29(=s(7))

個區塊。

當畫第 8 條不平行的直線時，若此直線不通過交點，則可增加 8 個區塊，所以 8 條直線可將平面分割成

31(=s(7)+2), 32, 33, 34, 35, 36 或 37(=s(8))

個區塊。如果此直線通過原來的一個交點，而這個交點是兩直線的交點，那麼就只增加 7 個區塊。此時我們就可以從 23+7=30 得到 30 個區塊。用圖形表示

7 條直線		23	24	25	26	27	28	29=s(7)
	+7?	+8	+8	+8	+8	+8	+8	+8
8 條直線	30	31	32	33	34	35	36	37=s(8)

現在我們證明這樣的交點一定存在。

定理：平面上 n 條不平行的直線若有兩個以上的交點，則一定有一個交點剛好是兩直線的交點。

證明：n 條直線的每一個交點到不通過這個交點的直線都有一個距離，這些距離中一定有最小的。假設 P 點到直線 L 的距離是最小的。我們將證明只有兩條直線通過 P 點。如果有三條直線 L_1, L_2 和 L_3 同時通過 P 點，那麼 L_1, L_2, L_3 各和 L 相交（因爲它們都不平行）。設交點爲 A, B, C 且 B 點在中間，如下圖

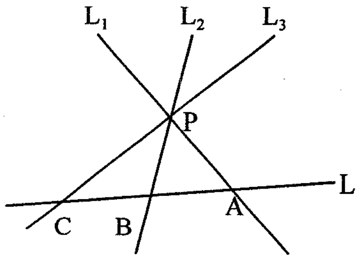


圖 8

則 B 點到 L_1 或 B 點到 L_3 的距離至少有一個會小於 P 點到 L 的距離，所以就不對了。也就是說，P 點一定剛好是兩條直線的交點。所以，剛好是兩條直線的交點是存在的。

根據上面的定理可知 8 條不平行的直線可以將平面分割成 30 個區塊・再加上更前面的討論可知：

8 條不平行的直線可將平面分割成

30(=s(7)+1), 31, 32, 33, 34, 35, 36 和 37(=s(8))

個區塊。

同樣的，再加第 9 條直線時，若不通過交點，則可增加 9 個區塊。若通過兩直線的交點（一定有這樣的交點），而不通過其他交點，則可增加 8 個區塊。所以 9 條不平行的直線可將平面分割成

38(=s(8)+1), 39, 40, 41, 42, 43, 44, 45, 46(=s(9))

個區塊。用圖形表示爲

8 條直線	30=s(7)+1		31	32	33	34	35	36	37=s(8)
	↙ +8	↘ +9	↘ +9	↘ +9	↘ +9	↘ +9	↘ +9	↘ +9	↘ +9
9 條直線	38=s(8)+1	39	40	41	42	43	44	45	46=s(9)

依此推下去，可知 k 條不平行的直線可將平面分割成

$$s(k\text{-}1)+1,\ s(k\text{-}1)+2,\ \cdots,\ s(k)\text{-}1,\ s(k)$$

個區塊，其中 k=7, 8, 9, 10, …。這些數字包含 23 以後的所有的正整數，所以可知當 $m\geq 23$ 時，一定可利用不平行的直線將平面分割成 m 個區塊。連同前面 m-1, 2, …，到 22 中除了 3, 5, 9, 17 之外的每一個 m，都可利用不平行的直線將平面分割成 m 個區塊。所以我們得到結論：若 $m=2^k+1$, k=1, 2, 3, 4，則利用不平行的直線不能將平面分割成 m 個區塊。對於其他的正整數 m，我們都可以用不平行的直線將平面分割成 m 個區塊。

上面的結果也解決了本文開頭的問題：平面上 n 條直線（可以平行）能不能將平面分割成

$$s(n\text{-}1)+1,\ s(n\text{-}1)+2,\ \cdots,\ s(n)$$

個區塊（一個區塊算可以，不用分）？答案是當 n=1, 2, 5，或 $n\geq 7$ 時一定可以。但是，當 n=3 時，不能分成 5 個區塊；當 n=4 時，不能分成 9 個區塊；當 n=6 時，不能分成 17 個區塊。

（本文作者現就讀國立臺灣師大附中國中三年級）

誰綁的凸多面體種類比較多

設計者：陳創義

題目：

利用橡皮筋及免洗筷綁出凸多面體，要求凸多面體每一個邊都是等長（即大約是筷子的長度），每一個面都是正多邊形（可以是不同的正多邊形），且綁出的凸多面體要有穩固性（經得起輕輕一摔不變形）。

※要求每一支筷子都是這凸多面體的邊。也就是綁的地方都靠近筷子的尾端，不能綁在靠中間位置。

（取材自：國立臺灣師範大學科學教育中心舉辦之臺北地區國中學生創意競賽題目）