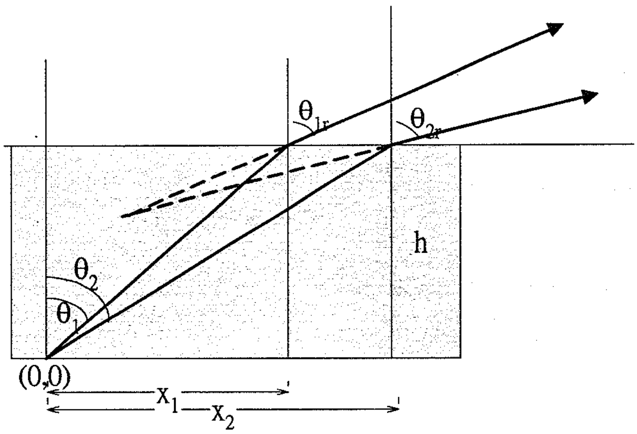
視深研究

徐世昌
台北市成淵高級中學

貴刊第 228 期中載有台灣大學物理系蔡尚芳教授文章－「觀察者所看到水中光源的位置」，文中提到觀察者觀看水中物體所成虛像位置並不是只在垂直方向有變化，事實上，在水平方向亦有移動。

作者在三年前指導本校學生參加台北市科展時，對此問題亦有研究。本文將嘗試由司乃耳定律導出物體經折射後產生虛像的位置與觀察角度的關係，求出虛像軌跡方程式。其導証方法與蔡教授略有不同，但結果是相同的，提供讀者參考與比較。

一、虛像的軌跡方程式



圖一

1. 求兩光線經折射後所成虛像的位置

設水深度爲h，折射率爲n，光源的位置在原點

由光源發出入射角爲θ_1及θ_2的光線，其折射角分別爲θ_{1r}及θ_{2r}

根據司乃耳定律 $nsin\theta_1 = sin\theta_{1r}$，$nsin\theta_2 = sin\theta_{2r}$

則入射角θ_1的光線，其折射線的斜率m_1

$$m_1 = tan(90^\circ - \theta_{1r}) = cot\theta_{1r} = \frac{\sqrt{1-n^2 sin^2\theta_1}}{nsin\theta_1} \quad \text{......}(1)$$

射出的位置在(x_1, y_1)，$x_1 = htan\theta_1$，$y_1 = h$

由點斜式可得折射線的方程式 $y = m_1(x - htan\theta_1) + h$ ......(2)

同理，入射角θ_2，折射後的斜率$m_2 = cot\theta_{2r} = \dfrac{\sqrt{1-n^2 sin^2\theta_2}}{nsin\theta_2}$ ......(3)

射出的位置在(x_2, y_2)，$x_2 = htan\theta_2$，$y_2 = h$

折射線的方程式 $y = m_2(x - h\tan\theta_2) + h$..(4)

解方程式(2)(4)$\begin{cases} y = m_1(x - h\tan\theta_1) + h \\ y = m_2(x - h\tan\theta_2) + h \end{cases}$

得交點座標$y = \dfrac{m_1 m_2(\tan\theta_2 - \tan\theta_1)}{m_2 - m_1}h + h$..(5)

$$x = h\tan\theta_1 + \frac{1}{m_1}(y - h) \text{..(6)}$$

2. 將斜率代入

由(1)(3) $m_2 m_1 = \dfrac{\sqrt{1-n^2\sin^2\theta_1}\sqrt{1-n^2\sin^2\theta_2}}{n^2\sin\theta_1\sin\theta_2}$

$$m_2 - m_1 = \frac{\sqrt{1-n^2\sin^2\theta_2}}{n\sin\theta_2} - \frac{\sqrt{1-n^2\sin^2\theta_1}}{n\sin\theta_1}$$

$$= \frac{\sin\theta_1\sqrt{1-n^2\sin^2\theta_2} - \sin\theta_2\sqrt{1-n^2\sin^2\theta_1}}{n\sin\theta_1\sin\theta_2}$$

則$\dfrac{\tan\theta_2 - \tan\theta_1}{m_2 - m_1} = \dfrac{n\sin\theta_1\sin\theta_2}{\sin\theta_1\sqrt{1-n^2\sin^2\theta_2} - \sin\theta_2\sqrt{1-n^2\sin^2\theta_1}}\left(\dfrac{\sin\theta_2}{\cos\theta_2} - \dfrac{\sin\theta_1}{\cos\theta_1}\right)$

$$= \frac{n\sin\theta_1\sin\theta_2\left(\sin\theta_1\sqrt{1-n^2\sin^2\theta_2} + \sin\theta_2\sqrt{1-n^2\sin^2\theta_1}\right)}{\sin^2\theta_1 - \sin^2\theta_2} \times \frac{\sin(\theta_2 - \theta_1)}{\cos\theta_2\cos\theta_1}$$

$$= \frac{n\sin\theta_1\sin\theta_2\left(\sin\theta_1\sqrt{1-n^2\sin^2\theta_2} + \sin\theta_2\sqrt{1-n^2\sin^2\theta_1}\right)}{-\sin(\theta_2 + \theta_1)\sin(\theta_2 - \theta_1)} \times \frac{\sin(\theta_2 - \theta_1)}{\cos\theta_2\cos\theta_1}$$

$$= \frac{n\sin\theta_1\sin\theta_2\left(\sin\theta_1\sqrt{1-n^2\sin^2\theta_2} + \sin\theta_2\sqrt{1-n^2\sin^2\theta_1}\right)}{-\sin(\theta_2 + \theta_1)\cos\theta_2\cos\theta_1}$$

3. 如果$\theta_1 = \theta_2 = \theta$時即其虛像位置

當$\theta_1 = \theta_2 = \theta$時

$$\frac{m_1 m_2(\tan\theta_2 - \tan\theta_1)}{m_2 - m_1} = \frac{1 - n^2\sin\theta}{n^2\sin^2\theta}\,\frac{2n\sin^3\theta(1 - n^2\sin^2\theta)^{\frac{1}{2}}}{-\sin 2\theta\cos^2\theta}$$

$$= \frac{-1}{n}\frac{(1 - n^2\sin^2\theta)^{\frac{3}{2}}}{\cos^3\theta} \text{..(7)}$$

(7)代入(5)$y = h - \dfrac{h}{n}\dfrac{(1 - n^2\sin^2\theta)^{\frac{3}{2}}}{\cos^3\theta} = h - \dfrac{h}{n}(\sec^2\theta - n^2\tan\theta)^{\frac{3}{2}}$........(8)

$$(8)\text{代入}(6)\quad x = h\tan\theta + \frac{n\sin\theta}{\sqrt{1-n^2\sin^2\theta}}\left(-\frac{h}{n}\frac{(1-n^2\sin^2\theta)^{\frac{3}{2}}}{\cos^3\theta}\right)$$

$$= h\tan\theta\frac{-\sin^2\theta + n^2\sin^2\theta}{\cos^2\theta} = \underline{\underline{h(n^2-1)\tan^3\theta}}\text{..................}(9)$$

(8)(9)二式即爲虛像的水平位置及垂直位置與入射角度的關係。

4. 求虛像的軌跡方程式

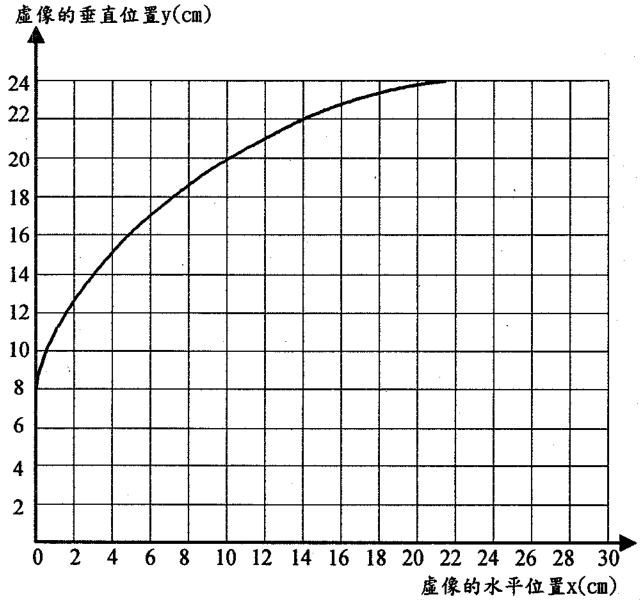
由(9)式，$\tan\theta = \dfrac{x^{\frac{1}{3}}}{h^{\frac{1}{3}}(n^2-1)^{\frac{1}{3}}}$

$$\Rightarrow \sin\theta = \frac{x^{\frac{1}{3}}}{t}\text{，}\cos\theta = \frac{h^{\frac{1}{3}}(n^2-1)^{\frac{1}{3}}}{t}\quad\text{其中} t = \sqrt{h^{\frac{2}{3}}(n^2-1)^{\frac{2}{3}} + x^{\frac{2}{3}}}$$

$$\text{由(8)式}\ y = h - \frac{h}{n}\frac{(1-n^2\sin^2\theta)^{\frac{3}{2}}}{\cos^3\theta} = h - \frac{1}{n}\frac{(t^2-n^2x^{\frac{2}{3}})^{\frac{3}{2}}}{n^2-1}$$

$$= h - \frac{1}{n}\left[h^{\frac{2}{3}} - x^{\frac{2}{3}}(n^2-1)^{\frac{1}{3}}\right]^{\frac{3}{2}}\text{..}(10)$$

(10)式即爲虛像的軌跡方程式，以圖二之曲線表示之(液深爲 24cm，液體折射率 1.5)。



圖二

5. 求觀測的角度與虛像位置的關係

由司乃耳定律，$n\sin\theta = \sin\theta_r$

$$\Rightarrow \cos\theta = \frac{\sqrt{n^2 - \sin^2\theta_r}}{n}, \tan\theta = \frac{\sin\theta_r}{\sqrt{n^2 - \sin^2\theta_r}}$$

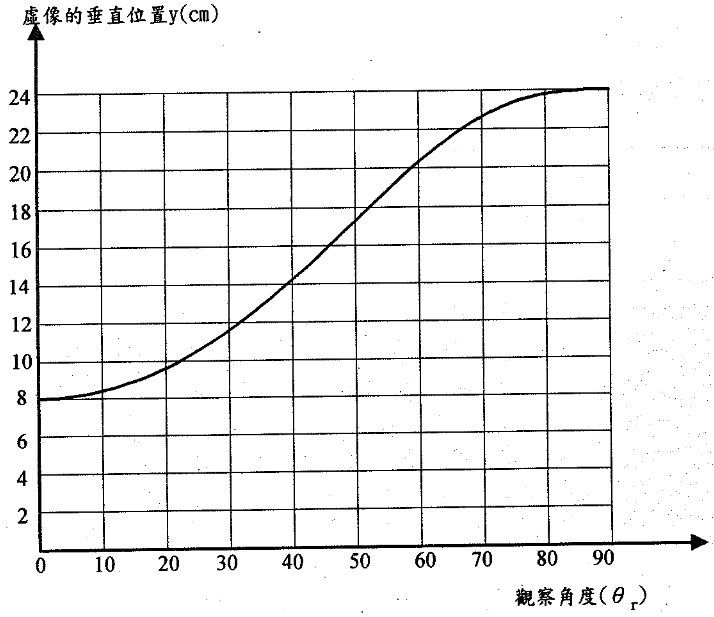
代入(8)式 $y = h - \frac{h}{n}(\sec^2\theta - n^2\tan^2\theta)^{\frac{3}{2}} = h - \frac{h}{n}\left(\frac{n^2}{n^2 - \sin^2\theta_r} - \frac{n^2\sin^2\theta_r}{n^2 - \sin^2\theta_r}\right)^{\frac{3}{2}}$

$$= h - hn^2\cos^3\theta_r(n^2 - \sin^2\theta_r)^{-\frac{3}{2}} \text{......(11)}$$

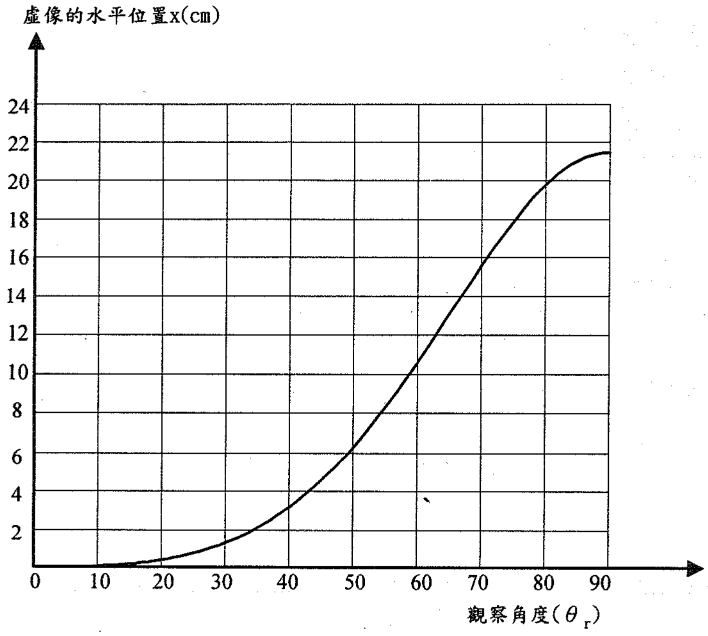
由(9)式$x = h(n^2 - 1)\tan^3\theta = h(n^2 - 1)\dfrac{\sin^3\theta_r}{(n^2 - \sin^2\theta_r)^{\frac{3}{2}}}$

$$= h(n^2 - 1)\sin^3\theta_r(n^2 - \sin^2\theta_r)^{-\frac{3}{2}} \text{......(12)}$$

(11)(12)式表觀察角度與虛像垂直及水平位置的關係式，分以圖三及圖四之曲線表示之(液深爲 24cm，液體折射率 1.5)。



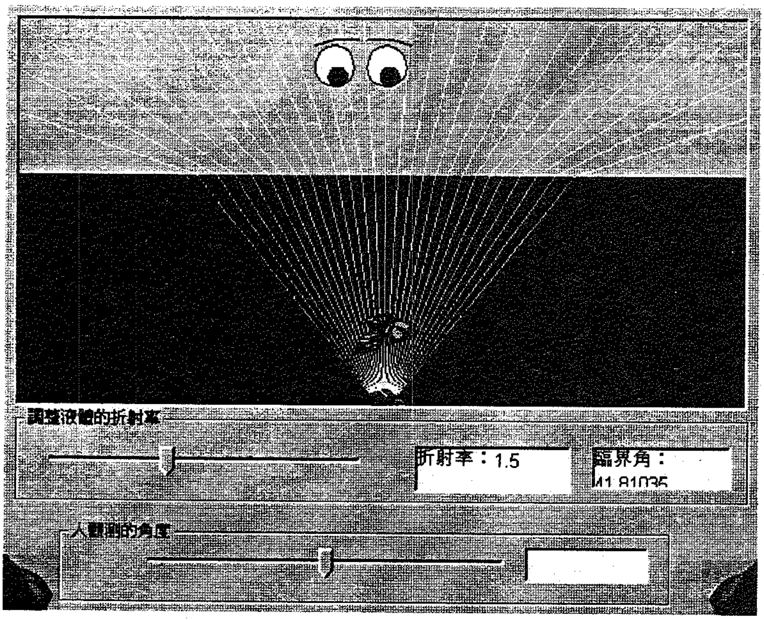
圖三



圖四

二、電腦程式模擬

爲使讀者易於了解視深的實際狀況，作者寫出有關視深之模擬程式，公布在亞卓市/市民創作區/自然/動態物理教室/vb 程式中，歡迎讀者上網下載。



圖五　觀察者所見魚的位置