鴿籠原理及應用舉例

許介彥
大葉大學　通訊與計算機工程學系

前言

鴿籠原理(Pigeonhole principle)乍看之下常讓人覺得簡單而理所當然，實際運用上卻常讓初學者有知易行難的感覺，甚至在面對一個可以用鴿籠原理解決的問題時，根本沒想到有可以用鴿籠原理解決的可能；本文將列舉幾個相關的題目及其解答以展現鴿籠原理的幾種可能的應用方式。

鴿籠原理

鴿籠原理：

當 K 個籠子裡裝有 $K + 1$ 或更多隻鴿子時，至少有一個籠子裡面的鴿子數≥ 2。

一般化的鴿籠原理：

當 K 個籠子裡裝有 N 隻鴿子時，至少有一個籠子裡面的鴿子數$\geq \lceil N / K \rceil$。

（$\lceil a \rceil$表示所有大於或等於 a 的整數中最小的整數。）

應用

問題一：集合 $A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\}$，試證：由 A 中任意取出五個數，此五數中必有兩數其和為 9。

解：將集合 A 切割成如下四部份：

1, 8	2, 7	3, 6	4, 5

每一部份包含兩個相加結果為 9 的數。由此四部份中任意取出五個數，根據鴿籠原理，必有某個部分被選了至少 $\lceil 5 / 4 \rceil = 2$ 次，因此，選中的五數中必有兩數其和為 9。

問題二：一個房間裡面有六個人(編號 1 至 6)，每個人可跟其他人握手(也可全不握)，設第 i 個人跟 a_i 個不同的人握過手，$i = 1, 2, ..., 6$，試證：存在 i, j, $1 \leq i \neq j \leq 6$ 使得 $a_i = a_j$。

解：每個人最多可和五個人握手，因此 $\forall i = 1, 2, ..., 6, 0 \leq a_i \leq 5$。但 0 和 5 不會同時出現，因為若有一人跟其他五人全握過手，就不可能有人全沒握；因此，任何情況下，a_i 可能的值只有 5 個，根據鴿籠原理，此六個 a_i 至少有兩個的值會相同。

問題三：已知在某六人中，任意兩人的關係有兩種可能：互相認識或互相不認識，試證：六人中存在互相認識的三人或互相不認識的三人。

解：假設 A 爲這六人之一，既然 A 除外的五人每個人跟 A 的關係若非互相認識則爲互相不認識，根據鴿籠原理，五人中認識 A 的人數 ≥ 3 或不認識 A 的人數 ≥ 3。

(1)假設認識 A 的人數 ≥ 3，令認識 A 的三人爲 B, C, D

(a)若 B, C, D 中有兩人互相認識，則此兩人與 A 形成了三人彼此認識的情形；

(b)若 B, C, D 中沒有兩人互相認識，則 B, C, D 形成了三人彼此不認識的情形；

(2)假設不認識 A 的人數 ≥ 3，令不認識 A 的三人爲 B, C, D

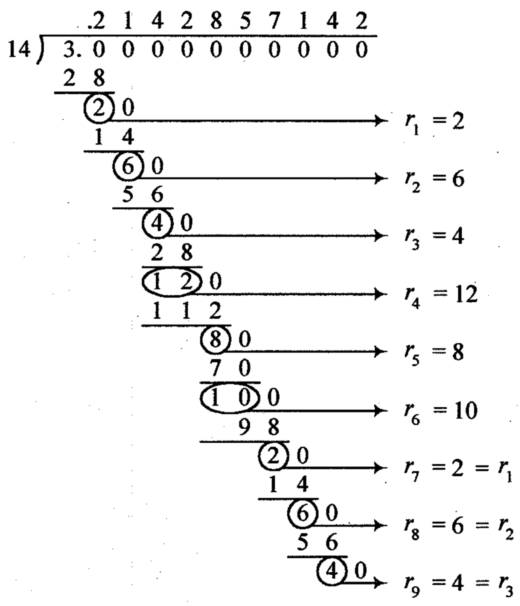
(a)若 B, C, D 中有兩人互相不認識，則此兩人與 A 形成了三人彼此不認識的情形；

(b)若 B, C, D 中沒有兩人互相不認識，則 B, C, D 形成了三人彼此認識的情形。

故得證。

問題四：試證：兩個整數相除，若無法整除則結果必爲循環小數。

解：整數 a 除以整數 b 的各小數位數可由長除法求得，下圖中以 $3 \div 14$ 爲例：



令各階段所得的餘數爲 r_i，既然每個階段的餘數皆小於除數，可得

$0 \leq r_i \leq (b-1),\ \forall\ i = 1, 2, 3, \ldots$

若 a 無法被 b 整除，則 $r_1, r_2, r_3, \ldots$ 是一個無窮數列，根據鴿籠原理，在由 1 至 $(b-1)$ 的數中，必有某數在數列 r_i, $i = 1, 2, 3\ldots$中出現無限多次(相當於無限多隻鴿子，$(b-1)$ 個籠子的情形)。

假設 $r_i = r_j\ (i < j)$，則在 r_i 至 r_{j-1} 間由長除法求出的位數將無限循環下去，故得證。

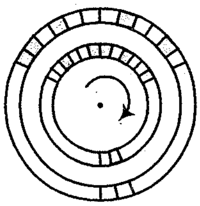
問題五：已知有一選手在 20 天內出賽的次數不多於 30 場，且每天至少出賽一場，試證：在這 20 天中，必定有某連續幾天此選手出賽的次數總和正好是 9。

解：假設 a_i 表示此選手從第一天到第 i 天結束，總共參加了幾場比賽，則數列 $a_1, a_2, \ldots, a_{20}$ 是一個嚴格遞增數列，且 $\forall\ i = 1, 2, \ldots, 20,\ 1 \leq a_i \leq 30$；由此又推得 $\forall\ i = 1, 2, \ldots, 20,\ 10 \leq (a_i$

$+ 9) \le 39$，且$(a_1 + 9), (a_2 + 9), \ldots, (a_{20} + 9)$也是一個嚴格遞增數列。

考慮以下 40 個正整數：$a_1, a_2, \ldots, a_{20}, (a_1 + 9), (a_2 + 9), \ldots, (a_{20} + 9)$。這 40 個數都不大於 39，根據鴿籠原理，這 40 個數中至少有兩個數的值相同，又因爲由 a_1 到 a_{20} 沒有任兩數相同，由$(a_1 + 9)$到$(a_{20} + 9)$也沒有任兩數相同，所以一定存在某兩數 i, j, $1 \le i, j \le 20$，使得 $a_i = a_j + 9$，也就是，此選手在由第$(j+1)$天至第 i 天這連續幾天中，出賽的場數爲 9。

問題六：考慮下圖中的兩個同心圓環，假設每個圓環都被分成 100 等分。外環不可轉動且 100 格中有 50 格被塗成黑色，50 格被塗成白色；內環可繞軸心轉動，每一格被隨機塗成黑色或白色。試證：內環可被轉到某一位置使得內環有至少 50 個格子其顏色與其相對的外環格子的顏色相同。



解：將內環轉動一圈，這一圈中在 100 個不同的位置外環與內環的格與格相對；假設我們在每一位置都計算內環有多少格子顏色與相對的外環格子顏色相同，則繞完一圈後所有此種數字的和爲 5000(因爲過程中內環的每一格都會對到 50 個同色的外環格子)，根據鴿籠原理，這 100 個位置至少有一個位置其內環有至少 $\lceil 5000 / 100 \rceil = 50$ 個格子其顏色與其相對的外環格子的顏色相同。

問題七：將任意 n^2+1 個相異的數排成一數列，試證：必可從中挑出 $n+1$ 個數來形成一個嚴格遞增或嚴格遞減數列；挑數字時位置不須連續，但須維持原來數列中的前後關係。

解：用矛盾證法。假設無法由 n^2+1 個數排成的數列中挑出長度爲 $n+1$ 的嚴格遞增或嚴格遞減數列，也就是挑出的嚴格遞增或嚴格遞減數列長度皆小於或等於 n。

爲原數列中的每個數計算兩個對應的數值，假設第 i 個數的兩個數值爲(a_i, b_i)，其中 a_i表示由第 i個數往後看所能找到的最長的嚴格遞增數列的長度(包括第 i個數本身)，b_i 表示由第 i 個數往後看所能找到的最長的嚴格遞減數列的長度(包括第 i 個數本身)；因爲一開始假設無法挑出長度爲 $n+1$ 的嚴格遞增或嚴格遞減數列，因此

$$1 \le a_i \le n,\ 1 \le b_i \le n, \quad \forall\ i = 1, 2, \ldots, n^2+1$$

考慮所有可能由 1 到 n 的正整數形成的數對(a_i, b_i)，這樣的不同數對共有 $n \times n = n^2$ 個，根據鴿籠原理，n^2+1 個此種數對中至少有兩個是相同的，也就是存在 s, t, $1 \le s, t \le$

n^2+1 使得 $a_s = a_t$ 且 $b_s = b_t$。假設在原數列中第 s 個數在第 t 個數之前，因爲數列中的數皆相異，因此第 s 個數不等於第 t 個數。

(1)若第 s 個數小於第 t 個數，則 a_s 至少爲 a_t+1，a_s 不可能等於 a_t；

(2)若第 s 個數大於第 t 個數，則 b_s 至少爲 b_t+1，b_s 不可能等於 b_t。

因此兩個情形都不可能成立，得到矛盾的結果，這是由一開始的假設而來，所以必可從 n^2+1 個數中挑出 $n+1$ 個數來形成一個嚴格遞增或嚴格遞減數列。

問題八：某棟建築裡有 90 個空房間，每個房間都有自己獨特但可複製的鑰匙；某人要爲 100 個客人安排住宿，100 人中將有 90 人被分配到此棟建築裡(一人一間)，鑰匙事先將被分給這 100 個人使得若由 100 人中隨意選出 90 人，這 90 人一定可以用自己分得的鑰匙打開某個空房間住進去，請問：最少要發出幾支鑰匙？怎麼發？

解：考慮如下的分法：將 90 個房間的 90 支不同鑰匙分給 100 個人中的 90 人(一人一支)，剩下的 10 個人每人分得 90 支不同的鑰匙，如此分完總共發出了 $90 + 10 \times 90 = 990$ 支鑰匙。

很明顯的，這樣的分法滿足題目的要求，任意 90 個人皆可住進 90 個房間。要證明 990 支鑰匙是最少的數目，假設總共只發出 989 或更少支鑰匙，根據鴿籠原理，必有某個房間會有發出的可開此房間的鑰匙數小於或等於 10 的情形，若擁有此房間鑰匙的人剛好都不在選到的 90 人中(100 人中會有 10 人沒被選到)，此房間將沒有人能開，因此 990 支鑰匙是最少的數目。

參考資料

1. Susanna S. Epp, "Discrete Mathematics with Applications", 2nd edition, Brooks/Cole, 1995.

2. C. L. Liu, "Elements of Discrete Mathematics", 2nd edition, McGraw-Hill, 1985.