中學生通訊解題第五期參考解答與評析

臺北市立建國高級中學

問題編號
89501

n為比 1 大的正整數，試證明2^n-1不是完全平方數，也不是完全立方數。

參考解答：

(1) 設2^n-1為完全平方數，則存在一個整數a，使$2^n-1=a^2$

因為a^2為奇數，所以a為奇數

設$a=2k+1$，其中k為整數

$a^2=4k^2+4k+1$

所以$2^n-1=4k^2+4k+1$

$2^n=4k^2+4k+2$

$2^{n-1}=2k^2+2k+1$

偶數 = 奇數，不成立

所以假設2^n-1為完全平方數不成立

故得證2^n-1不是完全平方數

(2) 設2^n-1為完全立方數，則存在一個正整數a，使$2^n-1=a^3$

因為a^3為奇數，所以a為奇數，a^2-a+1為奇數

因為$2^n=a^3+1=(a+1)(a^2-a+1)$，a^2-a+1為2^n的因數

得到2^n有奇數因數，不成立

所以假設2^n-1為完全立方數不成立

故得證2^n-1也不是完全立方數

評析：(1) 此題首先要看學生是否會用反證法，再利用完全平方及立方和等基本乘法公式，做簡單的判別奇偶。

(2) 參答者中，北市永吉國中黃紹倫同學答題清楚嚴謹，值得鼓勵。

(3) 本題參答人數共有 251 人，平均得分為 5.54 分，得分率為 78%。

問題編號
89502

有一個數列共有n項，此數列中任何 7 個連續項之和都是負數，任何 11 個連續項之和

都是正數。試求滿足上述條件的 n 值中最大爲多少？

參考解答：

解一：

設此數列爲 $a_1, a_2, a_3, \cdots, a_n$

$\because a_k + a_{k+1} + a_{k+2} + \cdots + a_{k+6} < 0 \quad , k = 1, 2, 3 \cdots\cdots(1)$

$a_k + a_{k+1} + a_{k+2} + \cdots + a_{k+10} > 0 \quad , k = 1, 2, 3 \cdots\cdots(2)$

由(1),(2) $\Rightarrow \quad a_{k+7} + a_{k+8} + a_{k+9} + a_{k+10} > 0$

即由第 8 項起，任意連續 4 項和皆爲正數……(a)

$\Rightarrow \quad a_8 + a_9 + a_{10} + a_{11} > 0 \cdots\cdots(3)$

$\Rightarrow \quad a_{11} + a_{12} + a_{13} + a_{14} > 0 \cdots\cdots(4)$

由(3)+(4)

$\Rightarrow \quad a_8 + a_9 + a_{10} + 2a_{11} + a_{12} + a_{13} + a_{14} > 0$

又因 $a_8 + a_9 + a_{10} + a_{11} + a_{12} + a_{13} + a_{14} < 0$

$\therefore \quad a_{11} > 0$ ，如此類推 $a_{12} > 0$ ，$a_{13} > 0$

$\Rightarrow \quad a_{11} + a_{12} + a_{13} > 0$

又當 $n \geq 17$ 時， $a_{11} + a_{12} + a_{13} + a_{14} + a_{15} + a_{16} + a_{17} < 0$

$\Rightarrow a_{14} + a_{15} + a_{16} + a_{17} < 0$

由推論(a)矛盾

$\therefore$故 $n < 17$ ，即最多爲 16

解二：

5,5,-13,5,5,5,-13,5,5,-13,5,5,-13,5,5,5,-13,5,5 爲滿足問題條件之數列

其長度爲 16 項

令 S_n 表示具有上述性質的 n 項實數列

僅需證 S_{17} 不合，於是本題答案就是 16 項

如果 S_{17} 滿足要求，令 $a_1 \sim a_{17}$ 表示 S_{17} 的各項

$$a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + a_5 + a_6 + a_7 < 0$$
$$a_2 + a_3 + a_4 + a_5 + a_6 + a_7 + a_8 < 0$$
$$\vdots$$
$$\vdots$$
$$\vdots$$
$$a_{11} + a_{12} + a_{13} + a_{14} + a_{15} + a_{16} + a_{17} < 0$$

上表中所有橫排的和爲負，所有的直排的和爲正，矛盾

故所有具有 17 項或以上的都不合，$n=16$ 即爲所求

評析：1.本題爲數列組合問題，難度較高，如果依照題意的假設及嘗試組合驗證，相信必能掌握解題關鍵。

2.參答中以北市永吉國中黃紹倫同學表達完整，值得嘉許，此外答題優良者有彰化員林國中羅元隆、台北縣新莊國中吳之堯、福和國中劉胤廷、高雄市陽明國小六年級蔡政江同學。

3.本題參答人數共有 14 人，平均得分爲 5.35 分，得分率爲 76%。

問題編號
89503

設有四個數 $1,a,b,c\ (1<a<b<c)$，現在將這四個數兩兩相加構成六個不同的數，若將此六個數由小到大順序排列會形成一個等差數列，且和爲 201。試求 a,b,c 之值。

參考解答：

由條件知其兩兩之和爲六個數，有如下之關係式：

$$\begin{cases} 1+a<1+b<1+c \\ a+b<a+c<b+c \\ 1+b<a+b \\ 1+c<a+c \end{cases}$$

根據 $1+c$ 和 $a+b$ 的大小關係可分爲兩種情況：

(1) $1+a<1+b<1+c<a+b<a+c<b+c$

由等差數列性值得知：

$(b+c)-(a+c)=(a+c)-(a+b)=(a+b)-(1+c)=k$ (公差)

即 $b-a=c-b=a+b-c-1=k$

$b=a+k$ ，$c=b+k=(a+k)+k=a+2k$

$a+(a+k)-(a+2k)-1=k$

於是 $a=2k+1$ ，$b=3k+1$ ，$c=4k+1$

又六個數之和爲 201

$\therefore 3(a+b+c+1)=201$

$a+b+c=66$

$(2k+1)+(3k+1)+(4k+1)=66 \quad \Rightarrow \quad k=7$

故 $a=15$ ，$b=22$ ，$c=29$

(2) $1+a<1+b<a+b<1+c<a+c<b+c$

類似地，可得 $a=10$，$b=19$，$c=37$

解題重點：

1.本題的解題重點根據 $1+c$ 與 $a+b$ 的大小分成 $1+a<1+b<a+b<1+c<a+c<b+c$ 與 $1+a<1+b<1+c$ $a+b<a+c<b+c$ 兩個情形。

2.根據以上兩種形，再利用等差數列的定義即可解出 a,b,c 的值。

評析：1.有一半的答題者(約 51%)考慮到根據 $1+c$ 與 $a+b$ 的大小來分成兩種情形去討論，因此幾乎都能解出 a,b,c。可是也有接近一半的答題者(48%)只考慮了一種情形，而解得一組 a,b,c 的答案。另一方面，答題者都能利用等差數列的定義去解 a,b,c 的值，雖然國中教材中只學二元一次聯立方程組，但答題者都能推廣解法去解 a,b,c 的值。

2.本題的參答人數共有 97 人，答對的有 47 人，平均得分爲 4.12 分，得分率爲 59%。

問題編號
89504

有三個正數它們的乘積爲 1，且此三數的和大於它們的倒數和。試證明：這三個正數中恰有一數大於 1。

參考解答：

設此三正數爲 a,b,c

因爲 $abc=1$ 且 $a+b+c>\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}$

$$
\begin{aligned}
(a-1)(b-1)(c-1) &= abc-(ab+bc+ca)+(a+b+c)-1 \\
&=(a+b+c)-(ab+bc+ca) \\
&=(a+b+c)-\frac{ab+bc+ca}{abc} \\
&=(a+b+c)-(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c})>0
\end{aligned}
$$

這表示 $a-1,b-1,c-1$ 三數中有一個正數或三個都爲正數

如果三個都是正數，則 a,b,c 都比 1 大與 $abc=1$ 不合

所以三個都是正數不成立

故得證 $a-1,b-1,c-1$ 三數中恰有一個正數

即 a,b,c 三數中恰有一數大於 1

評析：1.本題分數的給法爲：5 分或以上者基本上被認爲答對，但可由其答題的品質，再細分爲 5、6、7 分三等而 4 分或以下者則爲部分對（論證過程中有明顯瑕疵者）或答錯卷。

2.參答者中以北市師大附中莫立平，北縣秀峰國中林榮章，北市敦化國中劉峻豪，永吉國中黃紹倫，仁愛國中翁書鈞，北縣福營國中洪偉翔，新莊國中吳之堯，永和國中周朕，中正國中謝卓叡、羅卓吾，基隆二信國中黃園心。北縣江翠國中張源平，秀峰國中葉昱麟，北市金華國中賴昭宇、林建勳，再興中學高業航，北縣竹林中學馮孝琳，土城中正國中吳致宏，東海中學林聖智，北市民生國中黃志偉、曾怡嘉、劉瑋琪、簡嘉宏、洪偉傑，北市南門國中李舒平，北投國中黃愛茹，高市陽明國小蔡政江，基市銘傳國中江政融。

3.本題參達人數共有 131 人，平均得分為 4.88 分，得分率為 70%。

問題編號
89505

對於自然數 n，如果能找到另外兩個相異的自然數 a,b 使得 $n=a+b+ab$，則稱 n 為一個" δ 數"，試問由 1 到 50 的自然數中" δ 數"有多少個？

參考解答：

因為 $n=a+b+ab$

所以 $n+1=ab+a+b+1=(a+1)(b+1)$

只要 $n+1$ 不是質數，就能找到 a,b 兩個自然數滿足上式

因為 $1\le n\le 50$ ， $2\le n+1\le 51$

由 2 到 51，質數個數有 15 個

又 $n+1$ 為完全平方數，4 , 9 , 25 , 49 時

找不到相異的 a,b 兩個自然數滿足 $n+1=(a+1)(b+1)$

所以由 1 到 50 自然數中，〝δ 數〞有 31 個

評析：1.本題為一個簡單的數論題，學生只要會因式分解的概念大多能解出此題。

2.答題優良學生計有：北市民生國中黃志偉、鍾佳琦、簡嘉宏，師大附中陳義軒，金華國中趙心宇，敦化國中周鼎智，大直中學陳俊曄，基隆銘傳國中江政融，二信中學黃園心，北縣福和國中劉胤廷、江翠國中黃明山，彰化員林國中羅元隆，高雄市陽明國小蔡政江。

3.參答人數有 351 人，平均得分數為 5.02 分，得分率為 72%。

說明：通訊解題第八、九期題目，將於 89 年 9、10 月份在台師大科教月刊與建中通訊網路上公布，到時歡迎同學再行參加。