

簡諧振子、弦線和空氣柱的共振現象

蔡尚芳
國立臺灣大學 物理系

摘要

本文主要是以簡諧振子、弦線和空氣柱的振動為例，以較初淺的理論探討這些系統中的諧振或駐波振動、共振現象及兩者間的關係，以闡明這些振動系統的異同，並進而澄清一些可能的誤解。此外，弦線和空氣柱的自然振動頻率，其數目不止一個，故在兩共振頻率之間會出現反共振的現象，本文也一併介紹，以供高中物理與大學普通物理教學之參考。

在力學或聲學中，一個相當常見的誤解，或不完整的說法，就是認為共振（或稱共鳴）指的是振動系統的位移振幅出現極大值的情況；另一個則是將振動系統在外來擾動下出現的任何駐波振動，都視為是共振，或者認為只有在共振時，振動系統才有可能會出現駐波振動。這類的誤解在討論電磁振盪時，較少出現，但在力學或聲學中，則常發生，其中一個主要的原因就是一般高中或大學課程中，很少在力學或聲學中，引進力學阻抗(mechanical impedance)的概念。

現行的國中理化與高中物理課程標準（民國 84 年公布），都將共鳴（或稱共振）現象的介紹，明列為聲音或聲學部分必須涵蓋的題材。在高三選修物理中，甚至將共鳴的原理，也列為教學時必須說明的基本項目之一。不論在國中或高中，如果僅涉及共鳴現象的定性介紹或實驗觀察，通常大致不會造成教師或學生太大的困擾，但如果想要清楚地說明或了解共鳴的原理，尤其是配合弦線或空氣柱中的駐波振動來講授或學習時，則可能是相當大的一項挑戰。

由於今年起即將停用的舊版高中物理課本中，並未提及共鳴的基本涵義與原理，而即使是大學的普通物理學教科書，對弦線和空氣柱的共鳴機制或原理，一般也多半缺乏較為詳細深入的說明，因此對部分的高中物理教師而言，可能由於過去缺乏研習或接觸，有必要在授課前，事先對此一問題，做較深入的探討與了解，才不致因認識不足，而無法適切地向學生說明弦線或空氣柱共鳴的觀念與原理。

本文主要是以簡諧振子、弦線和空氣柱的振動為例，較詳細地討論這些系統中的諧振或駐波振動，及其與共振現象間的關係，期能進而澄清一些可能的誤解。此外，由於弦線

和空氣柱的振動，其自然頻率的數目，並不像簡諧振子一樣只有一個，因此，在兩共振頻率之間，也會出現反共振(antiresonance)的現象，本文在此也一併介紹，以供高中物理與大學普通物理教學之參考。

(一)簡諧振子的振動

質量為 m 的質點，在力常數 $k = m\omega_0^2$ 的彈簧作用下，若假設其受到的摩擦阻力與速度 v 成正比，而可表示為 $-mbv$ ($b \geq 0$)，則其運動方程式為

$$m \frac{d^2 x}{dt^2} = -m\omega_0^2 x - mb \frac{dx}{dt} \quad (1a)$$

當無摩擦阻力時($b=0$)，此質點將以自然頻率 $f_0 = \omega_0/(2\pi)$ 不停地做簡諧振動，其力學能永遠守恆；但摩擦阻力如果不為零，則此質點的力學能，將因摩擦損耗逐漸減少，而質點也就慢慢地停下來，終至成為靜止不動。注意：簡諧振子能夠自由振動的頻率只有一個，即 f_0 。

要使有摩擦損耗的簡諧振子不停地振動，可施加外力定期對其做功，以補充因摩擦而消耗的力學能。假設施加的外力 $F(t)$ 以正弦函數隨時間 t 而變，其角頻率為 $\omega = 2\pi f$ ，即

$$F(t) = F_0 \sin \omega t \quad (1b)$$

則簡諧振子的運動方程式將由(1a)式變成

$$m \frac{d^2 x}{dt^2} + mb \frac{dx}{dt} + m\omega_0^2 x = F_0 \sin \omega t \quad (1c)$$

若 $b > 0$ ，則在達成穩定態後，簡諧振子會以外力的頻率振動，故其位移的一般式可表示為

$$x(t) = x_m \sin(\omega t - \phi) \quad (1d)$$

上式中的振幅 x_m 與相角差 ϕ ($0 \leq \phi < 2\pi$) 可求得如下。先將(1d)式的位移函數及其微分代入(1c)式，整理後可得

$$mx_m \{(\omega_0^2 - \omega^2) \sin(\omega t - \phi) + b\omega \cos(\omega t - \phi)\} = F_0 \sin \omega t \quad (1e)$$

若令

$$B = \sqrt{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + (b\omega)^2}, \quad \cos \phi = \frac{(\omega_0^2 - \omega^2)}{B}, \quad \sin \phi = \frac{b\omega}{B} \quad (1f)$$

則(1e)式可改寫為

$$mx_m B \{ \cos \phi \sin(\omega t - \phi) + \sin \phi \cos(\omega t - \phi) \} = mx_m B \sin \omega t = F_0 \sin \omega t \quad (1g)$$

由前二式可得簡諧振子的位移振幅 x_m 為

$$x_m = \frac{F_0}{mB} = \frac{F_0/m}{\sqrt{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + (b\omega)^2}} = \frac{F_0/(m\omega_0^2)}{\sqrt{\{1 - (\frac{\omega}{\omega_0})^2\}^2 + (\frac{b}{\omega_0})^2 (\frac{\omega}{\omega_0})^2}} \quad (1h)$$

若外力的振幅 F_0 不變，則(1h)式的結果顯示，簡諧振子的位移振幅 x_m 會隨著外力的角頻率 ω 而變，而當(1h)式右邊的分母為極小時，振幅 x_m 會出現極大值。當摩擦阻尼趨近於零時($b \rightarrow 0$)，使振幅 x_m 出現極大值的角頻率為 $\omega \cong \omega_0$ ，即外力頻率與自然頻率近乎相同。發生此一情況時，振幅 x_m 趨向無窮大，故簡諧振子將被振斷。但一般而言，當摩擦阻尼 b 為有限值($b > 0$)時，使振幅 x_m 出現極大值的外力頻率，將低於自然頻率，而振幅的極大值也一定為有限值。此等結論可由以下分析得知。

當 $b > 0$ 時，如採用以下的定義：

$$\alpha = \left(\frac{\omega}{\omega_0}\right)^2, \quad Q = \frac{\omega_0}{b} \quad (2a)$$

則(1h)式右邊的分母可改用以下 α 函數的平方根表示：

$$D(\alpha) = (1 - \alpha)^2 + \frac{\alpha}{Q^2} = \left(\alpha - 1 + \frac{1}{2Q^2}\right)^2 + \frac{1}{Q^2}\left(1 - \frac{1}{4Q^2}\right)$$

(2b)

由(2b)式可看出， $D(\alpha)$ 可以為極小或位移振幅可以為極大的條件，就是 $2Q^2 > 1$ ，且此式右邊第一項必須為零，即

$$\alpha = \left(\frac{\omega}{\omega_0}\right)^2 = 1 - \frac{1}{2Q^2} < 1 \quad (2c)$$

換言之，外力頻率須低於自然頻率。由(1h)式得簡諧振子的位移振幅最大為

$$x_{max} = \frac{F_0 / (mb^2)}{\sqrt{Q^2 - \frac{1}{4}}} = \frac{F_0}{mb\omega_0} \frac{1}{\sqrt{1 - \left(\frac{b}{2\omega_0}\right)^2}} \quad (2d)$$

簡諧振子的速度可由(1d)式的時間微分求得為

$$v(t) = \omega x_m \cos(\omega t - \phi) = v_m \sin(\omega t - \phi + \frac{\pi}{2}) \quad (3a)$$

故由上式與(1h)式，可得簡諧振子的速度振幅為

$$v_m = \omega x_m = \frac{\omega F_0 / m}{\sqrt{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + (b\omega)^2}} = \frac{F_0}{(m\omega_0) \sqrt{\left(\frac{\omega_0}{\omega} - \frac{\omega}{\omega_0}\right)^2 + \left(\frac{b}{\omega_0}\right)^2}} \quad (3b)$$

由上式可看出，不管 b 值為何，當 $\omega = \omega_0$ 時，速度振幅會成為極大值，此一情形稱為共振。(3b)式最右邊之分式的分母，稱為力學阻抗，此式顯示阻抗的來源有兩類，有一類來自摩擦阻尼 b ，與頻率無關；另一類則會隨頻率而變，且在特定的頻率(即共振頻率)時，此部分的阻抗為零，而出現共振，使對應的力學阻抗為極小，等於 mb 。由(1f)式，此時 $\cos \phi = 0$, $\sin \phi = 1$ ，即 $\phi = \pi/2$ ，故共振時簡諧振子的速度(3a)式成為

$$v(t) = v_m \sin(\omega t - \phi + \frac{\pi}{2}) = \frac{F_0}{mb} \sin \omega_0 t \quad (3c)$$

即此時簡諧振子的速度與外力完全同步，兩者間沒有相角差，但根據(1d)式與(1h)式，此時位移成爲

$$x(t) = x_m \sin(\omega t - \phi) = \frac{-F_0}{mb\omega_0} \cos \omega_0 t \quad (3d)$$

即簡諧振子在共振時的位移，與外力的相角差 ϕ 爲 90° ，且位移的振幅小於(2d)式的最大振幅 x_{max} 。

外力施予簡諧振子的瞬時功率可由(1b)式與(3a)式求得爲

$$P(t) = F(t)v(t) = v_m F_0 \sin \omega t \cos(\omega t - \phi) \quad (3d)$$

若以 $\tau = 2\pi / \omega$ 表示外力的週期，則平均功率可由(3d)式求得爲

$$\bar{P} = \frac{1}{\tau} \int_0^\tau P(t) dt = \frac{1}{\tau} \int_0^\tau v_m F_0 \sin^2 \omega t \sin \phi dt = \frac{1}{2} v_m F_0 \sin \phi \quad (3e)$$

將(1f)式與(3b)式的結果代入(3e)式即得

$$\bar{P} = \frac{bF_0^2}{2m\omega_0^2} \frac{1}{\left(\frac{\omega_0}{\omega} - \frac{\omega}{\omega_0}\right)^2 + \left(\frac{b}{\omega_0}\right)^2} \quad (3f)$$

由上式可看出，當出現共振時(即 $\omega = \omega_0$)，上式之分母變爲極小，此時外力施予簡諧振子的平均功率爲極大，即等於

$$\bar{P}_r = \frac{F_0^2}{2mb} \quad (3f)$$

綜合以上的結果，可知簡諧振子的共振現象，指的是外力的振幅固定不變，但隨著其頻率的改變，簡諧振子的振動在特定的頻率(即自然頻率 ω_0)出現以下的情況：

- (1)速度振幅成爲極大值。
- (2)力學阻抗成爲極小值。
- (3)輸入的平均功率成爲極大值。

注意：當摩擦阻尼不可忽略時，共振不能說成是位移之振幅 x_m 成爲極大值；但如摩擦阻尼趨近於零($b \rightarrow 0$)而可忽略時，則上述三種說法中之極大值，均趨近於無限大，在此情況下，由於位移之振幅，必隨速度振幅成爲無限大，故得如下之說法：

- (4)當摩擦阻尼極微小而可忽略時，在外力的週期性作用下，使振動系統出現近乎無限大位移振幅的情形，稱爲共振。

以上的四種說法都可以做爲共振的一般定義，但說法(4)因不需考慮摩擦阻尼或力學能的損耗，在討論質量成連續分布之力學系統的波動與共振時，可大幅度的簡化其數學推導過程，故以下將採用此觀點來說明弦線與空氣柱的共振。

(二)弦線的駐波振動

振動系統的自然頻率並不一定只有一個，例如兩端固定、受有張力的細弦線，如果其長度為 L ，弦上橫波的傳播速率為 u ，則此弦線做微幅的橫向振動時，其駐波振動的自然頻率為

$$f_n = n\left(\frac{u}{2L}\right), \quad n = 1, 2, 3, \dots, \quad (4a)$$

而一端固定、另端自由的細弦線，其駐波振動的自然頻率則為

$$f_n = (2n-1)\frac{u}{4L}, \quad n = 1, 2, 3, \dots, \quad (4b)$$

但若將細弦線的一端固定，拉緊另端使呈水平，並沿鉛垂方向施一頻率為 f 的力，使其做簡諧振動，則不論 f 為何，弦線都會出現駐波振動。為了說明為何會有這個結果，首先考慮細弦的波動方程式。

一處於靜力平衡態的拉緊細弦線，如受到擾動而微幅偏離其平衡態，則在擾動消失後，會繼續振動，而使弦線上出現橫波，向弦線的兩端傳播。設如圖 1 所示，以處於靜力平衡時的弦線為 x 軸。當弦線出現微幅的橫向位移時， dx 小段的弦線長度變為 ds ，若弦線的形狀僅出現平緩的改變，則任一小段弦線的長度改變量皆屬於第二階微量，可以忽略，即

$$ds = \sqrt{(dx)^2 + (dy)^2} = dx\sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2} \cong dx \quad (4c)$$

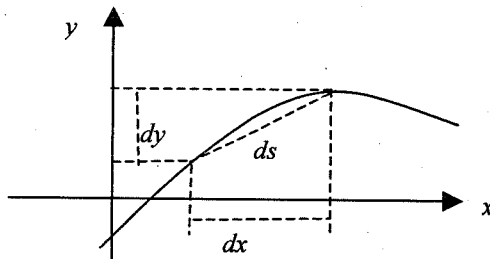


圖 1 弦線的微幅變化

因此弦線上出現橫波時，沿著波傳遞方向的介質長度(即弦長)，可視為不變，換言之，弦線的密度 ρ 或張力 T ，到處一樣，可視為定值。此時，弦線上出現的橫向回復力 F_y ，來自於弦線的形狀(即斜率 dy/dx)改變，由圖 2 並利用(4c)式的結果可得

$$F_y = T \sin\theta = T\left(\frac{dy}{ds}\right) \cong T\left(\frac{dy}{dx}\right) \quad (4d)$$

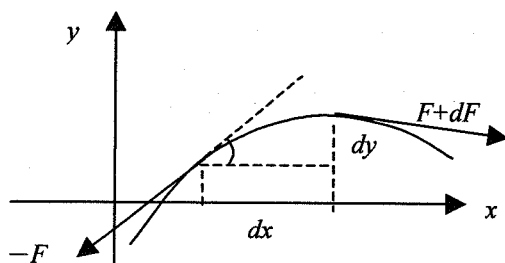


圖 2 弦的橫向回復力

當重力可忽略時，弦線上位於 dx 的小段所受到的總力，為其兩端橫向回復力之合力，即

$$(F + dF)_y - (F)_y = dF_y = d\left\{T\left(\frac{dy}{ds}\right)\right\} \cong Td\left(\frac{dy}{dx}\right) = T\left(\frac{d^2y}{dx^2}\right)dx \quad (4e)$$

若弦線每單位長度的質量(即線密度)為 σ ，則 dx 小段的質量 $dm = \sigma dx$ ，而此小段的橫向加速度為 y 對 t 的二次微分，故由(4e)式與牛頓第二運動定律得

$$dF_y = T\left(\frac{d^2y}{dx^2}\right)dx = (\sigma dx)\left(\frac{d^2y}{dt^2}\right) \quad (5a)$$

將上式化簡，並以 u 代表波速

$$u = \sqrt{\frac{T}{\sigma}} \quad (5b)$$

即得弦線的波動方程式為

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{1}{u^2} \frac{d^2y}{dt^2} \quad (5c)$$

當弦線的一端固定於原點，而在 $x = L$ 的另一端，沿鉛垂方向施一外力 $F_y(t)$ 時，如外力以角頻率 $\omega = 2\pi f$ 隨時間做正弦函數的變化，即

$$F_y(t) = F_0 \sin 2\pi f t \quad (5d)$$

則弦上出現的駐波振動，其橫向位移須滿足(5c)式。如仿照進行波的波長定義，令 $\lambda = u/f$ ，則駐波的位移函數可用下式表示：

$$y(x, t) = y_m \sin 2\pi f t \sin 2\pi \frac{x}{\lambda} \quad (5e)$$

但因在 $x = L$ 處，外力 $F_y(t)$ 與張力 T 須滿足(4d)式的關係，故將(5d)式與(5e)式的結果代入後，可得駐波位移振幅 y_m 與外力振幅 F_0 間的關係為

$$F_0 = \frac{2\pi}{\lambda} T y_m \cos 2\pi \frac{L}{\lambda} \quad (5f)$$

由前兩式可知，弦線在鉛垂方向的位移 y 會隨著外力以頻率 f 出現駐波振動，即

$$y(x,t) = \frac{\lambda F_0}{2\pi T} \frac{1}{\cos(2\pi L/\lambda)} \sin 2\pi ft \sin 2\pi \frac{x}{\lambda} \quad (6a)$$

上式顯示不論 f 為何，弦線都會出現駐波振動，其波節位於

$$\sin 2\pi \frac{x}{\lambda} = 0 \Rightarrow x = \frac{(n-1)\lambda}{2} = \frac{(n-1)f}{2u}, \quad n = 1, 2, 3, \dots \quad (6b)$$

以下討論出現駐波時，弦線上各點的振幅是否會隨外力的頻率，而出現極大與極小值。

(A) 當外力頻率 f 等於(4b)式中的任一頻率 f_n 時，可得

$$\cos \frac{2\pi L}{\lambda} = \cos 2\pi L \left(\frac{f_n}{u} \right) = \cos \frac{\pi}{2} (2n-1) = 0 \quad (6c)$$

$$\sin \frac{2\pi L}{\lambda} = \pm 1 \quad (6d)$$

依(6a)式與(6c)式，在此情況下，弦線上出現的駐波振動，波節以外之各點，其位移振幅均成為無限大，即(4b)式中的頻率為此弦線的共振頻率。如與鄰近 f_n 的其他頻率 f 相比，各點在此頻率時的振幅為極大值；而由(6a)式與(6d)式，可看出此時振源端 $x = L$ 為波腹。

(B) 當外力頻率 f 等於(4a)式中的任一頻率 f_n 時，可得

$$\cos \frac{2\pi L}{\lambda} = \cos 2\pi L \left(\frac{f_n}{u} \right) = \cos n\pi = \pm 1 \quad (6e)$$

$$\sin \frac{2\pi L}{\lambda} = 0 \quad (6f)$$

依(6a)式與(6e)式，此時弦線上出現的駐波振動，其各點之振幅，與鄰近的其他頻率 f 相比為極小值，此情形稱為反共振(antiresonance)；而由(6a)式與(6f)式，可看出此時振源端 $x = L$ 為波節。

由以上的結果來看，無摩擦阻尼的弦線，非波節處各點的位移振幅，在出現共振時均為無限大，此情形與簡諧振子相同。但弦線的共振頻率可以有多個，與簡諧振子的共振頻率只有一個，顯然不同。當頻率 f 由一個共振頻率 f_n 變到另一個共振頻率 f_{n+1} 時，弦線上非波節處之各點，其位移振幅也跟著由一個極大值變到另一個極大值，但顯然在此兩極大值之間必會有一極小值，因此就會有反共振現象，這種情形在簡諧振子是不會出現的。

(三)空氣柱的駐波振動

閉管與開管空氣柱中的聲波是一種縱波，與弦線上的橫波，在本質上有些差異。為簡單計，以下的討論均假設空氣柱的橫截面到處相同，其面積為 A ，管軸係沿 x 方向，管中聲波的波前與 yz 平面平行。當管中出現波動時，介質沿 x 方向出現微幅位移，造成體積、壓力與密度的改變，因而出現彈性回復力。設管中某部分介質的體積由 V_0 微幅改變成為

$V_0 + \Delta V$ 時，其所受之壓力須由 P_0 變成 $P_0 + \Delta P$ ，才能重新達成平衡，則壓力變化量 ΔP 與體積變化量 ΔV 的關係，可以下式表示：

$$\Delta P = -B \frac{\Delta V}{V_0} \quad (7a)$$

上式中之比例常數 B 為介質的體積彈性係數(bulk modulus)，而負號則表示當 $\Delta V > 0$ 時，壓力的變化量 $\Delta P < 0$ ，也就是說當體積變大時，壓力會降低。

如圖 3 上方小圖所示，當介質處於平衡態時，設小體積 Q 的左、右兩側座標原本為 x 與 $x' = x + \Delta x$ ，則其體積 V_0 為

$$V_0 = A(x' - x) = A\Delta x \quad (7b)$$

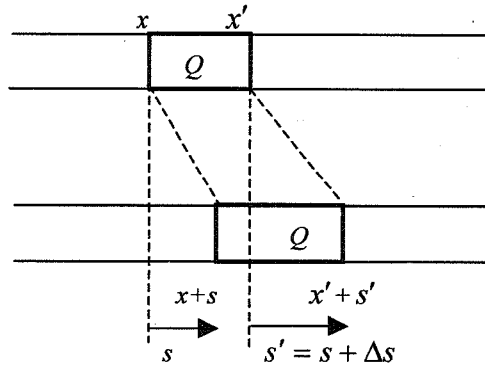


圖 3 偏離平衡態時的位移

當介質微幅偏離平衡態時，假設在 x 處的介質位移為 s ，而在 $x + \Delta x$ 處的位移為 $s' = s + \Delta s$ ，則小體積 Q 兩側的位置分別移到 $x+s$ 與 $x'+s'$ (如圖 3 下方小圖)，故其體積變成 $V = A(x'+s' - x - s)$ ，而其體積變化量 ΔV 為

$$\Delta V = V - V_0 = A(x'+s' - x - s) - A(x' - x) = A(s' - s) = A\Delta s \quad (7c)$$

將(7b)與(7c)兩式的結果代入(7a)式，可知小體積 Q 所受的壓力較平衡值高出

$$\Delta P = -B \frac{\Delta V}{V_0} = -B \frac{A\Delta s}{A\Delta x} = -B \frac{\Delta s}{\Delta x} \quad (7d)$$

上式顯示 ΔP 與位移的梯度 $\Delta s / \Delta x$ 成正比。當小體積 Q 的寬度 Δx 很小而可以忽略時， Q 可視為一個位於 x 處、沒有厚度的平面，此時(7d)式的 ΔP 可視為在 x 處的壓力變化量，而以 $\Delta P(x)$ 表示之。

由(7a)式與(7d)式可得體積增加 ΔV 時，位於 x 處的截面，其所受到的縱向力(來自截面左側之力沿 $+x$ 方向時為正)，將增加為

$$F_x = A\Delta P = -AB \frac{ds}{dx} \quad (8a)$$

而位於 x 到 $x+dx$ 的小體積所受到的總力，為其兩端縱向力之合力，即

$$-(F + dF)_x + F_x = -dF_x = AB d\left(\frac{ds}{dx}\right) \quad (8b)$$

設以 ρ_0 代表靜力平衡態時的介質密度，則在 x 到 $x+dx$ 小段的介質，其質量為 $dm = \rho_0 A dx$ ，而其縱向加速度為位移 s 對 t 的二次微分，故由(8b)式與牛頓第二運動定律，可得其微幅運動的方程式為

$$-dF_x = AB d\left(\frac{ds}{dx}\right) = (\rho_0 A dx) \frac{d^2 s}{dt^2} \quad (8c)$$

整理後得

$$\frac{B}{\rho_0} \left(\frac{d^2 s}{dx^2}\right) = \frac{d^2 s}{dt^2} \quad (8d)$$

比較(8c)式與(8d)式，可見此空氣柱與弦線之波動方程式具相同形式，而比照(5b)式，可知聲波的傳播速率為

$$u = \sqrt{\frac{B}{\rho_0}} \quad (8e)$$

此外，開管與閉管空氣柱之駐波振動頻率，亦可比照弦線而得，例如兩端封閉的空氣柱，如果其長度為 L ，聲波的傳播速率為 u ，則此空氣柱做微幅的縱向振動時，在兩端封閉處之位移為零，與兩端固定之弦線的邊界條件相同，故其駐波振動的自然頻率為

$$f_n = n\left(\frac{u}{2L}\right), \quad n = 1, 2, 3, \dots, \quad (9a)$$

同理，一端封閉、另一端開放的空氣柱，其駐波振動的自然頻率則為

$$f_n = (2n-1)\frac{u}{4L}, \quad n = 1, 2, 3, \dots, \quad (9b)$$

當空氣柱位於原點的一端封閉，而在 $x = L$ 的另一端，沿 $-x$ 軸方向施一外力 $F_x(t)$ 時，如外力以角頻率 $\omega = 2\pi f$ 隨時間做正弦函數的變化，即

$$F_x(t) = -F_0 \sin 2\pi f t \quad (9c)$$

則空氣柱中出現的駐波振動，其縱向位移須滿足(8d)式。如仿照進行波的波長定義，令 $\lambda = u/f$ ，則此駐波的位移函數可用下式表示：

$$s(x, t) = s_m \sin 2\pi f t \sin 2\pi \frac{x}{\lambda} \quad (9d)$$

但因在 $x = L$ 處，外力 $F_x(t)$ 須滿足(8a)式的關係，故將(9c)式與(9d)式的結果代入後，可得駐波位移振幅 s_m 與外力振幅 F_0 間的關係為

$$F_0 = \frac{2\pi}{\lambda} B A s_m \cos 2\pi \frac{L}{\lambda} \quad (9e)$$

由前兩式可知，介質的縱向位移 s 會隨著外力以頻率 f 出現駐波振動，即

$$s(x,t) = \frac{\lambda F_0}{2\pi B A \cos(2\pi L / \lambda)} \sin 2\pi f t \sin 2\pi \frac{x}{\lambda} \quad (9f)$$

上式顯示不論 f 為何，空氣柱都會出現駐波振動，其波節位於

$$\sin 2\pi \frac{x}{\lambda} = 0 \Rightarrow x = \frac{(n-1)\lambda}{2} = \frac{(n-1)f}{2u}, \quad n=1,2,3,\dots \quad (9g)$$

以上(9e)至(9g)式之結果，如令 $BA=T$ ，則顯然均與弦線之對應結果相同，故由上述有關弦線駐波之討論，可得以下結論。

(A)當外力頻率 f 等於(9b)式中的任一頻率 f_n 時，可得

$$\cos \frac{2\pi L}{\lambda} = \cos 2\pi L \left(\frac{f_n}{u} \right) = \cos \frac{\pi}{2} (2n-1) = 0 \quad (10a)$$

$$\sin \frac{2\pi L}{\lambda} = \pm 1 \quad (10b)$$

依(9f)式與(10a)式，在此情況下，空氣柱中出現的駐波振動，波節以外之各點，其位移振幅均成爲無限大，即(9b)式中的頻率爲此空氣柱的共振頻率。如與鄰近 f_n 的其他頻率 f 相比，各處介質在此頻率時的振幅爲極大值；而由(9f)式與(10b)式，可看出此時振源端 $x=L$ 爲位移的波腹。

(B)當外力頻率 f 等於(9a)式中的任一頻率 f_n 時，可得

$$\cos \frac{2\pi L}{\lambda} = \cos 2\pi L \left(\frac{f_n}{u} \right) = \cos n\pi = \pm 1 \quad (10c)$$

$$\sin \frac{2\pi L}{\lambda} = 0 \quad (10d)$$

依(9f)式與(10c)式，此時空氣柱中出現的駐波振動，其各處之位移振幅，與鄰近的其他頻率 f 相比爲極小值，故爲反共振；而由(9f)式與(10d)式，可看出此時振源端 $x=L$ 爲位移的波節。

由以上的結果來看，長度相同的弦線與空氣柱，其駐波振動的模式，及發生共振或反共振的頻率，是完全相同的。