現職教師對教導數學歸納法意見初探

朱綺鴻　譚克平
國立臺灣師範大學　科學教育研究所

摘要

本研究的目的在於探究現職數學教師對教導數學歸納法的意見。研究對象為台北區公私立高中數學教師，研究以問卷調查的方式進行，問卷的設計則參考相關文獻、高中教師以及專家的意見而成，共分為對課程安排的建議、對數學歸納法的內容知識、及對學生學習該法的困難的了解等三個層面進行探討。調查結果發現大部份教師對學生學習該法時所遭遇的困難有所了解，並可估計出過去所教過的學生中，其對數學歸納法之了解的程度。這些資料顯示出數學歸納法對高一學生有若干程度上的困難。此外，教師們對該法的內容知識亦有一定程度的掌握，惟有部份教師對歸納法與數學歸納法之間的差別有所混淆，且在符號表徵與推導步驟上的用詞上有欠嚴謹的情況。最後整合研究之結果與文獻的意見，為教師及教材編寫者提供一些教導該法的建議。

關鍵詞：數學歸納法、自然數良序性、數學教學、類比、臆測、學習困難

壹、緒論

數學歸納法是用來證明一個敘述對所有自然數皆為真的證明技巧(Baker, 1996; Gerstein, 1996; Hirschfelder, 1991; Solow, 1990; Van-Dyke, 1995)。數學歸納法的用途很廣，常用於證明數學的種種定理，也常被應用到工程或計算機理論上(Baker, 1996)。此外，Avital & Libeskind (1978)指出有許多的數學問題都與自然數有關，若能增加對數學歸納法的了解，對數學思維將有所助益。世界各國大多將其納入高中課程之中。Lowenthal & Eisenberg (1992)曾探討該法在課程中的地位，認為它潛藏著數學、教學以及哲學的問題。Movshovitz-Hadar (1993)借用 Henkin (1961)的見解，指出數學歸納法反映出人類的思維有超越環境侷限的能力，從而提出應將其視為課程中不可或缺的部份。美國 NCTM (1989)的《學校課程與評鑑標準》(Curriculum and Evaluation Standards for School Mathematics)也將數學歸納法列為重要的證明方法之一，並包括應用到級數以外的其它情境。

雖然一般課堂通常只教第一型數學歸納法，但學生在學習上仍有許多困難，部份原因

可能與教導方式有關。一般教師在呈現該法的步驟之後，通常以證明「級數和的公式」作爲示範，其後再給學生一些練習題，以熟練所教過的技巧(Word,1988)。由於所教的多是如何使用數學歸納法的形式與步驟，故學生對該法的瞭解只侷限於行爲技能方面，對其概念欠深入的瞭解(Avital & Hansen, 1976; Baker, 1996; Ernest, 1984)。易言之，學生並不瞭解數學歸納法的原理，學到的只是一些套裝的(encapsulated)程序性知識，認爲只要依照證明的格式，依樣畫葫蘆便能完成證明，也不瞭解爲什麼只驗證兩個步驟皆成立，就可以說對所有的自然數都成立。

文獻中指出，多數的學生第一次接觸到數學歸納法是在級數和公式的證明，這雖然是該法重要的應用，卻也導致學生對應用到其它情境的陌生(Smith,1993)。在台灣也有類似的情況，數學歸納法被安排在「數列與級數」這一章之中，例題與習題主要也是與數列級數或倍數有關的問題。

許多研究者都同意數學歸納法不但不易教導亦難於瞭解(Pinker,1976; Van-Dyke,1995)。究其原因何在？Dubinsky(1991)及國外其他學者曾提出如下值得深思的問題，例如：學生是否瞭解爲什麼要有這樣的過程？如何幫助學生學習？學習困難有哪些？什麼因素造成這些學習困難？課程應如何安排等？本文是一系列探討教導與學習數學歸納法現況的部份研究報告，著重點在於根據 Dubinsky 等人所提出的研究方向，以問卷的方式探討教師對教導數學歸納法所需具備相關知識的了解程度，包括教材內容、教材安排、例題、以及對學習者的瞭解等層面，另一方面則想藉由徵詢教師教學經驗與意見，希望從中整理出一些資料，提供日後設計教學方法與教學活動、安排有利的學習情境、編寫教材時作爲參考的依據。

貳、研究方法

本研究以調查法爲主，以自編之問卷作爲調查工具，採不記名方式進行。

一、研究對象

本研究對象之選取，是根據台北市高中數學科輔導團所舉辦台北區高中數學新課程研習會名冊中所有高中數學教師選爲研究對象，以郵寄方式共寄發 472 份問卷，並隨函附上回郵信封。

回收的問卷來自於台北縣市十四所公私立高中，其中大學畢業 8 人、研究所四十學分班結業 24 人、碩士學位以上 11 人；數學本科系畢業 40 人、相關科系 3 人；由師範院校畢業 34 人、一般大學畢業 9 人。至於教學年資，其中位數爲 9 年，平均年資爲 11.8 年。

雖然回收有效問卷只有 43 份，回收率僅 9.11%，但是由於問卷回函來自於 14 所公私立高中，當中有 11 所位於北市之內，而目前台北市公私立高中共有 41 所，故回函的學校

佔全台北市總校數約四分之一左右。另一方面，按台北市教育局資訊室所提供的資料，本研究中的教師在任教年資的分佈百分比上，與全台北市所有高中在職教師年資的分佈百分比雷同，故本研究的教師在教學經驗上，約略相似於台北市的高中在職教師(參見表 1)。再者，本研究的問卷採匿名的方式進行，且過去並沒有類似的研究資料，故本研究的資料有參考價值。

表 1 本研究數學教師教學年資與台北市公私立高中在職教師教學年資分配表

教學年資	本研究數學教師任教年資	台北市公私立高中在職教師教學年資
	人數(百分比)	人數(百分比)
5 年以下	16(37.2)	1716(32.8)
6-10 年	8(18.6)	881(16.4)
11-15 年	6(13.9)	788(14.6)
15 年以上	13(30.2)	1949(36.2)
總　計	43(100.0)	5385(100.0)

另一方面，研究者曾在多次電話催覆的過程中得知，沒有回覆的原因眾多，例如有認為教學經驗為其個人擁有之智慧財產權而拒絕作答、填答問卷應由研究者付費、教育研究對實際教學並沒有幫助、以及因教學工作負擔沈重無暇填寫等等。這些都是研究者無法克服以提升回收率，故本研究是在許可的情況下所蒐集到的資料。

二、研究工具

本研究所使用之自編教師問卷，是根據多位學者(Avital & Hansen, 1976; Avital & Libeskind, 1978; Baker, 1996; Hirsch, 1976; Movshovitz-Hadar, 1993;Van-Dyke, 1995)對於數學歸納法教學研究的結果為理論依據，並與專家討論編製成問卷之初稿並經三次預試與修改，以開放性問題為主。全卷共分六個部份，即：個人基本資料、學科教學知識、學科內容知識、教師對學習者的瞭解、解題策略、經驗的分享等。

參、結果與討論

研究結果將依對課程安排的建議、數學歸納法的內容知識、及教師對學習者的了解等三部分來陳述。

一、教師對課程安排的建議

(一)數學歸納法教學的必要性與重要性

當被問到在高中階段，是否需要教數學歸納法時，有 39 位認為有需要，只有 2 人認為

不需要。可見大多數教師認爲在高中階段有需要教數學歸納法。

於填寫需要的理由並不多，且欠詳盡，例如：「能增加歸納、分析的思維能力」、「一種另類思考的模式」、「基本的證明方法之一」等。認爲不需要教數學歸納法的二位教師均沒有提出反對的理由。

當被問及數學歸納法的重要性時，「邏輯推理能力的訓練」與「培養歸納、找規則、臆測的能力」各被提及 9 次，「另一種重要的證明方法的介紹」有 6 次，「對有關自然數命題的檢驗、驗證」共 4 次，另有一位教師提到「在計算機程式設計上，遞迴型演算法即與數學歸納法有關」。概括來說，本研究中的教師覺得該法之重要性是在於能訓練邏輯與數學思維，以及證明方法之上。

(二)課程的安排

在課程的安排上，有 29 人認爲應安排在「高一」，4 人認爲應該安排在「高二」，3 人在「高三」，認爲「高一先教基礎，高三再深入」的有 2 人。據此資料，雖然大多數的教師認爲目前安排在高一是適當的，但仍有 9 人認爲將數學歸納法安排在高一教授稍嫌過早，且這 9 人當中有 5 人在高中教學的年資已超過十年以上，這點值得課程編排者留意。

在文獻上討論哪一個級別適合教數學歸納法，意見亦見分歧。例如 Blank(1963)認爲要九年級程度較好的學生才能夠學會大部份的內容，而 Avital & Libeskind(1978)則認爲六至七年級的學生即可學會蘊含關係的意義，數學歸納法則可在此時教導給學生，在 NCTM 的《學校課程與評鑑標準》中則將數學歸納法安排在 9-12 年級。由於看法不一，故可能須要對學生作實證性的研究，以判斷將該課題安排在哪一個級別比較適合。

(三)教材的選取

Blank (1963)指出使用適宜的例題與練習題來演示給學生看，除了可呈現數學歸納法的效用外，還能避免濫用或誤用的危險。但哪些例題才可歸類爲合適的呢？本研究中的教師有如下的意見：

針對初學數學歸納法的學生，教師們認爲較恰當的啓蒙教材中，除課本的例題外，課外的例題則包括「$1+3+5+\ldots+n+\ldots+5+3+1=n^2$」、「$1+3+5+\ldots+(2n-1)=n^2$」、「$3^{100}+4^{100}<5^{100}$」。此外，有教師認爲應該以「實際生活的例子」爲入門的教材，例如河內塔、九連環、骨牌、「要經過嘗試才能得出結果的例題」等較具體的例子作教材。從教育的觀點來說，例子可讓學生驗證命題的真實性，瞭解證明如何進行，以及作爲一個範本(template)引領學生辨認出證明的存在或實際上如何證明，與日常生活有關的推理將有助學生瞭解數學歸納法的思維，能用實例將更具說服力，讓學生對數學命題的真實性更具信心(Baker,1996)。廣泛來說，

透過例子學生會比較容易接受數學敘述的真實性，並瞭解其概念與定義(Moore,1990; Porteous,1990,引自 Baker,1996)。

綜合來說，教師們普遍希望教材能爲學生提供更多包括能由實際或操作經驗中學習的例子，這與文獻所提的意見吻合。

二、數學歸納法的內容知識

(一)數學歸納法原理的類型

當被詢及數學歸納法共有多少類型時，認爲只有一型的共 7 人，有兩型的共 19 人，認爲有三型或以上的共 15 人。根據這些教師的說明，包括「設 $1\le n\le k$ 成立→$n=k+1$ 成立」、「設 $n=k,n=k+1$ 時成立→$n=k+2$ 成立」、「當 $n=1,2,3\ldots,i$ 時成立，設當 $n=k$ 時成立→$n=k+i$ 時亦成立」、「雙重歸納法(Double induction)」、「倒退歸納法(Backward induction)」、「跳躍式再逆推，如算幾不等式之證明」、「翹翹板歸納法」等類型。有人則依題目來分爲：(1)基本型；(2)倍數型；(3)不等式型；(4)起點不是 1 等。基本上大多數的教師均認爲數學歸納法至少有兩種類型。

第一、二型的差異在於歸納假設的部份。第一型只用「若 $P(k)$爲真」這「一個」歸納假設，而第二型增強爲「若 $P(1),P(2),\ldots,P(k)$皆爲真」。由於它還假設了 $n=k$ 之前的每一個命題皆爲真，因此，有些研究者稱第二型爲強型(strong form)數學歸納法(Hirschfelder, 1991)，或完全數學歸納法(Kurtz, 1992; Hausner, 1992)。

根據文獻，不同作者對數學歸納法分類的方式亦不一致，除了上述兩種類型之外，尙存其它形式。Hausner (1992), Hirschfelder (1991), Kurtz (1992), Rosen (1995)等都將之分成二類，而 Blank (1963)分成三類，Gerstien (1996)則分成四類。雖然分類方式有別，但相同的是各種分類中都有一種形式等同於上述第二類型或其變型。第二型的價值在於能處理第一型所難於處理的題目(Blank,1963; Word,1988)，故第二型亦爲數學歸納法不可或缺的一部份。

但在高中階段，是否必需教第二型呢？回答「需要」的教師共 11 人，回答「不需要」的有 22 人，「沒有意見」的有 9 人。雖然第二型是重要的證明型式，但大多數的教師卻認爲在高中階段並不需要教。認爲「需要」的原因有：「有些題型需要」、「可增進思考能力」、「多了解數學歸納法的運用」等。而「不需要」的原因有：「站在簡化教材的立場沒有必要」、「學生容易搞錯或用背的方式來應付」、「高一學生在思考方面尙不足以應付」、「用處不大」、「大學聯考只考第一型，從未考過第二型」、「學第一型就夠用了」、「並非每個學生都需要有嚴格的數學訓練」等。「沒有意見」的教師中，有 4 人表示「不

知道何謂數學歸納法第二型」，這點值得留意。

觀上資料，雖然大多數教師認為在高中時並不需要教第二型，理由可能並非認為它不重要，而是覺得對高中生而言太難且無應用之處。

此外，實際有教導第二型的教師共 13 人，沒有教的共 20 人。實際上有教的原因為：「考試會考」、「學生有詢問」、「補充教材與模擬考均有出現」。實際上沒有教的原因有：「並非每個人都能吸收」、「時間有限」、「學生程度不好」等。

由此可知，教第二型的教師並不多，原因大都基於「考試會考」的因素，而實際上沒有教的理由似乎在於學生是否能接受的考量上。

總體而言，就數學證明之內容結構的完整性而言，是有必要教導第二型的數學歸納法，因為有些題目是要用到第二型才容易證明，此外還可讓程度較好的學生能練習判斷如何應用各種類型，使其思維更靈活更具彈性，而非只是機械地套用第一型的證明格式。但另一方面，如果教學對象的心智成熟度或理解程度上有所限制，則反而更易混淆，宜避免之。

(二)自然數的良序性

由於數學歸納法原理源於與 Peano 第五公設，故有需要討論數學歸納法與自然數良序性之間的關係。

根據調查，在實際教學中，「有」用自然數的良序性來教數學歸納法的教師有 22 人，「沒有」的共 15 人。據此，多數的教師主張應由自然數的良序性來教數學歸納法，其原因有：「因為採用數學歸納法證明的題目，本身就含有次序性、無窮性，而自然數恰含有這些特性」、「依數學發展史來說明、介紹自然數的良序性」、「因為這是數學歸納法的理論架構」等等。認為不必由良序性來教的理由包括：「學生程度不夠、無法吸收」、「高中不必這樣教」、以及「現行教材沒有提到」。

文獻中曾有研究提出，應使用自然數良序性來教數學歸納法，因為兩者是等價的，有助於學生對數學歸納法的瞭解(Avital & Libeskin,1978)；再者，自然數良序性在教學上有不同於數學歸納法原理的優點，可考慮作為另一個可行的選擇(Malcom,1974,引自 Hirsch,1976)。但 Ward (1972,引自 Hirsch,1976)卻提出不同的看法，其研究指出使用數學歸納法原理教導出來的學生的表現，顯著地優於使用自然數良序性教導出來的學生，似乎兩者互有優劣。

使用自然數的良序性導入數學歸納法是教學的另一種選擇，現行各版本的課本多未採用此種方式。若要採用此種方式，勢必要加入有關良序性的教材，但由於新課程標準中每週教學時數較過去更少，教師或教材編著者的取捨則更顯重要。

(三)數學歸納法的類比

類比推理是將分屬兩個不同知識領域的類比物與目標物，藉著彼此間部份結構的相似性，達到藉已知說明未知，以達成知識遷移的目的。用類比來教學的優點有：(1)可作概念改變之用，並能開啓新的知覺，(2)藉由相似性增加對抽象概念的了解，(3)讓抽象概念視覺化，(4)引起學生興趣，(5)幫助教師考量學生應具備何種先備知識，以免學生產生迷思概念。其缺點則包括：(1)如果類比物與目標物之間並不十分符合，則類比物之結構上的某些特徵，可能會被學生錯誤地移植到目標物而產生迷思概念，(2)類比的推論通常只發生於學生所偏好的類比物上，因此確認學生所偏好的類比物是很重要的（Duit,1991）。

正由於數學歸納法原理是基於自然數的良序性，而後者可以藉許多具有一連串反應現象的模型來類比說明，故此可藉適當的類比具體地幫助學生了解數學歸納法（Hirsch,1976）。例如，Gerstein (1996)提出的類比有： (1)傳染病的傳播，(2)在鱷魚潭中爬上從直昇機放下來的救生梯。另外，Ernest (1984)提出的有：(1)一步步往上爬階梯，(2)一個個往下傳遞信息的士兵，(3)一節節開始出發的火車，(4)一個公主進入一座所有房間都鎖住的皇宮，她只有第一個房間的鑰匙，而每個房間內都有下一個房間的鑰匙，(5)一長串因碰撞而一個個倒下的骨牌。在這些類比之中，骨牌是最常用到的，它與數學歸納法有如下的對應關係（見表 2）：

表 2　以骨牌類比數學歸納法特徵對照表

骨牌的表徵	數學歸納法與之對應的特徵
一個骨牌	一個自然數
骨牌線性排列	自然數的順序
骨牌倒下	自然數的性質
碰撞的效應	遞推階段
碰撞第一個骨牌	數學歸納法的奠基步驟

本研究的教師亦最常用骨牌來類比數學歸納法，共 18 人(41.9%)之多，其它還有火車、傳話、傳染病、傳球、連環車禍等等。這正支持上述 Ernest (1984)覺得骨牌是最通用的類比物的說法。

可是類比也可能讓學生產生迷思概念，Shreve(1963,引自 Pinker,1976)就覺得要爲數學歸納法找一個既直觀又易被接受的類比並不容易。從真實情境中所取的類比，其直觀性往往是有限的，但數學歸納法是可跨越到無限的原理與方法。Pinker(1976)更察覺到通常較好

的學生比較會在直觀上無法接受這樣的類比，例如在骨牌的類比中，必須注意到骨牌的數目是有限的，而自然數是無限的，故兩者間的相似性只達到某一程度。教師宜在課堂中指出各類比物的侷限性，適當地指引學生留意類比關係的深層結構。

(四)歸納法與數學歸納法的區別

Pinker (1976)與 Ernest (1984)均指出在學習數學歸納法的過程中，學生會產生的迷思概念之一就是在「歸納法」這個用詞上的混淆。由於用詞相近，學生在非形式的學習中並不容易區分。Shaw (1978)的文章中更點出學生如果在此一用詞上有所混淆，將會產生若干程度上思緒的混亂。NCTM 的《學校課程與評鑑標準》中也特別指出應避免將數學歸納法一詞與歸納推理混淆。

除此之外，按筆者之經驗，有些學生會覺得既然從觀察中已經歸納出一些公式，那爲什麼還要用數學歸納法來做出證明，這困惑正是因爲他們不了解歸納法與數學歸納法在功用上不同之故，因此在教學中甚有需要明確向學生說明。

反觀在本問卷調查中，表示「會」刻意強調兩者之間的關連與區別的教師有 17 人，「不會」的有 18 人。認爲「會」強調的原因是：「數學歸納法需要先用一般歸納法求出一些猜想」、「這是一個很基本的問題，值得跟學生討論」、「應特別說明數學歸納法是將歸納的結果證明，本身並不是歸納法」、「有助於數學歸納法的了解」等等。認爲「不會」強調的原因則有：「不曾嘗試過」、「強調數學歸納法的有效性是比較重要的」。由於只有半數以下的教師會去強調兩者之間的關連與區別，似乎有必要在教材中特別釐清。

(五)歸納與臆測

Blank (1963)認爲由觀察有限個事實，從而形成一般化假說的能力是數學家具有創造力的重要指標之一，而另一個與之相當的能力就是去證明這個臆測是否正確。在教學中要呈現如何由有限個事實進行臆測，最好的方法就是舉例說明。

一般教科書中所用到數學歸納法的問題都是像「試證：左式=右式 成立」的形式，可是這些公式爲何成立？如何得知這些公式？這些對學生來說都是一個謎(華羅庚,1972; Avital & Hansen,1976; Avital & Libeskind,1978; Blank,1963)，而教科書也沒有交代等號的右邊是如何得到的。Blank(1963)更指出一般人並不容易臆測公式，且臆測的方法很多，不能只套用一兩個固定的方法，要靠經驗來引導。這方面明確的教導是十分重要的，如果讓學生有機會發現等式的由來，將有助於對數學歸納法的了解(Hirsch,1976)。

本研究共有 23 位教師表示實際上會教到等式右邊的由來，雖然沒有人明確表示不會教，但卻有 19 人表示不一定會教到。表示會教到的原因可分爲：(1)依觀察歸納的角度：「這就

是歸納」、「觀察→歸納→猜測→證明」、「數學公式由觀察而來不能無中生有」；(2)依教學的角度：「不教這個便不能指出數學的精神（猜測→形成假設→證明）」、「學生會不明白爲什麼要證明」；(3)依考試、解題技巧的角度：「證明或代入數値」、「右邊是解題技巧所關心的事」、「考試常設計成題組的形式，例如①$1\cdot2+2\cdot3+3\cdot4+\ldots+n(n+1)=?$②試以數學歸納法證明之」。表示「不一定」的原因大都是視情況而定，例如：「依題目而定」、「如果學生能力夠的話」、「時間不足」、「視問題與上課進度而定」、「簡易的才介紹」，另外有一位教師則表示「有些連自己也不是很清楚」。

當被問及是否覺得有需要教等號右邊時，有 29 人表示有需要，有 4 人覺得不需要，但卻沒有人說明理由。

教師們對於應該如何教等號右邊，也提出教學上的建議：「由觀察、歸納、找出規律、猜測、證明」、「先導出公式再證明」、「以演繹法推論出結果」、「由不完全歸納引出」、「直接將結果導出，讓學生知道」等。按 NCTM 的《學校課程與評鑑標準》，亦建議應該讓學生有藉由形成臆測將特例一般化的經驗。綜合來說，教科書的編寫宜加以配合，不要讓學生只是在套用證明的格式。

(六)數學歸納法的概念

Pinker (1976)的研究發現學生不易瞭解歸納步驟裡 P(k)→P(k+1)中 k 這個指標(index)的角色，學生也會質疑：「如果 k 是任意特定的正整數，則 P(k)爲真這個假設，就等同於結論的本身，就沒什麼好證了。」顯示出學生對 k 的概念的混淆。

本研究中，教師的意見也相仿，認爲應該常提醒學生注意的概念包括「數學歸納法的兩個步驟缺一不可」、「n=1 是檢驗，n=k→n=k+1 是推理過程」、「n=1,n=2,n=3,...都對，並不一定對，一定要證明」、「n=k 只要假設就可以了，n=k+1 需要證明」、「n=k+1 的推演必須用到前面 n=k 的假設」等。上述多次提到有關歸納步驟中 k 的角色，似乎教師們也覺得這是對學生較易混淆的概念，教材設計中宜多加解釋其意義。

三、教師對學習者的了解

(一)學生對數學歸納法的了解

本研究教師估計在所教過的學生之中，平均只有 38%瞭解數學歸納法的本質；另 61%則只是有機械性的了解。換句話說，根據教師過去的經驗，大多數的學生在學習數學歸納法時，偏向機械式的學習，並未真正了解其本質。再者，教師們覺得在所教過的學生之中，平均只有 43%能正確解釋數學歸納法的原理，似乎教師們對其教學效果並不樂觀，學生在學習之後，只有低於半數能夠正確解釋其原理。教師們還覺得平均僅 31%的學生能掌握數

學歸納法並提出一個具備結構的證明，其他 54%的學生只對數學歸納法呈片斷性的瞭解，由於能掌握者的百分比相當的低，故非常值得數學教育工作者留意。

相對來說，Avital & Hansen (1976)與 Ernest (1984)等研究者亦指出許多學生並不瞭解數學歸納法的概念與證明的技能。由於大多數的學生在學習時，把重點放在它的格式與程序，而忽略了概念性知識的理解(Baker,1996)，故學到的只是程序性知識，認爲只要模仿證明的格式，便能完成證明，卻不了解它的概念結構。

綜上資料，本研究教師的看法與文獻相符，可見數學歸納法對高一學生來說頗爲困難，且與教師普遍覺得該法可以在高一教導不太一致。因此，教師在教學時應該多強調其整體結構與精神，避免只流於技巧的傳授，以及提醒學生不要只是強記片斷的知識。

(二)解題技巧

依據教師所提供教導解題技巧的意見中，與不等式有關的被多次提到，例如：「不等式的證明可以用相減的方法」之類，其次爲「要能看出 P(k+1)與 P(k)的關係」，例如：「先假設 n=k 時，$a_1+a_2+...+a_k=f(k)$成立，則當 n=k+1 時，$a_1+a_2+...+a_k+a_{k+1}=f(k)+a_{k+1}$，再化簡到 f(k+1)也成立」，「硬湊成題目需要的形式」，其它值得一提的還有「n=k+1 所得的結論，不妨先列在計算紙上，再以其爲模式參考，進行證明，如此比較有方向感」。此部份教師提供的建議，雖較爲籠統，然教材編寫者亦宜加以留意，並參考文獻（如 Avital & Hansen, 1978 等）從而增加解題技巧的傳授。

(四)學習者的困難

Avital & Libeskind (1978)認爲學生作數學歸納法證明的困難可區分爲概念、數學以及技巧的困難等三類。在概念方面有：(1)學生無法理解爲什麼 P(k)是假設的，又不知道它是否爲真，如何用來證明 P(k+1)爲真？(2)學生無法了解由 P(k)→P(k+1)其實包含了無限多個蘊含(implication)的關係。在數學方面，應注意有些敘述成立的最小正整數值不是 1，例如證明「$k\geq5, 2^k>k^2$」，必須在 k≥5 的情況下 P(k)→P(k+1)的蘊含關係才能成立。至於技能方面有：(1)學生通常會認爲 P(k)→P(k+1)的步驟比較重要而忽略了檢驗 P(1)時是否成立，應強調兩個步驟缺一不可，(2)學生在由 P(k)→P(k+1)的過程中有代數運算上的困難，解決方法之一爲利用目標導向的方式，先寫出欲得到的目標，再逆推回去。

Ernest (1984)對困難的歸類也相仿，分爲概念與行爲技能兩方面。Baker (1996)曾從過程、概念與應用等三類知識來探究大學與高中生對數學歸納法證明的瞭解，結果發現他們在過程與概念上都有明顯的困難，而困難最基本的來源爲缺乏數學內容知識。綜上所述，過去的研究均指出學習的困難包括了內容概念與過程技能兩個層面。

本研究的資料中，在概念方面，有 7 位教師認爲學生的學習困難在於：「不瞭解數學歸納法的意義或精神」（例如：不知道數學歸納法的用途與使用時機、爲什麼每個步驟缺一不可），另有一位教師指出「以爲最小的 n 值，一定是由 n=1 開始」。至於在過程技能方面，有 7 位教師認爲困難在於「由 n=k→n=k+1 困難重重，不易看出兩者的關係或對某些複雜的計算、技巧有困難」，另有 3 人認爲是在於「無法依照數學歸納法的格式寫出證明」。

如何克服這些學習困難？有 7 位教師認爲可「多看題型、多練習」，有 4 位認爲應該「簡化題目，才能減輕學生的負擔」，以上兩點均較爲籠統。另有 3 人提出要「提醒學生注意證明的目標在那裡，再用逆推法完成證明」，這與前述 Avital & Libeskind (1978)所建議克服技能上的困難時所提的方法相符。此外，Hart(1994，引自 Baker, 1996)也曾提出「順推法」（working forwards）較適合高程度的學生，而逆推法（working backwards）則透過問題解決的方式來發現如何證明，這方法對低程度的學生可能更適合。另有二位教師建議「先利用 n=1,n=2,n=3,...尋求前後項的關係，找出關連性」來克服學習困難。在 Avital & Libeskind (1978)的研究中，也認爲此法有助學生瞭解 P(k) →P(k+1)代表了無限多個的蘊含關係。

總括來說，日後教材的安排宜考慮按內容概念及過程技能兩方面來編寫，也可考慮增加順推與逆推進行證明的方式，以兼顧高低不同程度學生的需要。

肆、結論與建議

雖然數學歸納法的應用很廣，但在教材中所佔篇幅不多，在過去升學考試亦被忽略。由於目前升學主義仍然深深影響教學活動，來自社會與家長的期許，致使教師不得不以升學取向爲教材取捨或教學時考量的重要依據，在這種情況下，要學生學好數學歸納法本來就不容易。本研究呈現的正是教師在目前情況與升學制度下，按其本身的教學知識，衡諸現實情況而提供的實際教學經驗與處理方法。

趕進度幾乎是目前大部份教師的夢魘，教師對教材的取捨或多或少會以考試爲依歸，過度爲考試而解題的教學方式，可能是導致部份學生對數學歸納法的學習只流於「過程技能」與「片斷的知識」的套用。

本研究發現大部份受訪的教師不但清楚指出課程內容安排的意見，對於學生在學習上所遭遇的困難亦很了解。至於教學效果方面，這群教師亦有相當的經驗，可估計出學生對數學歸納法了解的程度。至於內容知識方面，總體而言，教師們對數學歸納法有一定程度的掌握，但有部份教師尙有可改進的地方。

舉例來說，學生對 k 在數學歸納法中的功用有所混淆，這可能與教師在課堂中的用語

有關，前述有教師提到「問題必在 n=k→n=k+1 這一步…」、「n=1 是檢驗，n=k→n=k+1 是推理過程」，在這種表達方式之下，學生很可能會分不清楚 k 的功用或 n 與 k 在功用上的差別，故宜改用較嚴謹的呈現方式；而國外大多數作者均採用 P(k)→P(k+1)的形式來表示敘述的推理，這方式可供教師與教材編者參考。另一個例子是「n=k 只要假設就可以了，n=k+1 需要證明」，這在數學用語上有欠妥當之處，因爲在「歸納步驟」中，假設敘述 P(k)爲真並非無緣無故的，其目的是要由該假設推導出P(k+1)亦爲真的情況，需要證明的並不是P(k+1)爲真，而是 P(k) →P(k+1)爲真，這一點相信若教材編寫得詳細合宜，將會很有幫助。

此外，適宜的例題亦相當重要，如果能精心的設計，可透過這些題目安排學習情境，讓學生有機會領略由觀察、歸納、臆測、到證明的整個過程該如何進行，如果能再加上合宜的類比，將更可促進學生對數學歸納法有較具體的瞭解，然亦應強調各種類比的限制，以免學生產生迷思概念。

爲免學生只流於機械式的學習，應強調該法的概念與原理，例如強調「起始步驟」及「歸納步驟」兩者缺一不可而互爲一個整體，教師以至於教科書應指出如果忽略其中一項，有可能會導致荒謬的結果，並提供適當的反例。另外，歸納法與數學歸納法之間的差別，亦應仔細解釋，因爲即使是教師也會有所混淆。有鑑於本研究資料顯示，數學歸納法對高一的學生有若干程度上的認知困難，故此在概念上的澄清尤爲重要。當然解題技巧的闡述亦須重視，但這似乎並不能只靠提供一些例題，就期待學生可以從中領悟出解題的思路及關鍵，特別是關於如何證明 P(k)→ P(k+1)爲真這一步驟，教科書宜增加篇幅討論一些解題策略，教師則宜適切的指導，並增加級數以外的例題。至於數學歸納法第二型，雖然部份教師認爲對高中生而言過難，但爲了顧及概念的完整性，宜編入作爲選讀教材，讓程度較佳的學生在行有餘力時有機會學習。

雖然有升學的壓力，且教師在趕進度的大環境之下，普遍認爲教學時數不足，但如果教材編寫能更加適切，應該可以塡補部分之不足。總結來說，期待教材編寫者與教師們能攜手合作，既努力擴展學生應用數學歸納法的機會，又讓學生能更有意義地學習該法，相信必定能夠穩定提昇高中學生對數學歸納法的瞭解。

參考資料

中文部份：

1. 華羅庚(1972），數學歸納法，香港：商務印書館。
2. 國立台灣師範大學科學教育中心(1984)，高級中學基礎數學（第一冊），台北：國立編譯館。

英文部份：

1. Avital, S. & Hansen, R.T. (1976). Mathematical Induction in the Classroom. Educational Studies in Mathematics, 7, 399-411.
2. Avital, S. & Libeskind, S. (1978). Mathematical Induction in the Classroom: Didactical and Mathematical Issues. Educational Studies in Mathematics, 9, 429-438.
3. Baker, J.D. (1996). Students' difficulties with proof by mathematical induction. Paper presented at the Annual Meeting of the American Educational Research Association (New York, NY, April 8-12, 1996). ED: 369931.
4. Blank, A.A. (1963). Mathematical Induction. In Enrichment Mathematics for High School—Twenty-eighth Yearbook of National Council of Teachers of Mathematics. Washington, D. C.: National Council of Teachers of Mathematics, INC.
5. Dubinsky, E.D. (1991). Reflective Abstraction in Advanced Mathematical Thinking. In Tall, D. (ed.) (1991). Advanced Mathematical Thinking. Boston: Kluwer Academic Publishers.
6. Duit, R. (1991). On the Role of Analogies and Metaphors in Learning Science. Science Education, 75(6), 649-672.
7. Ernest, P. (1984). Mathematical Induction: A Pedagogical Discussion. Educational Studies in Mathematics, 15, 173-189.
8. Gerstein, L.J. (1996). Introduction to Mathematical Structure and Proofs. New York: Springer ; Sudbury, MA: Jones and Bartlett Publishers.
9. Hausner, M. (1992). Discrete Mathematics. Fort Worth: Saunders College Publishing.
10. Hirsch, C.R. (1976). Making Mathematical Induction Meaningful. School Science and Mathematics, 76(1), 27-31.
11. Hirschfelder, R. (1991). Introduction to Discrete Mathematics. Pacific Grove, Calif.: Brooks/Cole Publishing Company.
12. Kurtz, D.C. (1992). Foundation of Abstract Mathematics. New York: McGraw-Hill, Inc.
13. Lowenthal, F. & Eisenberg, T.(1992). Mathematical Induction in School :An Illusion of Rigor ? School Science and Mathematics. 92(5), 233-238.
14. Movshovitz-Hadar, N. (1993). Mathematical Induction: A Focus on the Conceptual Framework. School Science and Mathematics, 93, 408-417.
15. National Council of Teachers of Mathematics (1989). Curriculum and Evaluation Standards for

School Mathematics, Commission on Standard for School Mathematics, Reston, VA: The National Council of Teachers of Mathematics, INC.

16. Pinker, A. (1976). Induction and Well Ordering. School Science and Mathematics, 76(3), 207-214.

17. Rosen, K.H. (1995). Discrete Mathematics and Its Application. New York : McGraw-Hill, Inc.

18. Shaw, B. (1978). n and S. Mathematics Teaching, 82, 6-7.

19. Smith, K.E. (1993). Teaching Induction in Discrete Mathematics. In Kenney, M.J. & Hirsch C.R. (ed.). Discrete Mathematics Across the Curriculum, K-12: 1991 Yearbook. Reston, VA: The National Council of Teachers of Mathematics, INC.

20. Solow, D. (1990). How to Read and Do Proofs: An Introduction to Mathematical Thought Processes. (Second ed.). NY: John Wiley & Sons.

21. Van-Dyke, F. (1995). A Concrete Approach to Mathematical Induction. The Mathematics Teacher, 88(4), 302-318.

22. Word, K.J. (1988). Instructional Sequence Effects of Recursion and Mathematical Induction in College Algebra. Thesis (Ph.D.)--The University of Texas at Austin.