雨滴形成的簡單物理模型

褚志彪
國立清華大學　物理系

了解在自然界中雨滴形成的原因及臨界狀況的條件，有助於氣象上的觀測。現今已經有很多可以測量雨滴掉落的行徑、形狀和大小的實驗方法，這些方法是我們研究氣象的重要依據。本文將提供一個簡單模型，來探討雨滴如何形成，以及研究雨滴成核的臨界半徑。

§雨滴如何形成

水蒸氣在形成水滴的過程中，首先需要一個核種來凝結，如空氣中漂浮的塵埃。水蒸氣會被吸附在核種上，並開始凝結。在雨滴形成的起始階段，大氣中的水蒸氣凝結成不同的凝結核，這些凝結核不斷產生與消失。要使這些凝結核形成穩定的雨滴，則必須在凝結過程中，凝結核可以不斷的長大。凝結核的大小主要是由其表面自由能和體積自由能來決定。在剛凝結的初期，表面自由能佔了較大的影響力，等到超過一個臨界半徑時，則體積自由能的影響會較大。

如果考慮一個在無重力場中形成的水滴，半徑為 r，單位體積液相的粒子數為 n_l，假設液相和氣相的化學活化能分別以 μ_l 和 μ_g 表示，單位面積表面自由能以 σ 表示。則整個系統的自由能可寫成

$$G(r)=4\pi r^2\sigma-\frac{4}{3}\pi r^3 n_l(\mu_g-\mu_l) \qquad (1)$$

，達到臨界半徑 r_c 時整個系統的自由能 $G(r)$ 應該是極大值，所以只要凝結核達到此極大值，當半徑再增加時（即 $r>r_c$ ），整個自由能便開始降低。因此凝結核便趨向長大的方向進行，最終逐漸長成雨滴。臨界半徑的值可由 $G(r)$ 對半徑的微分等於零求得，即

$$\partial G/\partial r=8\pi r\sigma-4\pi r^2 n_l(\mu_g-\mu_l)=0 \qquad (2)$$

經上式可得臨界半徑為

$$r_c=-2\sigma/n_l\Delta\mu \qquad (3)$$

式中　$\Delta\mu=\mu_l-\mu_g$

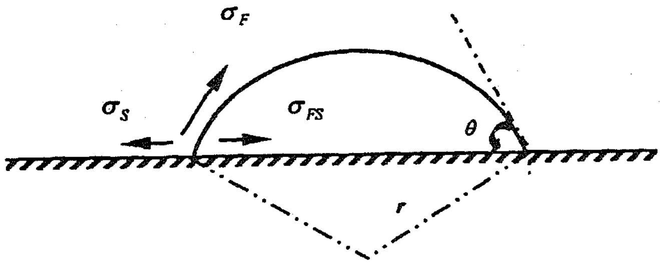
將 r_c 代回(1)式可以得到剛達到臨界核狀態時，系統的自由能 G_c

$$G_c=\frac{16}{3}\frac{\pi\sigma^3}{n_l^2\Delta\mu^2} \qquad (4)$$

如果水滴有支撐，則形狀便不可能是真正的球形，例如附著在桌面上的水滴，是一個近似橢球的變形球體。現在考慮在對流層中的積雨雲，在形成過程中，水滴由水蒸氣成核

再逐漸長大到從雲層中掉落的情形。在此情形中，水滴形成的過程可以看成是凝結核被支撐在某一高度上，由凝結核變成臨界核，再逐漸長成，而形成雨滴。若考慮一小粒水滴被支撐在桌面上，如圖一所示，爲了方便討論，先假設此水滴爲一球體上的某一部份。此球體的半徑爲 r，若以 σ_F 、 σ_S 、 σ_{FS} 分別表示液相和氣相間、接觸面和氣相間及液相和接觸面的的單位面積自由能，水滴外緣切線和接觸面有個夾角 θ ，則由水平方向力的平衡可得

$$\sigma_S = \sigma_F \cos\theta + \sigma_{FS} \tag{5}$$



圖一
水滴在桌面上被支撐時，液相、氣相及
接觸面間單位面積自由能的作用方向

上式平衡式之所以能成立是因爲單位面積的自由能 σ 等於表面張力 T 之緣故。原因可由簡單的式子看出， $T = F/_{\Delta l} = F\Delta x/_{\Delta l \Delta x} = E/_{\Delta A} = \sigma$ ，所以單位面積的自由能是有方向性的。由圖一中的幾何關係可得知此水滴和接觸面的接觸面積爲 $\pi(r\sin\theta)^2$ ，此水滴和空氣的接觸表面積爲

$$\int d\Omega \quad r^2 = r^2\int_0^{\theta}\sin\theta d\theta\int_0^{2\pi}d\varphi = 2\pi r^2(1-\cos\theta) \tag{6}$$

故整個水滴的表面自由能 G_S 爲

$$\begin{aligned} G_S &= 2\pi r^2(1-\cos\theta)\sigma_F + \pi r^2\sin^2\theta(\sigma_{FS}-\sigma_S) \\ &= 2\pi r^2(1-\cos\theta)\sigma_F + \pi r^2\sin^2\theta(-\sigma_F\cos\theta) \\ &= 4\pi r^2\sigma_F \times {}^{(\cos^3\theta - 3\cos\theta + 2)}/_{4} \\ &= 4\pi r^2\sigma_F f(\theta) \end{aligned} \tag{7}$$

該液滴的體積爲甜筒狀體減去頂角爲 2θ 的圓錐體，圓錐體體積爲

$$\frac{1}{3}\times A\times h = \frac{1}{3}\times\pi r^2\sin^2\theta\times r\cos\theta = \frac{1}{3}\pi r^3(1-\cos^2\theta)\cos\theta$$

甜筒狀體體積爲

$$\int d\Omega \quad r^2\,dr = \int_0^r r^2dr\int_0^{\theta}\sin\theta d\theta\int_0^{2\pi}d\varphi = \frac{2}{3}\pi r^3(1-\cos\theta)$$

因此外緣切線夾角爲θ的液體體積爲

$$V_d=\frac{2}{3}\pi r^3(1-\cos\theta)-\frac{1}{3}\pi r^3(1-\cos^2\theta)\cos\theta=\frac{\pi r^3}{3}(2-3\cos\theta+\cos^3\theta)=\frac{4\pi r^3}{3}f(\theta) \tag{8}$$

這裡的 $f(\theta)=\dfrac{2-3\cos\theta+\cos^3\theta}{4}$ 和(7)式中一樣。

則液滴的體積自由能G_V爲

$$G_v=-\frac{4\pi r^3}{3}f(\theta)n_l(\mu_g-\mu_l) \tag{9}$$

如果假設爲理想氣體的模型，$\Delta G_v=N(\mu_g-\mu_l)=kT\ln\dfrac{P}{P_e}$，式中 N 爲液滴中的總粒子數，P_e 爲平衡時的蒸氣壓。因此

$$\mu_g-\mu_l=\Delta G_v/N=\Delta G_v/n_lV$$

代入(9)即得

$$G_v=-\frac{4\pi r^3}{3}f(\theta)\frac{\Delta G_v}{V}\equiv\frac{4\pi r^3}{3}f(\theta)g_v=-\frac{4\pi r^3}{3}f(\theta)\frac{kT}{V}\ln\frac{P}{P_e}$$

在這裡，我們定義單位體積的體積自由能爲

$$g_v=-\frac{\Delta G_v}{V}=-\frac{kT}{V}\ln\frac{P}{P_e} \tag{10}$$

因此，液滴所具有的總自由能 G

$$G=G_s+G_v=4\pi f(\theta)\times(r^2\sigma_F+\frac{1}{3}r^3g_v) \tag{11}$$

將總自由能對 r 微分等於零便可求出在有支撐的情形下，水滴的臨界半徑了，

$$r_c=-2\sigma_F/g_v=-2\sigma_F/n_l\Delta\mu \tag{12}$$

和先前假設沒重力影響下的形式(3)式一樣。將(12)式代入(11)式，同理可得達臨界大小時，水滴的總自由能爲

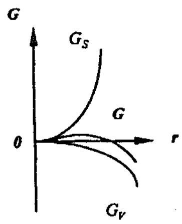
$$G_c=\frac{16}{3}\frac{\pi\sigma_F^3}{n_l^2\Delta\mu^2}f(\theta)$$

由 $f(\theta)$ 的表示式發現當 $\theta=\pi/2$，$f(\theta)=0.5$，此時液滴成半圓球形；當 $\theta=\pi$ 時，$f(\theta)=1$，液滴成圓球形，即達到臨界核時，自由能改變爲最大，或者是說，液滴克服了一個能量障礙而準備隨時脫離桌面了，即脫離積雨雲中的表面而掉落成雨了。

§雨滴的大小及形狀

當水滴逐漸長大時，表面自由能項和 r^2 成正比且是正的，而體自由能項則與 r^3 成正比且是負的（因 g_v 爲負），表面自由能相對於體積自由能的影響力和 r 成反比，見圖二所示。所以相對地使自由能隨著半徑增加而增加，如圖二。但當半徑變大後，顯示和 r^3 成正比且

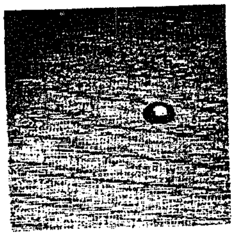
是負的體積項影響力比表面還顯著，因而整個自由能開始遞減，則由(9)式，當$G_v < 0$時，$\mu_g > \mu_l$，液相活化能少於氣相活化能，此時水滴便開始自動凝結了。



圖二

水滴總自由能G隨半徑r的變化圖
G_S、G_V分別代表水滴表面自由能和體積自由能

至於雨滴是否成圓球形呢？如果是，其形狀便只需要用一個參數描述，如果不是，如呈橢圓形便需要用兩個參數來描述其形狀。一個漂浮在空氣中的雨滴會受到空氣阻力的影響而變形，當水滴的最大尺度爲 0.28 mm時，通常是近乎圓形的。如果水滴越大，則形狀偏離圓球形越遠。半徑 1.35 mm的水滴略似橢圓形，當水滴越大時，底部逐漸變扁，像顆饅頭。到了約半徑 4.0 mm時底部幾乎扁平，但是在自然中這樣大的水滴是不穩定的，容易碎裂成幾個小水滴，圖三爲半徑約爲 2.0 mm的水滴照片。



圖三

圖為正在掉落中的半徑 2mm 的水滴

至於雨滴形成時，其半徑爲什麼會界於$0.28mm < r < 4.0mm$的範圍呢？我們可以用一簡單模型來了解。考慮一浴室中天花板上水滴掉落時的情形，當水滴依附在天花板上，有表面張力和重力作用著。重力將液滴拉成類似半橢圓狀，表面張力爲減少表面積將液滴往回拉，當重力超過了表面張力時，液滴便掉下去了。我們可以利用這個模型來求出雨滴掉下去時的半徑大小，依照前面所求的液滴面積和體積，表面張力T和重力平衡時，

$$2\pi R\sin\theta T = \frac{\pi R^3}{3}(2 - 3\cos\theta + \cos^3\theta)\rho g \qquad (13)$$

則在任一角度水滴掉落時的半徑爲

$$R_c=\sqrt{\frac{6T}{\rho g}\left(\frac{\sin\theta}{2-3\cos\theta+\cos^3\theta}\right)} \tag{14}$$

掉落時表面張力會將水滴拉成近似球形，因此在空中的水滴半徑 r 為

$$\frac{4\pi r^3}{3}=\frac{4\pi R_c^3}{3}f(\theta)$$

所以

$$r=R_c f(\theta)^{1/3} \tag{15}$$

若要驗證上式假設是否合理，我們可以實際求值來和自然界中的雨滴比較。自然界中的雨滴所能承受的的最大半徑為 $4mm$，如果超過便破碎成小水滴了。利用(14)式當水滴呈半圓球形落下，也就是說角度 $\theta=90^\circ$ 時，在室溫 $25^\circ C$ 水的表面張力為 $72\times10^{-3}\,N/m$， ρ 用 $10^3\,kg/m^3$，$g=10\,m/s^2$ 代入。則

$$R_c=\sqrt{\frac{6\times72\times10^{-3}}{10^3\times10}\left(\frac{\sin90^\circ}{2-3\cos90^\circ+\cos^3 90^\circ}\right)}$$
$$=4.65mm$$

所以水滴的半徑 r 為

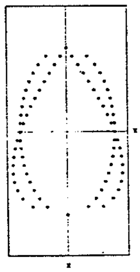
$$r=4.65mm\times f(90^\circ)^{1/3}$$
$$=4.65mm\times(0.5)^{1/3}$$
$$\cong3.7mm$$

果然是在最大承受半徑以下，因此可知我們上述的簡單想法是正確的。

依據上面的描述，雨滴由小變大的過程中，形狀由完美的圓球形轉變成橢圓球形，再漸漸成為底部扁平的饅頭狀。因此用來描述雨滴形狀的式子可以由一個橢圓方程式開始著手（只看橫切面的話），再套用其他的函數修正。在 1982 年，P.K. Wang 提出了下列的描述式，

$$x=\pm a\sqrt{1-\frac{z^2}{c^2}}\cos^{-1}\left(\frac{z}{\lambda c}\right)$$

x 和 z 代表水平和垂直座標，此式是由一個橢圓函數 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$ 和一個反餘弦函數轉變而來。λ 是用來調整錐形體的尖銳度，當 $\lambda=1$ 時最為尖銳，當 $\lambda\to\infty$ 時則變成橢圓，如圖四。圖中黑點構成的圖形即為 $\lambda=1$ 的情況，圖形接近淚珠形，$\lambda=1000$ 為白點所構成的圖，較接近橢圓。橫刻度為水平座標，間隔為 1 單位，縱刻度為垂直座標，間隔為 0.5 單位，選用的 a 、 c 值為了簡便，選取為 2 和 1。這亦可以用來模擬水滴和冰雹的形狀，用上式也可以計算出錐形體的各個物理量，如截面積、總表面積和體積(P.K. Wang,1995)。



圖四

黑點為$\lambda=1$時所繪出的雨滴切面形狀，此時錐形體最為尖銳；
白點為$\lambda=1000$時所繪的切面形狀，較接近橢圓。

§總結

在雨滴成核過程，臨界半徑的取值也和飽和蒸氣壓有關，這與薄膜成核過程的情形很相似，事實上雨滴成核的理論可以用薄膜形成的理論來說明，在薄膜物理中我們可利用壓力的調控來決定薄膜的長成，薄膜成核本身也和接觸面的表面性質息息相關，在不同的接觸面中單位面積的表面自由能將不同，所對應的達到臨界半徑所需改變的能量也將不同，因此介面的選取將是重要的關鍵。

在雨滴的形成中和成核理論相似，只是雨滴的成分並不唯一，以及雨滴處於和空氣的相對運動中，受到周圍的氣流影響和溫層改變甚遽，因此實際的雨滴運動並不像實驗室中的水滴下落來得簡單，而是複雜很多。不過經由實驗室的測量和觀察將可近似地了解到雨滴形成的基本模式，再和所觀測的氣象資料比對，便可得出有用的經驗公式。不僅是雨滴，對其他的現象如下雪和冰雹也有相近的成因，而這將是人類對變化莫測的天氣了解的第一步。

誌謝

本文承蒙清華大學物理系張石麟教授的指導，特予誌謝。

§參考資料

1.Paul E.Wagner Gabor Vali (Eds.)(1998): Atomspheric Aerosols and Nucleation. Proceedings, Wien.

2.陳國平主編(1993)：薄膜物理與技術。中國：東南大學出版社。

3.王寶貫(1997)：雲物理學。台北：國立編譯館主編，渤海堂文化公司印行。

4.Wang, P. K.(1982): J.Atoms. Sci., 39, 2615-2622

5.Wang, P. K.(1995): Preprints Conf. Cloud Physics, Dallas, Texas, 434.