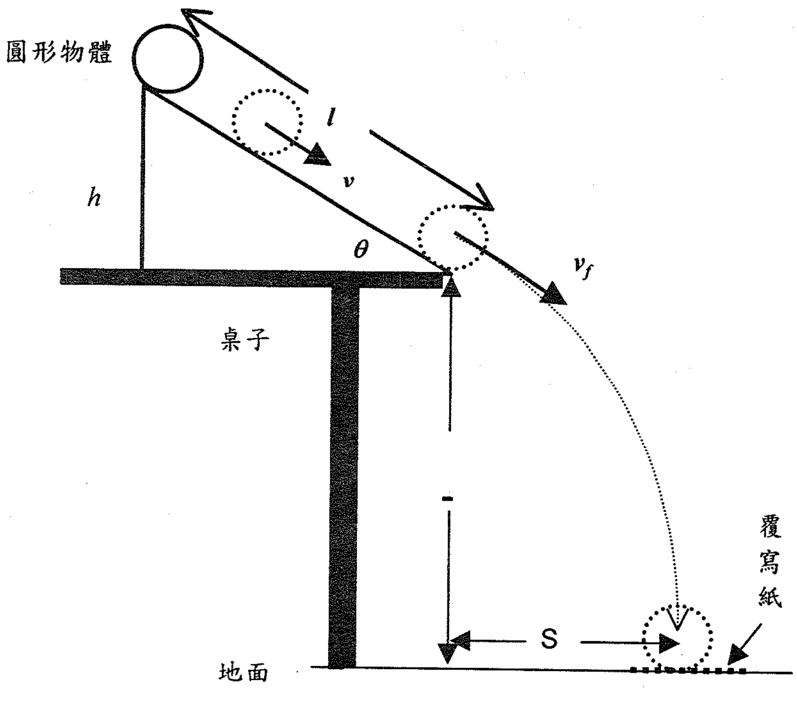
斜面上的滾動實驗

賈至達　吳采蓉　徐意娟
國立臺灣師範大學　物理系

許多普通物理課本在講述轉動的例題中，常出現求算圓形物體由斜面下滑後的末速度[參考資料一]，圓形的物體包括實心圓球，圓柱和圓環等。在純滾動的條件下，經由能量守恆理論計算的結果，我們知道：由同一斜面高度下滑的圓形物體中，實心圓球下滑到斜面底端時速率最大，圓柱次之，而圓環的末速最小。這是因爲這些物體的幾何形狀不同，使得具有不同的轉動慣量（I），因此下滑後的轉動動能在總動能中所佔有的比例不同，也就使得圓球相較圓柱、圓環快滾到斜面的底端。「*圓球相較圓柱、圓環快滾到斜面的底端*」的結果也很容易由設計簡單的實驗觀察中得到證實。如圖一所示，我們在桌邊設立一個斜面，將實心圓球、圓柱及圓環放在斜面上相同高度將其釋放，記錄它們離開斜面後，落在地面上的位置，即可以測得圖一中的距離 S。實驗會發現圓環落下的位置離桌沿最近，而圓球最遠，因而驗證了實心圓球滾到斜面底端時速率最大，圓柱次之，而圓環最小。



圖一　將一個斜面置於桌邊，圓形物體由斜面滾下並掉落在地面。

圓形物體由斜面滾下，很明顯地與轉動動能和移動動能的問題相關。在討論一個物體的轉動時，我們通常會定義一個物理量就是轉動慣量 I。對於任何一個圓形物體而言，其相對於質心轉動的轉動慣量（I）是可以算出來的，而且是一個定值。一般可以將圓形物體的轉動慣量 I 寫成 $I = KmR^2$，其中 K 是一個常數。我們定義 K 爲幾何常數，對圓環而言 K=1，圓柱的 K 值爲 0.5（或$\frac{1}{2}$），實心圓球的 K 值等於 0.4（或$\frac{2}{5}$）。由於圓球、圓柱和圓環的幾何形狀不同，即使它們的質量、半徑都相同，但它們的轉動慣動並不會相等，所以它們在斜面上的運動過程中，轉動動能與移動動能的比例也不會相同，因而造成所觀察到的現象的發生。上述的討論我們可以知道轉動慣量是造成圓形物體在斜面上運動速度不同的主要原因，所以由斜面下滑實驗是可以很容易定性地測出物體轉動慣量特性上的差異，但是定量的測量是否與就如我們所想像的一樣呢？

由於圓形物體的斜面滾動實驗非常容易進行，也因此常在各區高級中學物理學科能力競賽中[參考資料二、三]，甚至是全國的學科能力競賽中[參考資料四]，都會發現類似的實驗試題。在美國物理教師協會(AAPT)的期刊；"*The Physics Teacher*"中也可以找到相關實驗設計的論文[參考資料五、六和七]。這些教學論文和試題都是討論圓形物體在斜面上的運動。在假設純滾動的前提下，其討論的重心先由討論能量守恆觀念出發，最後是測量圓形物體的轉動慣量，I（$I = KmR^2$）， 或者是幾何常數 K 值。這樣的問題聽起來好像很簡單，因爲實驗設計非常容易，而所需的器材也很容易取得，也許這就是爲什麼類似的題目與論文一再地出現的原因；但是問題真的就像教科書所描述的這樣簡單容易嗎？在 Taylor 和 Noll 的論文中[參考資料七]，他們爲了固定剛球滾動的路徑，將斜面改成爲傾斜軌道的實驗方法測量實心剛球的幾何常數 K 值。Taylor 和 Noll 所測得實心圓球的幾何常數 K，隨著斜面的傾角增加而變小，甚至在傾角大於 60°時，K 值竟然會小於 0！這與 K 值是一個常數的理論計算結果是相互違背的！這到底實驗發生了什麼問題！？而使得實驗與理論有著如此大的差異呢？我們依照上述的參考資料，重新進行實驗測量，並將許多問題加以釐清。以下我們將實驗的結果和心得討論呈現給各位，並與諸位一同分享。

首先讓我們從理論上分析圓形物體在斜面上的運動情形。斜面運動的動能可以分成質心平移和相對質心轉動兩個部份。圓形物體會在斜面上發生滾動的現象，主要是因爲斜面上有摩擦力，而存在在斜面上的摩擦力會使物體受到力矩作用而發生轉動，這部份的討論在普物課本上常出現[參考資料一]。在假設純滾動的條件下，透過能量守恆定律（參見公式一），圓形物體滾到斜面底端時的速率僅與物體的幾何常數 K 和斜面的高度 h 相關；推算的過程如下兩式所示：

$$mgh=\frac{1}{2}mv_f^2+\frac{1}{2}I\omega_f^2=\frac{1}{2}mv_f^2+\frac{1}{2}KmR^2\omega_f^2 \qquad \text{（公式一）}$$

其中 v_f、ω_f 爲滾到斜面底端的末速（見圖一）與所對應的轉動角速度，m、R 爲圓形物體的質量和半徑。根據純滾動的條件：$R\omega_f=v_f$，可以得到公式二

$$v_f=\sqrt{\frac{2gh}{1+K}} \qquad \text{（公式二）}$$

很明顯地，在能量守恆和純滾動的假設下才可以導出上式。公式二說明了當高度固定時，v_f 僅與幾何常數 K 值有關，所以定性的實驗會發現圓環落下的位置離桌沿最近，而圓球最遠。在定量的討論上，由公式二知道實驗上只需要測量出圓形物體滾到斜面底端的速度，即可推算得幾何常數 K 值，進而可以求得轉動慣量 I。然而要從實驗上測量 v_f 並不會太難，我們的實驗設計的裝置如圖一所示，將一個平滑的斜面置於一高度爲 H 桌子的桌沿，同時依照參考資料六所描述的方法，利用覆寫紙記錄圓形物體落地的位置，如此可以輕易測量 S（桌沿與落地點間的距離）。假設物體離開斜面到落地的時間爲 t，由拋體的公式知道桌面高度爲 $H=v_f\,sin\theta\cdot t+\frac{1}{2}gt^2$，又落地的距離 $S=v_f\,cos\theta\cdot t$，兩式消去 t 後可以得到下式：

$$H=v_f\,sin\theta\cdot\frac{S}{v_f\,cos\theta}+\frac{1}{2}g\cdot\frac{S^2}{v_f^2\,cos^2\theta}=S\cdot tan\theta+\frac{1}{2}g\cdot\frac{S^2}{v_f^2\,cos^2\theta} \qquad \text{（公式三）}$$

將上式稍做整理，可以發現 v_f 僅與 H、S 和 θ 相關，即

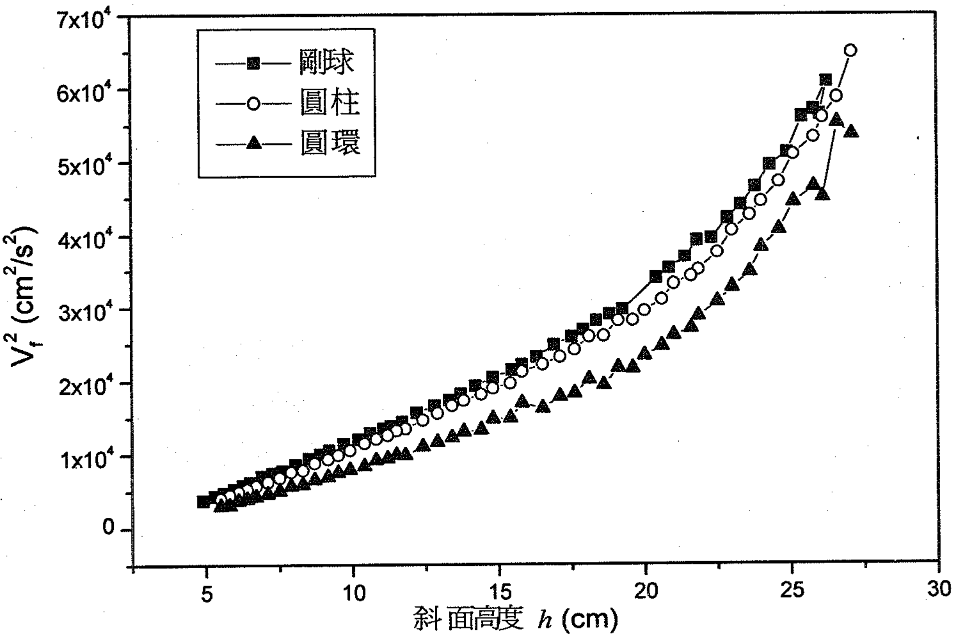
$$v_f^2=\frac{g}{2(H-S\,tan\theta)}\cdot\frac{S^2}{cos^2\theta} \qquad \text{（公式四）}$$

而且斜面傾角是爲 $\theta=sin^{-1}\frac{h}{l}$，$l$ 是斜面的長度；所以公式四可以用以測量 v_f，而所得到的結果與公式二做比對就可以求得幾何常數 K 了。圖二是我們以一平面木板作爲斜面的實驗結果；圖中所顯示的是以公式四所算得的 v_f^2 與斜面高度 h 作圖。很明顯地，在任一斜面高度 h，剛球的速率都是最大，圓柱次之，而圓環則是最小；這樣的結果似乎是符合前述的理論結果。

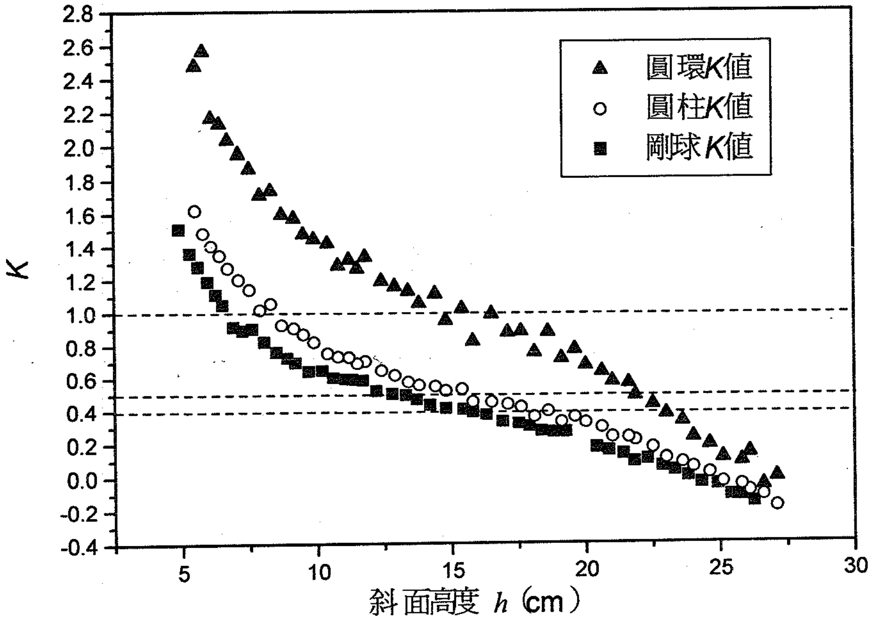
接著利用實驗測得的 v_f^2 值（即圖二中的值）代入公式二即算出幾何常數 K 值，即公式五：

$$K=\frac{2gh}{v_f^2}-1 \qquad \text{（公式五）}$$

將 K 值對斜面高度 h 作圖，如圖三所示。在同一斜面高度 h，由公式五所求得的圓環 K 值最大，圓柱 K 值次之，而剛球的 K 值是最小的。圖中三條水平虛線表示著圓環，圓柱和剛球的真實 K 值，各爲 1、0.5 和 0.4。

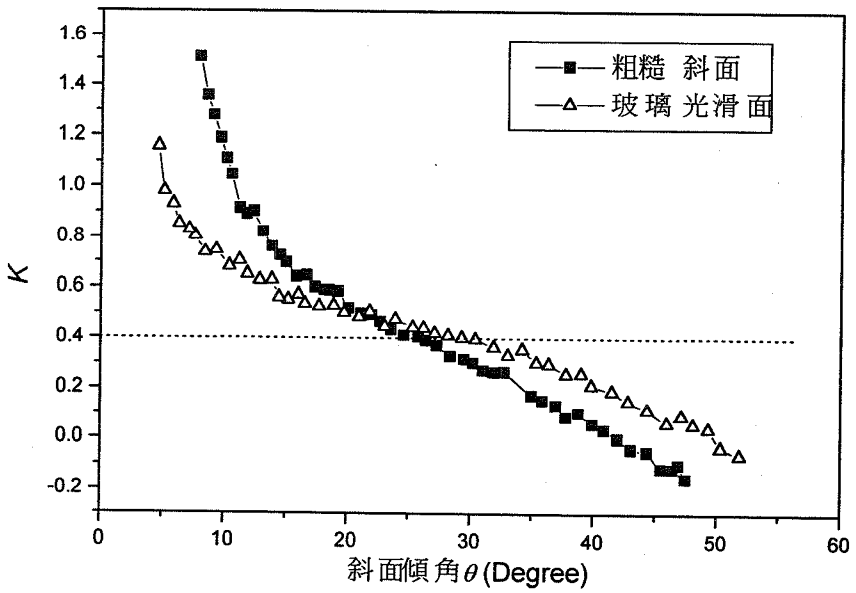


圖二　以一平面木板作為斜面，v_f^2 與斜面高度 h 作圖。



圖三　以一平面木板作為斜面，K 值與斜面高度 h 作圖。虛線表示真實值。

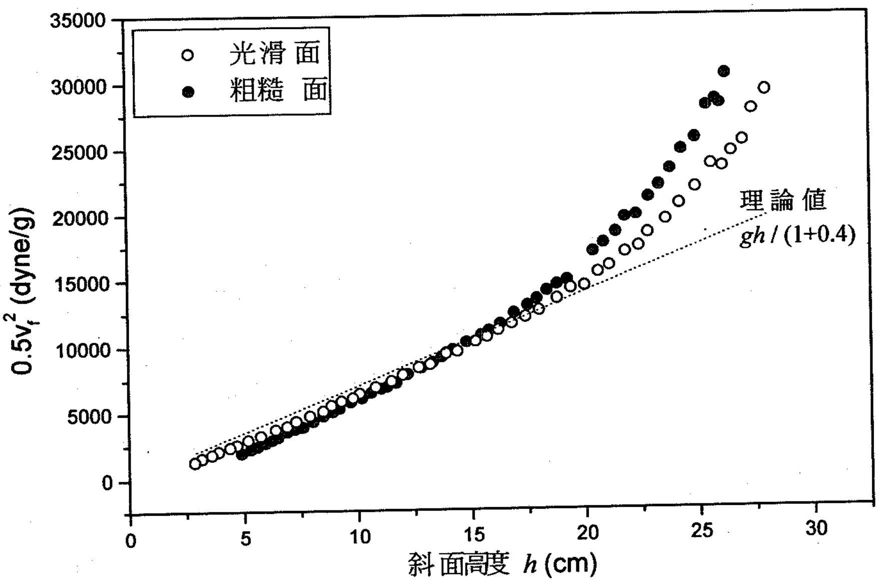
圖三中顯示實驗的結果，K 值是一條平滑曲線，與水平線相差甚遠。除了在適當的斜面高度範圍（約 10 到 20 公分），實驗所得的 K 值還可以勉強接受，高度 h 太大或太小時，實驗所得的 K 值相差太遠，而且會有負值產生！這樣的結果與 Taylor 和 Noll（參考資料七）所測得實心圓球的幾何常數 K 值相似。人們很容易認為是因為木板面較粗糙，因而造成實驗值與理論值相差太遠的情況產生；因為前述的理論是考慮純滾動與能量守恆所得的結果，並不考慮因摩擦而產生的能量損失。我們改以比較光滑的玻璃作為斜面，以剛球進行實驗，將其實驗結果與木板面實驗結果所測的 K 值對傾角 θ 作圖，其結果如圖四所示。圖四中明白地顯示出粗糙面與光滑面所測得 K 值的差異；但是同樣地，在斜面傾角 θ 約在 10° 到 40° 範圍內，平滑面所得到的 K 值較接近真實值（即水平虛線）。角度太大或太小時，木板斜面與玻璃斜面所測之 K 值變化的趨勢相仿。由圖四的結果，我們知道進行圓形物體沿著斜面下滑實驗時，摩擦所造成的能量損耗是不可忽略的（但是傾角太大或太小時的情形又如何解釋呢？）。公式一中所表示的能量守恆應該要考慮摩擦的損耗，但是摩擦所造成的能量損失是多少呢？讓我們用圖五來探討這個問題。



圖四 已同材質作為不斜面，剛球的實驗 K 值與斜面傾角 θ 作圖。虛線表示理論值。

圖五是以 $\frac{1}{2}v_f^2$ 對斜面高度 h 作圖，$\frac{1}{2}v_f^2$ 的值是由公式四求得的實驗值，也可以視為剛

球的移動動能除以質量，即 $\frac{\frac{1}{2}mv_f^2}{m}$，或許稱爲每單位質量的移動動能。圖五中的虛線表示在無摩擦且滾動的條件下，以真實 K 值爲 0.4 所算得的結果；也就是公式二中的 K 爲 0.4 所得的結果。當 h 大於 15 公分、或傾角大於 30° 時，圓形物體由斜面下滑以非純滾動的形式，所以純滾動的形式並不適用，但是圖五中實驗的結果仍是以純滾動的條件（即公式二）計算，故推算的 K 值偏離真實值是可以理解的。因爲未達成純滾動，所以 $R\omega_f$ 是小於 v_f，因而造成 K 值較真實值小的情況。也就是說存在一個臨界角，當傾角 θ 大於臨界角時，剛球在斜面上「又滾又滑」。在小於此臨界角時，雖然摩擦損耗仍然存在，但是物體是以比較接近純滾動的方式運動，此結果可以參考資料三的問題解答。圖五中，在斜面高度 h 小於 15 公分（傾角 θ 小於 30°）時，粗糙面和光滑面實驗所得的單位質量移動動能均小於虛線的理想值，且粗糙面損失的能量又比光滑面多，所以摩擦損耗確實是存在的。因爲摩差而產生的能量損失與斜面的粗糙程度有關，同時有和斜面的高度有關，故此理論問題較複雜，且超出本文欲討論的範圍，宜另闢文加以分析討論，在此並不詳加細述。不過可以確定的是，若考慮摩擦損耗而修改公式一，則實驗所得的幾何常數 K 值會和真實值較接近。



圖五　將剛球每單位質量的移動動能對斜面高度 h 作圖，虛線表示在無摩擦損耗純滾動的條件下，K＝0.4 的理論值。

雖然剛球由斜面滾下的過程中， 能量的損耗是難以用理論估計的，但是我們可以用圖五中的實驗數據和虛線的理論值進行電腦擬合，而找得移動動能損耗的經驗公式。由於大

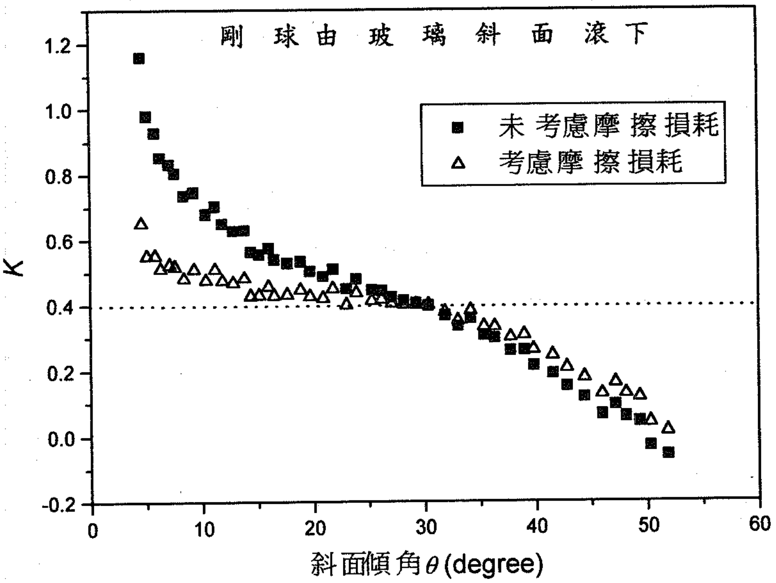
角度時的並不是純滾動的情形，所以我們僅用 h 小於 18 公分（傾角 θ 小於 40°）的實驗數據去擬合，而且僅用光滑面的數據（即○數據點）。在斜面高度小於 18 公分的範圍內，能量的損耗由圖五中計算出虛線和平滑表面實驗數據的差值得出，以高度 h 的多項式去擬合；我們得到在玻璃斜面上純滾動時能量的損失與斜面高度 h 的關係式為：$m\left(444+93h-6.6h^{2}\right)$。我們如此做的目的只是要確定：摩擦損耗是否是造成實驗值與真實值偏差的主因？將此結果代入能量守恆的公式一，我們可以推算得一 K 值的經驗公式適用於 h 小於 15 公分的範圍，

$$K=\frac{2\left(gh-444-93h+6.6h^{2}\right)}{v_f^{2}}-1 \text{，}\quad (\text{for } h<18 \text{ cm}) \qquad \text{（公式六）}$$

我們將剛球在玻璃面下滑的實驗數據，代入公式六，並與公式五所求得的 K 值繪於圖六作比較。在圖六中所顯示的結果，就是假設動能損耗與斜面高度 h 的二次方成正比，而求得扣除摩擦損耗後的 K 值（即圖中△的數據點）與未考慮摩擦的 K 值相比較（即圖中■的數據點）。

圖六的結果顯示，在考慮摩擦損耗的情況下，實驗幾何常數 K 值較接近真實值，但是在小角度時（小於 10 度）實驗推算值依然過大。即使是在臨界角（約 30°）以下，由公式六所得的 K 值也略大於真實值，可見得上述討論有缺失，仍然有部分能量的損失未加入考慮。

剛球在斜面上是由靜止開始釋放，所以在小於臨界角時，剛球釋放後要達到純滾動過程中，會又有滾動又有滑動（參考資料八），因而也會有能量的損失。在小傾角時（小於 10 度），剛球靜止釋放後到純滾動之前的這段時間內，必須要有摩擦力提供它轉動的力矩，但是摩擦力所做的功為負功，會損失一部份的總能量。如果斜面的角度 θ 越小，要達到純滾動所造成的能量損失佔總能量的比例大，則球滾至斜面末端的速率就比理想值略小。v_f 值偏小，再由公式五或六計算 K 值，則會使得實驗 K 值隨傾角 θ 減小而有增加的趨勢。這樣的結果，正如圖六之小角度部分的結果，斜面傾角越小，K 值越大。在略小於臨界角（約 30°）時，即在圖六中斜面高度 h 約為 9 至 18 公分（即斜面傾角 15° 到 30°）時，K 值接近 0.4，正是實心圓球的轉動慣量之理論值。雖然球由靜止釋放到純滾動的過程中仍有能量損失，但佔有於總能量比例較少，所以在斜面高度 h 介於 9 至 18 公分這範圍內，剛球的運動狀態應該可以視為「純滾動」，或是說比另外兩個範圍（即斜面高度 h 小於 9 公分和 h 大於 18 公分的兩個範圍）更接近純滾動運動。



圖六　剛球在玻璃光滑面下滑，考慮移動動能的摩擦損耗後的 K 值與未考慮損耗之 K 值相比較。虛線為真實值。

當角度大於臨界角後（大於 30 度），K 值會小於真實值 0.4，且傾角愈大，K 值愈小。這與參考資料七所得之結果類似。因爲傾角增加時，實心圓球的下滑力（$mg\sin\theta$）隨著角度的增加而變大。當傾角大於臨界角時，下滑力大於摩擦力而產生滑動。傾角越大，球的滑動現象更爲明顯。因爲實驗的設計只可以測量末速率 v_f，而且在純滾動的條件下，ω_f 是等於 v_f/R，但事實上因爲無法達到純滾動，所以 $R\omega_f$ 是小於 v_f，而造成 K 值過小的情形。

最後我們對於我們的實驗作一個簡單總結。在討論物體由斜面下滑或滾動的理論問題不勝枚舉，而且都非常有趣；例如 1998 年第二十九屆物理奧林匹亞的理論試題的第一題（參考資料九），就是討論一個六角柱剛體在斜面上滾動。這些理論結果多半不考慮摩擦損耗，然而斜面上一定要有摩擦力（因爲要滾動）；所以在實驗上定量的證實理論較爲不易。爲了要讓摩擦損耗減少，可以用平滑的斜面，但是又一定要有摩擦存在否則物體不會滾動。當然也可以用滑軌取代斜面進行實驗，如參考資料五、七所述，但僅有剛球才可以適用軌道。無論使用何種型式的斜面，許多實驗測量只是測斜面底端時的速率 v_f，而無法測量轉動的角速率 ω_f。若能夠同時也測量角速率 ω_f，則可以對公式一加以修正，則所得到的數據應可以更接近理論值。當然實驗上測量角速率 ω_f 是一項挑戰，但也絕非不可能。另外剛球

靜止斜面上開始下滑到純滾動運動之間，其能量損耗應可以用理論計算，這也是一個有趣、且也可以給學生練習的好問題。雖然我們的實驗設計仍有缺失，在定量上不是很完美，不過，不容否認的，文章內所描述的的是一個非常容易執行的實驗，且有關轉動現象的定性描述，例如能量守恆的討論，也可以定性的證實圓柱、圓環和剛球的轉動慣量大小的順序；或是定量測量圓形物體的轉動慣量等，都可以用這樣的實驗加以證實。基本上我們建議在課堂上討論轉動慣量的時候，是可以演示上述的實驗給學生看，或由學生自形實際操作也可以，對學生瞭解基礎轉動現象應是有所助益。

參考資料

1.例如:"*Fundamentals of Physics*", 5th edition, D. Halliday, R. Resbuck and J. Walker, p. 272-274. "*Physics*", 3rd edition, R. Wolfson and J. M. Pasachoff, p.302-304.

2.八十五學年度台灣省東部地區數學與自然科能力競賽，物理科實驗試題。

3.八十八學年度台灣省第二區數學與自然科能力競賽，物理科實驗試題。

4.八十六學年度全國數學與自然科能力競賽，物理科實驗試題。

5.Alan Cromer, *Phys. Teach.*, 34, 48 (1996).

6.Jaime R. Taylor, Auther W. Carpenter, and Patrick H. Bunton, *Phys. Teach.*, 35, 146 (1997).

7.Rebecca Taylor and Ellis D. Noll, *Phys. Teach.*, 36, 115 (1998).

8.R. Resnick and D. Halliday, "Fundamentals of Physics" 1st ed. (Wiley, New York) Chap 12, Problem 20.

9.第二十九屆國際物理奧林匹亞競賽試題，林明瑞教授翻譯彙編。