「數學解題」的教育價值

謝新傳
臺北市五常國民中學

民國八十七年教育部公布了「九年一貫課程綱要」將「探索與研究」、「獨立思考與解決問題」列為國民教育所要求的基本能力，然則「探索」、「研究」、「思考」與「解題」不也就是數學的本質？數學教育追求的目標嗎？

在過去，一個人的創造力被認為是天賦的，並非後天的教育可以培養出來的，尤其是對於像歐幾理德 Euclid 這位「數學先知」，（他寫了一本像聖經一樣的書—幾何原本 elements），人們很難相信創造力不是天生的。但在 1926 年教育學者華勒氏（Wallas, 1926）提出了「四階段創造歷程」（預備期、醞釀期、豁然開朗期及確認期）理論，他述及「創造」也是一種心理歷程，創造力居然是「蘊釀」出來的，而後認知心理學因而為此敞開研究大門，於是陸續有學者著手於研究「創造力是否可由教育的訓練培養出來的嗎？」。其間歷經了多位著名學者的研究，一直到現在，「創造力是可以培養出來的」這個看法是很少人會再去懷疑的，從歷史上至少我們可以從柏拉圖(Plato, BC427~347)及歐都克斯(Eudoxus)這些人身上得到證實：柏拉圖，這個雅典人，年輕時因師法於蘇格拉底(Socrates)，得到他的真傳而成為哲學家。公元前 387 年，他在雅典建立了學院吸引了不少人才，雖然他本人對數學沒多大貢獻，但他卻能培養出傑出的數學家—歐都克斯。

而在提昇創造力的許多方法之中，「解題」的訓練被認為是最有效的策略（至少數學是如此）。而關於解題模式，較廣為學者所接受的是伯尼斯(Parnes, 1967)所提的「五階段論」，即解題包括五個過程：(1)發現事實(2)找出問題(3)想出計策(4)提出解決之道(5)尋求能被接受的解答。

迦納(Gardner, 1983)在《心智的架構》(Frames of Mind)一書中也提出他對於人類智能的獨到的見解：Gardner 認為相對於其他動物，人類智能最重要的一個特質就是有「解決問題」的能力，動物雖然有生存的基本「能力」，但遇著問題困擾它時，它們並不會去思考解決問題的方法。白老鼠走迷宮的試驗，僅僅只是白老鼠的「嘗試錯誤」，它並沒有經歷像 Parnes 的「五階段」解題法，白老鼠在找出路時並沒有提出「解題策略」，走迷宮至多也只能說是「練習」(exercise)而已。而 Gardner 所述及之智能包含語文的理解、運算能力、空間關係、推理、流暢、記憶等基本能力，而事實上這也不就是「數學解題」之能力嗎？

「解題」在教育上的價值早年也已獲得杜威(John Dewey, 1859~1952)的注意，後來歷經行為學派、認知學派直至近代資訊處理心理學派的跟進已有相當的研究。底下是我對「解

題」在教育上的價值的一些見解；

第一、重新建築學習者的學習經驗

有意義的數學學習是要能把所學到的數學能力及數學知識活用在實際的生活問題上並提出最佳的解法，試想一個人受了十幾年的數學教育卻不能獨立思考表現與創新、看不懂汽車使用說明書或是不會使用應用軟體、不能善用各種符號和工具（如網際網路）來與別人溝通分享、不能主動探索與研究等等，那麼，我想過去的學習方式與心態學習者就必須重新檢討。而學習成就評量既然是整體教學活動的一部分，那麼，解題的過程恰好可以提供學習者學習經驗的反省機會。

第二、「解題」教學就是創造思考教學

由於人是善於學習模仿且富於創造的動物，所以從舊石器時代發明石具及鑽木取火開始一路走來始終如一。人類因不斷的創造發明乃有今日的科技及人文藝術成就。而「創造教學」的主要目的，就是在學習過程中去激發學習者的創造潛能，人之異於禽獸者，乃在於遇到「問題」時會設法解決。當動物遇到急難時只會有不安的反應並不會思考解決，有創造力的人在遭遇「問題」時，則會去觀察理解、探索、思考及查考有關的文獻資料，並且提出各種「解題方案」，最後選擇最可行的方法解決。由於解題者會不斷的改變思路反覆思索，靈感及頓悟油然生焉，於是「創造力」就被激發出來了。

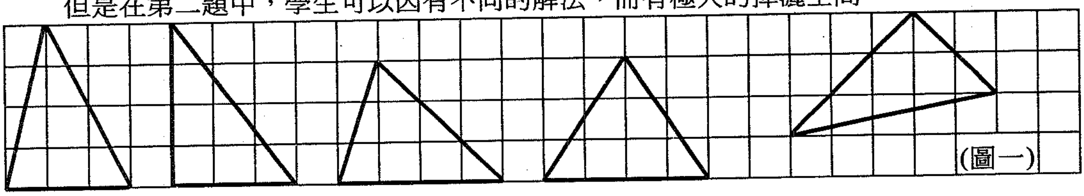
既然說「學習評量」是屬於整體教學的活動的一部分，那麼「解題」則屬於更高層次的創造性活動。「學習評量」只是爲了檢驗單元教材或「連結」的教學目標所作的教育測驗，但是「解題」不只是運用既有的認知對「問題」本身的思考，甚至於對各種解法加以「批判」。簡單的說，「學習評量」就是在檢驗老師教的東西，學生懂了沒有？而「解題」是要學生主動發現問題之所在，提出「解決之道」。我舉個簡單實例說明「學習評量」和「解題」的不同：

《學習評量》請問底邊長 4 公分，高 3 公分的三角形面積是幾公分？

《問題求解》在方格紙上，請你畫出一個面積爲 6 平方單位的三角形。

在第一題中學生只要能寫上 3cm× 4cm=12cm^2 老師就算達到教學目標了，但是在這個評量的過程中學習者沒有機會表現創意。

但是在第二題中，學生可以因有不同的解法，而有極大的揮灑空間。



(圖一)

如圖一，我教到的一位學生在方格紙上作出的這個三角形，三個邊和其對應的高都不是整數，但是它的面積是 12 平方單位。這位同學是瞭解三角形的底× 高÷ 2 的面積公式，但是它在求這個三角形的面積並不是由這個三角形的底× 高÷ 2 算出來的，所以，「解題」其實就是建構新知識的過程。這種建構新知識的過程，其實就是「創造」的歷程。

第三、對自己的學習負責

學生在探索、思考與解決這些問題（如果是優質問題）之後，應就會有學習行為的產生。所謂「優質問題」是除了要對解題者有適性的挑戰和保證有成功的機會之外，還能引導受教者主動追求知識並對自己的學習負責，所謂「對自己的學習負責」就是說學習者在屢次的解題後（不論是成或敗），會再去反思「學習」要學習什麼？要如何學習？這同時也呼應了在近代科學教育所支持的建構主義教育觀點中，學者都一致認同「科學知識是學習者主動建構」的論調。

第四、訓練學生能勇敢地面對全然陌生的環境—面對問題，解決問題

孟岱爾(Mendel, 1822~1884)出生於奧地利一個貧窮的農家，從小就在自然的環境裏成長，除了愛好自然外對生命的探究特別有興趣，長大後因家境貧寒故而當了修道院的神父，而這修道院的院子後來竟成了他的（數學）研究室。孟岱爾依據他對植物繁殖的長期觀察，發現植物的表徵子代和親代間絕對是有遺傳機制的，他想去瞭解這個「數學機制」，於是，他選擇易於栽培和觀察的豌豆作實驗。他將具有對偶性狀的親代交配（如黃色種子× 綠色種子，高莖× 矮莖）（至此乃切入數學思考）．發現第一子代中竟然清一色只有一種性狀，孟岱爾覺得驚訝，於是大膽提出「顯性」及「隱性」的「假說」，而後的實驗證實了著名的 Mendel 分離率及獨立分配率而奠定了現代遺傳學之基。由此可見，我們不難瞭解 Mendel 除了具備有深厚的數學根基外，最重要的是他有冒險患難的「解題」精神才能有最後「創造性」的論作。

底下，我們從數學史上再來看一個因「數學解題」而建構概念例子：

萊布尼茲(Leibniz, 1646~1716)就是解題高手，曾解過無數的數學難題。

荷蘭科學家惠更新(Huygens, 1629~1695)，他是當代「數學奇葩」，就曾經考過萊布尼茲一個無窮級數的求和問題，（此級數各項要為連續「三角數」之倒數，三角數即 1, 3, 6, 10, 15, 21…此數列既非等比，亦非等差數列，其倒數更非等比或等差數列）。萊布尼茲對數字敏感度很強，他思索了一番，而想出如下的解法：

【解】令 $S=1+1/3+1/6+1/10+1/15+1/21+\cdots\cdots+\cdots\cdots$ 等式兩邊同乘以 1/2：

$\rightarrow 1/2S=1/2+1/6+1/12+1/20+1/30+1/42+1/56+\cdots\cdots+\cdots\cdots$

$\rightarrow 1/2S=(1-1/2)+(1/2-1/3)+(1/3-1/4)+(1/4-1/5)+ \cdots\cdots\cdots\cdots+\cdots\cdots$

$\rightarrow 1/2S=(1-\cancel{1/2})+(\cancel{1/2}-\cancel{1/3})+(\cancel{1/3}-\cancel{1/4})+(\cancel{1/4}-1/5)+ \cdots\cdots\cdots\cdots+\cdots\cdots$

$\rightarrow 1/2S=1$

$\rightarrow S=2$

萊布尼茲也因此「題」求解的思考過程，而建構了「無窮級數」的數學王國。

參考文獻

1.Dunham, W. Journey through genius: The great of mathematics

2.Simon Singh. Fermat's last theorem.

3.Parnes, S.J. (1967). Creative behavior guidebook

4.Wallas, G. (1926). The arts of thought

5.Gardner, H. (1983). Frames of Mind: The theory of multiple intelligences

---

有多少整數解？

設計者：陳昭地

題目：

創創在一本益智遊戲書中，看到一則算式：

$$\frac{1}{m}+\frac{1}{n}=\frac{1}{2}+\frac{1}{p} \ldots\ldots(*)$$

其中 m,n 都是大於 2 的正整數，p 也是正整數。他很快地發覺 m=3,n=3,p=6 是(*)的一組解。但找其它的解就花了不少時間，他甚至懷疑(*)是否僅有有限組解，請你們也來想想，回答這個問題。

(1)請你們找出(*)的其餘的解，越多越好。

(2)你們能否確定(*)在 m>2,n>2,p>1 的正整數條件下，僅有有限組解？理由呢？如果(*)中之 m,n,p 都是正整數而沒有 m,n>2 之限制，那麼(*)是否僅有有限組解？

（取材自：國立臺灣師範大學科學教育中心舉辦之臺北地區國中學生創意競賽題目）