

電磁爐能用鋁鍋嗎？

蔡尚芳

國立臺灣大學 物理系

摘要

本文以鐵鍋與鋁鍋為例，說明在感應電磁爐上使用的金屬鍋，其電熱功率主要乃是由金屬之磁導率與電阻率決定。鐵鍋因使用鐵磁性物質，其磁場與感應電動勢遠超過不具鐵磁性的鍋子，故即使電導性稍遜，其電熱功率仍遠高於一般採用非鐵磁性金屬良導體的鍋子。文中並分析一簡化之感應電磁爐模型，詳細推導出其平均電熱功率之一般性公式。

最近分別在國中理化與高中物理的教材編輯會議中，碰到如何解釋電磁爐工作原理的問題，意外地發現各階層的教師，不清楚電磁爐為什麼要用鐵質鍋子的道理者，其實大有人在。因此覺得有需要針對電磁爐的工作原理，為文加以介紹。

時下頗為流行的電磁爐，基本上是根據法拉第電磁感應原理設計出來的家電產品，其工作原理大致如下：首先利用交流電產生隨時間變化的磁場，鍋底因有磁場通過會感應而產生渦電流，此電流在鍋底流通時，一部分的電能會因電阻而消耗，轉換成為熱能，使鍋子快速升溫而達到加熱鍋內食物的目的。利用電磁爐燒煮食物時，如果不用鐵鍋，而改用鋁鍋，為什麼就無法發揮電磁爐的加熱功能呢？有一種說法認為這是由於鐵鍋的電阻大於鋁鍋（參見表一的電阻率值），因此比較容易產生電熱效應的緣故。這種解釋是矛盾不合理的，就算沒錯，也一定是不完整的，因為根據這樣的推論，愈接近為絕緣體的鍋子，在電磁爐上使用時產生的電熱效應就愈大，推到極限就等於說電阻無限大（亦即電磁爐上不擺放鍋子）時，電熱效應是最大的。顯然地，這樣的結論是荒謬不正確的。

為了更具體明確地分析此一問題，假設鐵鍋與鋁鍋是在相同的時變磁場下使用，亦即兩者受到的感應電動勢 V 是相同的，則根據焦耳電熱功率的公式

$$P = i^2 R = \frac{V^2}{R} \quad (1)$$

鋁鍋的電阻 R 既然較鐵鍋為小，其電熱功率 P 應該是較大的。另外，就傳熱與升溫的效果而言（參見表一所列之密度、比熱與熱導率值），鋁鍋一般也比鐵鍋為佳。換言之，只考慮電阻的差異時，鋁鍋配合電磁爐使用時的電熱功率應該較大，其加熱食物的效果，整體說來要比鐵鍋為優，但這樣的結論卻與事實不符，此一分析與其所持之論點，顯然沒有掌握問

題的關鍵。

表一 鐵與鋁的物理性質

	電阻率 $\rho = 1/\sigma$ (20°C) ($\Omega \cdot m$)	磁化率 $\chi_m = K_m - 1$ (300K)	密度 d (kg/m^3)	比熱 c (0-100°C) ($J/kg \cdot K$)	熱導率 κ ($W/m \cdot K$)
鐵	9.71×10^{-8}	5500 (鍛鐵)* 600 (鑄鐵)*	7.86	447	80.4
鋁	2.65×10^{-8}	2.1×10^{-5}	2.70	900	237

*鐵之磁化率視磁場強度 H 與磁化過程而定，表中所列磁化率為其最大值。

其實電磁爐所以不適合用鋁鍋，主要是因為鋁不是鐵磁性物質，通過鋁鍋的磁場，其強度遠小於鐵鍋。由表一的磁化率數據，可看出此兩種鍋子中磁場 B 的比值約為

$$\frac{B}{B'} = \frac{\mu(\text{鐵})}{\mu(\text{鋁})} = \frac{1 + \chi(\text{鐵})}{1 + \chi(\text{鋁})} \cong 10^2 \sim 10^3 \quad (2)$$

由於感應電動勢 V 與磁場 B 成正比，因此，外形與大小完全一樣的鐵鍋與鋁鍋，其電熱功率的比值約為

$$\left(\frac{V^2}{V'^2}\right) \left(\frac{R'}{R}\right) = \left(\frac{B}{B'}\right)^2 \left(\frac{\rho'}{\rho}\right) \cong 3 \times 10^3 \sim 3 \times 10^5 \quad (3)$$

顯然地，鐵磁性的鍋子比起鋁鍋子，雖然在導電性上稍居劣勢，但在感應電動勢上則遙遙領先，居於上風，故將兩種因素都納入考慮時，其加熱的效果起碼約在千倍以上。

如圖 1a 所示為爐之俯視圖，爐中心環繞有 N 匝線圈，形成一中空、外半徑為 a 的環狀，當線圈通有電流時，可以產生磁場，通過爐上鍋底板。電磁爐本身可近似為無感應電流與電熱消耗。金屬鍋底部可視為半徑為 a 之圓盤，其厚度為 L 。

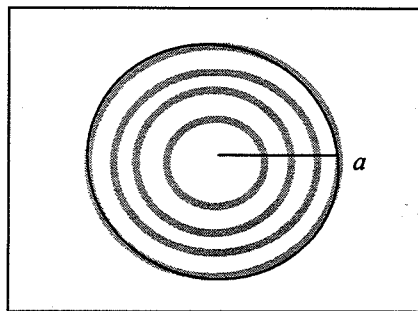


圖 1a 感應電磁爐

由於實際之磁力線分布不易處理，牽涉之數學推演過程較煩，以下用圖 1b 之簡化模型來探討電磁爐的原理與決定其電熱功率的因素。

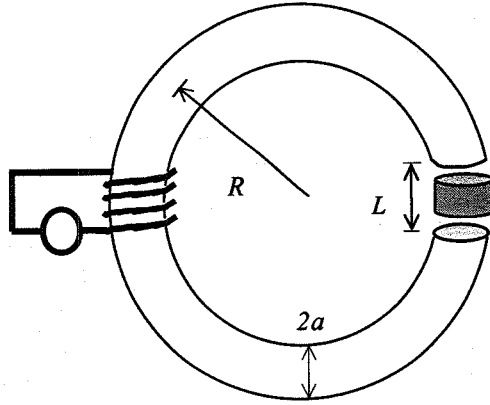


圖 1b 簡化的感應電磁爐模型

圖 1b 所示之輪胎形實心圓環，其磁導率為 μ' ，電容率為 ϵ' ，電導率為 σ' ，長度為 L' ，其圓形橫截面之直徑為 $2a$ ，圓環中心線之半徑為 R 。此圓環纏繞有 N 匝線圈，與電源 S 形成迴路，當線圈通有電流時，可以在圓環內產生均勻磁場。此部分相當於電磁爐內產生磁場的線圈與磁力線所通過的周圍空氣。此圓環有一長度為 L 的小缺口，以一厚度為 L 的金屬圓盤置入缺口後，正好可以將缺口補全。此金屬圓盤就相當於金屬鍋的鍋底，可以因其內之磁場隨時間變化而產生感應渦電流，進而發熱。假設此金屬圓盤之磁導率為 μ 、電容率為 ϵ ，電導率為 σ 。所有的磁力線都視為全部集中在圓環與圓盤內，以均勻分布的形式，垂直通過整個通路的各個橫截面。

設交流電路提供給磁場線圈之電流 $I(t)$ 為

$$I(t) = I_m \sin \omega t \quad (4)$$

(A) 先求鍋底圓盤內磁場的時變率為 dB/dt 時，圓盤內的電場 E 與感應電流在此圓盤內產生的電熱功率 P ：

如圖 2 左邊小圖所示，設圓盤在半徑為 r 的小圓內，有 Φ 的磁通量穿過，則 $\Phi = \pi r^2 B$ 。當磁場的時變率為 dB/dt 時，根據法拉第電磁感應定律，可得沿小圓一圈的感應電動勢 V 與距離圓盤中心軸線為 r 處的感應電場 $E(r)$ 如下：

$$V = -\frac{d\Phi}{dt} = -\pi r^2 \frac{dB}{dt} \quad (5a)$$

$$E(r) = \frac{V}{2\pi r} = -\frac{r}{2} \frac{dB}{dt} \quad (5b)$$

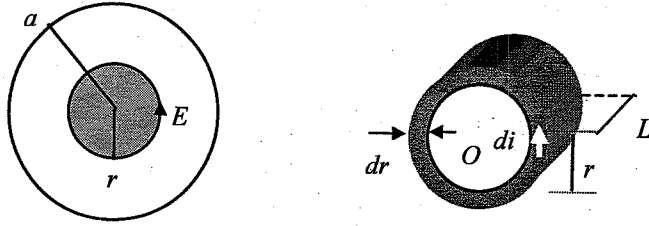


圖 2 圓形截面(左)與圓筒(右)

以 di 表示環繞圓盤中心軸線、在半徑 r 到 $r+dr$ 的圓筒間流動的渦電流，則因電流通路為半徑為 r 的同心圓，其長度 ℓ 為 $2\pi r$ ，截面積 A 為半徑差 dr 與圓盤厚度 L 的乘積，故其對應之電阻 Ω 與電流 di 分別為

$$\Omega = \rho \frac{\ell}{A} = \frac{1}{\sigma} \cdot \frac{2\pi r}{L dr} \quad (5c)$$

$$di = \frac{V}{\Omega} = \frac{2\pi r E}{\Omega} = \sigma E L dr \quad (5d)$$

因電場 E 如(5b)式，故圓盤內繞圓盤中心軸線流動之傳導電流 i_c 為

$$i_c = \int di = \int_0^a \sigma E L dr = -\frac{1}{2} \sigma L \frac{dB}{dt} \int_0^a r dr = -\frac{a^2}{4} \sigma L \frac{dB}{dt} \quad (6a)$$

而對應之馬克士威位移電流則為

$$i_b = \int_0^a \varepsilon \frac{dE}{dt} L dr = -\frac{1}{2} \varepsilon L \frac{d^2 B}{dt^2} \int_0^a r dr = -\frac{a^2}{4} \varepsilon L \frac{d^2 B}{dt^2} \quad (6b)$$

在圓盤內半徑 r 到 $r+dr$ 間之渦電流所產生的電熱功率 dP ，可依焦耳定律，並利用(5b)式與(5c)式，求得為

$$dP = \frac{V^2}{\Omega} = \frac{(2\pi r E)^2}{\Omega} = 2\pi L r dr \sigma E^2 \quad (6c)$$

故整個圓盤之電熱功率 P 為

$$P = \int dP = \int_0^a 2\pi L r \sigma \frac{r^2}{4} \left(\frac{dB}{dt}\right)^2 dr = \frac{\pi a^4 \sigma L}{8} \left(\frac{dB}{dt}\right)^2 \quad (6d)$$

同理，可得圓環其餘（即不包括圓盤）部分之感應電流 i'_c 、位移電流 i'_b 與電熱功率 P' 為

$$i'_c = -\frac{a^2}{4} \sigma' L' \frac{dB}{dt} \quad (7a)$$

$$i'_b = -\frac{a^2}{4} \varepsilon' L' \frac{d^2 B}{dt^2} \quad (7b)$$

$$P' = \frac{\pi a^4 \sigma' L'}{8} \left(\frac{dB}{dt}\right)^2 \quad (7c)$$

故繞圓環中心線之總電流為電流 i_c 、 i_b 、 i'_c 及 i'_b 與線圈電流 $I(t)$ 之總和，即

$$\sum i = I + i_c + i'_c + i_d + i'_d = NI - \frac{a^2}{4} \left\{ (\sigma L + \sigma' L') \frac{dB}{dt} + (\varepsilon L + \varepsilon' L') \frac{d^2 B}{dt^2} \right\} \quad (8)$$

(B)其次求在任意時刻 t 之磁場 B :

考慮沿圓環中心線 (即半徑為 R 之圓) 之磁力線。由含有馬克士威修正項之安培定律與(8)式得

$$\oint \frac{B}{\mu} ds = B \left(\frac{L}{\mu} + \frac{L'}{\mu'} \right) = NI - \frac{a^2}{4} \left\{ (\sigma L + \sigma' L') \frac{dB}{dt} + (\varepsilon L + \varepsilon' L') \frac{d^2 B}{dt^2} \right\} \quad (9)$$

將上式移項整理，並代入(4)式之結果後，可得

$$(\varepsilon L + \varepsilon' L') \frac{d^2 B}{dt^2} + (\sigma L + \sigma' L') \frac{dB}{dt} + \frac{4}{a^2} \left(\frac{L}{\mu} + \frac{L'}{\mu'} \right) B = \frac{4N}{a^2} I_m \sin \omega t \quad (10a)$$

上式各項之係數如改用下列符號代表之，即

$$\omega_0^2 = \frac{4(L/\mu + L'/\mu')}{a^2(\varepsilon L + \varepsilon' L')}, \quad b = \frac{\sigma L + \sigma' L'}{\varepsilon L + \varepsilon' L'}, \quad F_m = \frac{4N}{a^2(\varepsilon L + \varepsilon' L')} I_m \quad (10b)$$

則可看出其形式與外力驅動下之阻尼諧振子的運動方程式相同，而知其穩定態之解可表示為

$$B(t) = B_m \sin(\omega t - \phi) \quad (10c)$$

$$B_m = \frac{F_m}{\sqrt{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + (b\omega)^2}}, \quad \phi = \tan^{-1} \frac{b\omega}{(\omega_0^2 - \omega^2)} \quad (10d)$$

(C)平均電熱功率 $\langle P \rangle$:

由(6d)式與(10c)式，整個圓盤之平均電熱功率 $\langle P \rangle$ 為

$$\langle P \rangle = \frac{\pi a^4 \sigma L}{8} \cdot \frac{\omega}{2\pi} \int_0^{2\pi/\omega} \left(\frac{dB}{dt} \right)^2 dt = \frac{\pi a^4 \sigma L}{16} (\omega B_m)^2 \quad (11a)$$

將(10b)式之關係代入上式可得

$$\langle P \rangle = \frac{\pi a^4 L}{16} \frac{\omega^2 \sigma F_m^2}{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + (b\omega)^2} \quad (11a)$$

一般電磁爐的設計，做為磁場通路之圓環，其實就是周圍空氣，即圓環之磁導率 $\mu' = \mu_0$ ，電容率 $\varepsilon' = \varepsilon_0$ ，電導率 $\sigma' = 0$ ，故(10b)式之係數 b 可近似為

$$b \cong \frac{\sigma L}{\varepsilon L + \varepsilon_0 L'} \quad (11b)$$

將上式與(10b)式之結果代入(11a)式可得

$$\langle P \rangle = \pi L \left(\frac{N I_m}{L} \right)^2 \frac{\omega^2 \sigma}{\left\{ \left(\frac{4}{a^2} \right) \left(\frac{1}{\mu_0} + \frac{L'}{\mu L} \right) - \omega^2 \left(\varepsilon + \frac{L'}{L} \varepsilon_0 \right) \right\}^2 + (\omega \sigma)^2} \quad (11c)$$

根據此式，當金屬圓盤 (或金屬鍋) 為絕緣體 (電導率 $\sigma = 0$) 或無電阻之完全導體 ($\sigma \rightarrow \infty$) 時，其平均電熱功率 $\langle P \rangle$ 均為零，此與預期之正確結果一致，故(11c)式沒有

顯而易見之矛盾。注意：如果令(6a)式中的傳導電流 i_c 為零，亦即在估計磁場時只用電流線圈所產生的外加磁場，而忽略了渦電流產生的反抗磁場時，則(11c)式右邊的分母，將缺少 $(\omega\sigma)$ 的平方項，整個式子只剩下分子含有 σ 的一次方，因此平均電熱功率將與電導率 σ 成正比，換言之，對完全導體而言，其平均電熱功率就會成為無限大，此結果明顯是錯誤的。

因金屬鍋底部厚度 L 通常遠小於空氣中磁通路的長度 L' ，故可假設 $L' \gg L$ 。為簡化公式，單位未明白標示之各量，均假定採用國際系統(S.I.)單位。若以 K_m 代表相對磁導率，則

$$\mu = K_m \mu_0 = 4\pi K_m \times 10^{-7}, \quad \epsilon_0 = \frac{1}{4\pi(9 \times 10^9)}$$

故得

$$\begin{aligned} \left(\frac{4}{a^2}\right)\left(\frac{1}{\mu_0} + \frac{L'}{\mu L}\right) - \omega^2\left(\epsilon + \frac{L'}{L}\epsilon_0\right) &\cong \left(\frac{4}{a^2\mu_0}\right)\left(1 + \frac{L'}{K_m L}\right) - \frac{L'}{L}\omega^2\epsilon_0 \\ &= \frac{4}{a^2\mu_0} + \left(\frac{L'}{L}\right)\left(\frac{4}{\mu a^2} - \omega^2\epsilon_0\right) \\ &= \frac{4}{a^2\mu_0} + \left(\frac{L'}{4\pi a^2 L}\right)\left(\frac{4 \times 10^7}{K_m} - \frac{\omega^2 a^2}{9 \times 10^9}\right) \end{aligned}$$

以家用電磁爐使用的 60 Hz 交流電為例， $\omega = 120\pi$ ， $a = 0.1m$ ，即使設法提高磁場的變化頻率，上式左邊第二項來自馬克士威位移電流的貢獻，一般仍遠小於第一項而可予忽略，故(11c)式可近似為

$$\langle P \rangle = \frac{\pi a^4 L}{16} \left(\frac{NI_m}{L'}\right)^2 \frac{\mu_0^2 \omega^2 \sigma}{\left(\frac{1}{K_m} + \frac{L}{L'}\right)^2 + \left(\frac{\mu_0 \sigma \omega L \pi a^2}{4\pi L'}\right)^2} \quad (11d)$$

設 $L' = 200L$ ， $\omega = 120\pi$ ， $a = 0.1m$ ，則由上式中之分母得

$$\begin{aligned} \alpha &= \frac{1}{K_m} + \frac{L}{L'} \\ \beta &= \frac{\mu_0 \sigma \omega L \pi a^2}{4\pi L'} = \sigma \frac{10^{-7} \times 120 \times \pi^2 \times 10^{-2}}{2 \times 10^2} \cong 0.5 \times 10^{-8} \sigma \end{aligned} \quad (11e)$$

利用上式，(11d)式可改寫為

$$\langle P \rangle = \frac{\pi a^4 L \omega \mu_0^2}{16} \left(\frac{NI_m}{L'}\right)^2 \frac{\sigma}{\alpha^2 + \beta^2} \quad (12)$$

表 2 中列出依(11e)式與(12)式所得之鐵與鋁之相關數據。由此表最後一欄與(12)式，可看出鐵鍋與鋁鍋之平均電熱功率，相差約為 100 倍，此較(3)式之估計為低，但仍清楚顯示在電磁爐上使用時，鋁鍋遠不及鐵鍋。

表 2 鐵與鋁之平均電熱功率比較

$\frac{L}{L'} = \frac{1}{200}$	K_m	σ	α	β	$\frac{\sigma}{\alpha^2 + \beta^2}$
鐵	$\approx 10^3$	$\approx 10^7$	$\approx 6 \times 10^{-3}$	$\cong 0.05$	$\approx 4 \times 10^9$
鋁	1	$\approx 3.8 \times 10^7$	1	$\cong 0.19$	$\approx 4 \times 10^7$

在分母可用其第一項近似，且 $K_m L \ll L'$ 之情形下，(11d)式可改寫為

$$\langle P \rangle = \frac{\pi a^4}{16} \left(\frac{N I_m}{L'} \right)^2 \frac{\sigma \mu^2 \omega^2 L}{(1 + K_m \frac{L}{L'})^2} \cong \frac{\pi a^4}{16 \rho} \left(\frac{\mu N I_m}{L'} \right)^2 \omega^2 L \quad (13a)$$

因金屬圓盤部分之磁場 B 可由螺線圈內之磁場公式求得(假設圓環全長都有線圈纏繞)，即

$$B = \frac{\mu N I_m}{L'} = K_m \mu_0 \left(\frac{N}{L'} \right) I_m \quad (13b)$$

而其電阻 R 為

$$R \propto \rho \frac{2\pi a}{aL} \quad (13c)$$

故(13a)式亦可改寫

$$\langle P \rangle \propto \frac{\pi a^4 \omega^2}{16} \cdot \frac{B^2}{R} \quad (13d)$$

顯示在此情形下之平均電熱功率與磁場平方成正比，而與電阻成反比。此與(3)式所用之公式一致，但此式為(11d)式之特例，顯然並不具一般性。