2000 年第 12 屆亞太數學奧林匹亞競賽試題

參考解答與評分標準

中華民國數學奧林匹亞委員會

問題一：求下列級數的和

$$S=\sum_{i=0}^{101}\frac{x_i^3}{1-3x_i+3x_i^2}\text{，其中 } x_i=\frac{i}{101}\text{。}$$

【參考解答與評分標準】：

（解法一）：令

$$f(x)=\frac{x^3}{1-3x+3x^2}\text{。}$$

因為$1-3x+3x^2=(1-x)^3+x^3$，我們可得

$$f(x)=\frac{x^3}{(1-x)^3+x^3} \quad \text{且} \quad f(x)+f(1-x)=1\text{。} \tag{1}$$

【證明出(1)式得 5 分】

因此，

$$S=\sum_{i=0}^{101}[\,f(x_i)+f(x_{101-i})\,]=51\text{。}$$

【得到正確答案得 2 分】

（解法二）：

$$S=\sum_{i=0}^{101}\frac{\left(\frac{i}{101}\right)^3}{1-3\left(\frac{i}{101}\right)+3\left(\frac{i}{101}\right)^2}=\sum_{i=0}^{101}\frac{i^3}{(101)^3-3i\cdot(101)^2+3i^2\cdot(101)}\text{，}$$

由此可得

$$S=\sum_{i=0}^{101}\frac{i^3}{(101-i)^3+i^3}\text{。} \tag{2}$$

【證明出(2)式得 4 分】

所以

$$S=\frac{1^3}{100^3+1^3}+\frac{2^3}{99^3+2^3}+\cdots+\frac{49^3}{52^3+49^3}+\frac{50^3}{51^3+50^3}$$
$$+\frac{100^3}{1^3+100^3}+\frac{99^3}{2^3+99^3}+\cdots+\frac{52^3}{49^3+52^3}+\frac{51^3}{50^3+51^3}+\frac{101^3}{0^3+101^3}.$$

由此可得$S=51$。

【看出(2)式中的對稱項之和為 1，且依此得到答案得 3 分】

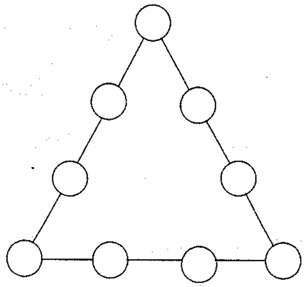
問題二：將九個數字 1, 2, ⋯, 9 全部填入以下三角形邊上的九個小圓中，使得每一個小圓

中恰有一個數字，且滿足：

(i)三角形每一邊上的四個數字和都相等；

(ii)三角形每一邊上的四個數字之平方和也都相等。

試問有多少種不同的填法？



【參考解答與評分標準】：設三角形三個頂點上的數分別爲 x, y, z。令 s 表示三角形一邊上的四個數字和；而 S 表示四個數字之平方和；且令 $V=x+y+z$，而 $W=x^2+y^2+z^2$。則由 $1+2+\cdots+9=45$ 及 $1^2+2^2+\cdots+9^2=285$ 可得

$$3s=45+V, \tag{1}$$

$$3S=285+W. \tag{2}$$

由此可知，V 與 W 都是 3 的倍數。

【獨立得 2 分】

因此，可推得 $x\equiv y\equiv z \pmod 3$，否則 3 就無法同時整除 V 與 W。

【累計得 3 分】

(i)若 $x\equiv y\equiv z\equiv 0 \pmod 3$，則 $\{x,y,z\}=\{3,6,9\}$。由此可得 $V=18, W=126$。由(1)與(2)可得 $s=21, S=137$。經由旋轉或翻轉三角形，我們可得到圖 1 的情形。注意：8 與 9 不能在同一邊上，否則 $8^2+9^2=145>S$。因此，8 與 3, 6 在同一邊上。由 $s=21$ 得該邊上另一數爲 4。但此時，$3^2+4^2+6^2+8^2=125\neq S$，矛盾！故情況(i)無解。

【獨立得 1 分】

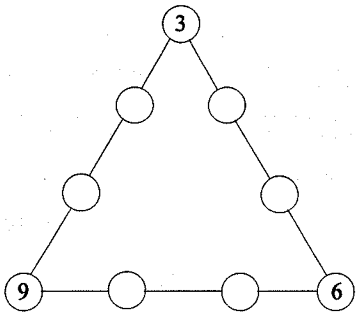


圖 1

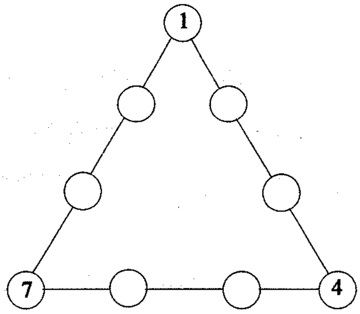


圖 2

(ii)若 $x\equiv y\equiv z\equiv 1 \pmod 3$，則 $\{x,y,z\}=\{1,4,7\}$。由此可得 $V=12, W=66$。由(1)與(2)可得

$s=19, S=117$ 。經由旋轉或翻轉三角形，我們可得到圖 2 的情形。注意：9 與 4, 7 不能在同一邊上，否則 $4+7+9=20>s$ 。同樣的，9 不能與 1, 7 在同一邊上。否則 $1^2+7^2+9^2=131>S$。因此 9 與 1, 4 在同一邊上。由 $s=19$ 得該邊上另一數爲 5。但此時，$1^2+4^2+5^2+9^2=123\neq S$ ，矛盾！故情況(ii)也是無解。

【獨立得 1 分】

(iii)若 $x\equiv y\equiv z\equiv 2\ (\mathrm{mod}\ 3)$，則 $\{x,y,z\}=\{2,5,8\}$。由此可得 $V=15, W=93$ 。由(1)與(2)可得 $s=20, S=126$,。經由旋轉或翻轉三角形，我們可得到圖 3-1 的情形。注意：9 與 5, 8 不能在同一邊上，否則 $5+8+9=22>s$ 。同樣的，9 不能與 2, 5 在同一邊上。否則 $2^2+8^2+9^2=149>S$。因此 9 與 2, 5 在同一邊上。由 $s=20$ 得該邊上另一數爲 4(圖 3-2)。此時，$2^2+4^2+5^2+9^2=126=S$ 。

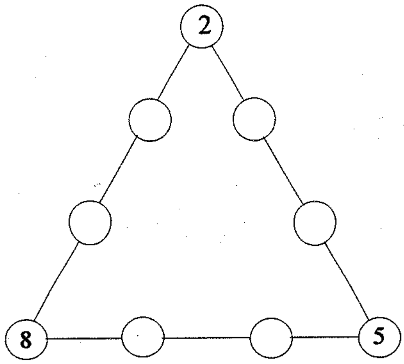


圖 3-1

注意：7 與 5, 8 不能在同一邊上，否則 $5+7+8=20=s$ 。因此，7 與 2, 8 在同一邊上。由 $s=20$ ，得該邊令一數爲 3(圖 3-3)。此時，$2^2+3^2+7^2+8^2=126=S$。由此可得剩下的 1, 6 必與 5, 8 在同一邊上。此時，$1+5+6+8=20$, $1^2+5^2+6^2+8^2=126=S$。注意：1, 6 可對調位置，3, 7 可對調位置，4, 9 可對調位置，故此時共有 $2\cdot 2\cdot 2=8$ 組解。但三角形的三頂點上的數 2, 5, 8 之位置可隨意互換，共有 $3!=6$ 種情形，故所求共有 $8\cdot 6=48$ 組解。

【獨立得 2 分】

【註】：若僅找出一組正確解但無分析過程，則只能得 1 分。

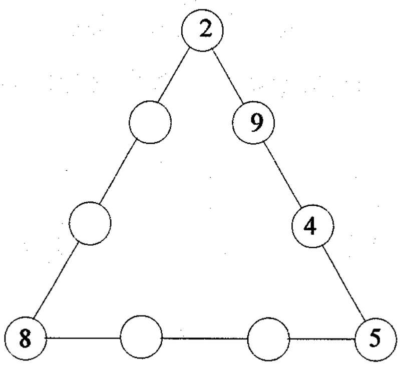


圖 3-2

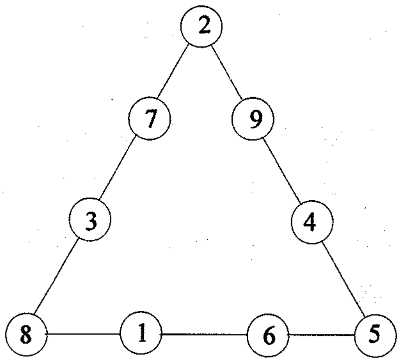


圖 3-3

問題三：過三角形 ABC 的頂點 A 之中線及內角平分線分別與 $\overline{BC}$ 相交於點 M 及 N。令通過 N 而與 $\overline{NA}$ 垂直的直線分別與 $\overline{MA}$ 及直線 BA 相交於點 Q 及點 P，且通過 P 而與直線 BA 垂直的直線與直線 AN 相交於點 O。試證：直線 QO 與 $\overline{BC}$ 垂直。

【參考解答與評分標準】：

（解法一）：如果$\angle B=\angle C$，明顯成立。

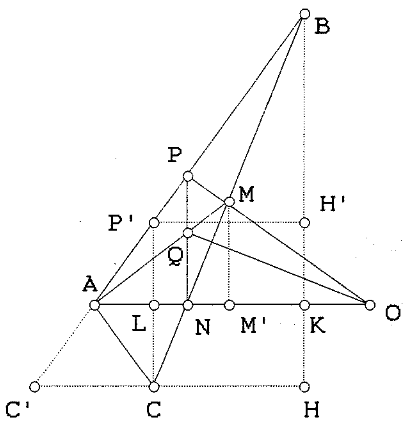
不失一般性，現在假設$\angle B<\angle C$。

延長 BA 到 C'，使得 $AC'=AC$，則 $CC'/\!/AN$。

通過 B 作 CC'的垂線 BH 交 CC'於 H。

過 C 作 BH 的平行線 CP'交 AN 於 L 且交 AB 於 P'。則 AN 平分線段 HH'於點 K，其中點 H'在 BH 上且 $P'H'$平行 CC'。

過 M 作 AN 的垂線 MM'交 AN 於 M'。



【能繪出此圖得 2 分】

因爲 M 是 BC 的中點，$MM'=\dfrac{KB-KH}{2}=\dfrac{KB-KH'}{2}=\dfrac{H'B}{2}$, $AM'=\dfrac{AL+AK}{2}=\dfrac{C'H}{2}$ 由相似三角形，有 $NQ:AN=M'M:AM'=H'B:C'H$ 或 $NQ:H'B=AN:C'H=NP:HB$

【能建立線段的某些關係得 1 分】

因此　　$NQ:NP=H'B:HB=CH:C'H$

但是　　$NP:NO=AN:NP=C'H:HB$

因此，$NQ:NO=CH:HB$；因而直角三角形 ONQ 與 CHB 相似。因爲 ON 與 HB 垂直，所以 OQ 與 BC 垂直。

【得 4 分】

（解法二）：考慮以 N 爲原點，NO 爲 x 軸，NP 爲 y 軸。則直線 AB, AC, PO, BC 的方程式爲

$$\begin{aligned}
&AB:\quad y=ax+b, && a>0, b>0\\
&AC:\quad y=-ax-b\\
&PO:\quad y=-\frac{1}{a}x+b\\
&BC:\quad y=cx, && c>0
\end{aligned}$$

【找出直線 AB, AC, PO, BC 的方程式得 3 分】

且點 B, C, M, A, O, Q 的座標爲

$$B\left(\frac{b}{c-a},\frac{cb}{c-a}\right)\qquad C\left(-\frac{b}{c+a},-\frac{bc}{c+a}\right)\qquad M\left(\frac{ab}{c^2-a^2},\frac{abc}{c^2-a^2}\right)$$

$$A\left(-\frac{b}{a},0\right)\qquad O(ab,0)\qquad Q\left(0,\frac{ab}{c}\right)$$

【找出點 B, C, M, A, O, Q 的座標得 2 分】

得出 OQ 的方程式爲

$$y=-\frac{1}{c}x+\frac{ab}{c}$$

因此 OQ 與 BC 垂直。

【再得 2 分】

問題四：設 n,k 爲滿足 $n>k$ 的正整數。證明：

$$\frac{1}{n+1}\cdot\frac{n^n}{k^k\cdot(n-k)^{n-k}}<\frac{n!}{k!\cdot(n-k)!}<\frac{n^n}{k^k\cdot(n-k)^{n-k}}\text{。}$$

【參考解答與評分標準】：

（解法一）：

(1)因爲 $n>k$，所以

$$n^k=(k+(n-k))^n=\sum_{m=0}^{n}\binom{n}{m}k^m(n-k)^{n-m}>\binom{n}{k}k^k(n-k)^{n-k}\ ;$$

因此

$$\binom{n}{k}<\frac{n^n}{k^k(n-k)^{n-k}}\ 。$$

【證明出上式得 3 分】

(2)當 $0\le m\le n$ 時，

$$\binom{n}{k}k^k(n-k)^{n-k}\ge\binom{n}{m}k^m(n-k)^{n-m}\ 。$$

【證明出上式得 2 分】

(3)由(2)可得

$$(n+1)\binom{n}{k}k^k(n-k)^{n-k}>\sum_{m=0}^{n}\binom{n}{m}k^m(n-k)^{n-m}=n^n\ 。$$

所以

$$\frac{n^n}{k^k(n-k)^{n-k}}<(n+1)\binom{n}{k}\ 。$$

【證明出上式得 2 分】

（解法二）：

(1)將右式化為

$$\binom{m+k}{k}<\frac{(m+k)^{m+k}}{k^k m^m}\ 。$$

【利用數學歸納法(對 k)證得上式得 3 分】

(2)證明左式：

$$\frac{1}{n+1}\cdot\frac{n^n}{k^k\cdot(n-k)^{n-k}}<\binom{n}{k}.$$

定義函數 $f_r(m)=\binom{n}{m}r^m(1-r)^{n-m},(0<r<1,0\le m\le n)$。

(a)證明當 $nr+r-1<m<nr+r$ 時， $f_r(m)$ 有最大值。

【得 2 分】

(b)取 $r=\frac{k}{n},m=k$ 時有

$$1=\sum_{j=0}^{n}\binom{n}{j}r^j(1-r)^{n-j}<(n+1)\binom{n}{m}r^m(1-r)^{n-m}\ ;$$

由此可知

$$1<(n+1)\binom{n}{k}\left(\tfrac{k}{n}\right)^{k}\left(1-\tfrac{k}{n}\right)^{n-k}\text{。}$$

因此，

$$\frac{1}{n+1}\cdot\frac{n^{n}}{k^{k}\cdot(n-k)^{n-k}}<\binom{n}{k}$$

【得 2 分】

問題五：給定數列 0, 1, ⋯, n 的一個排列$(a_0,a_1,\cdots,a_n)$。當$i>0$, $a_i=0$ 且 $a_{i-1}+1=a_j$時，將 a_i 與 a_j 互換，稱作一次「合法轉換」。若排列$(a_0,a_1,\cdots,a_n)$可經由有限次「合法轉換」而得到排列$(1,2,\cdots,n,0)$，則稱此排列爲「正規排列」。

試問哪些 n 能使排列$(1,n,n-1,\cdots,3,2,0)$是一個正規排列？

【參考解答與評分標準】：

（解法一）：設$P=(1,n,n-1,\cdots,3,2,0)$ ，$R=(1,2,\cdots,n-1,n,0)$。觀察出$n=1$和 2 時，P 顯然是正規排列。現在假設$n>2$；現在分三種情形討論如下：

情形 1：n 是大於 2 的偶數。設$n=2k$, $k>1$；則從 P 可經 $k-1$個合法轉換得到如下的排列：$(1,n,0,n-2,n-1,n-4,n-3,\cdots,4,5,2,3)$。這個排列不能再有任何合法轉換，因此 P 不是正規排列。

【討論此情形得 2 分】

情形 2：n 形如2^j-1, $j\geq 1$。定義

$$P_i=(1,2,\cdots,2^i-1,0;n-2^i+1,\cdots,n-1,n;n-2\cdot 2^i+1,n-2\cdot 2^i+2,\cdots,n-2^i-1,n-2^i;$$
$$\cdots;2^i,2^i+1,\cdots,2\cdot 2^i-2,,2\cdot 2^i-1),\quad i=1,2,\cdots,j.$$

P_i 是由$\dfrac{n+1}{2^i}$個區段(blocks)所組成，每個區段有 2^i 個數，區段與區段之間用分號 “；” 區隔。除了第一個區段之外，其餘每個區段內的數都是遞增排列。P_1 可從 P 經由$\dfrac{n-1}{2}$個合法轉換得到，而 P_{i+1} 可從 P_i 經由$\dfrac{n+1}{2}$個合法轉換得到，$i=1,2,\cdots,j-1$。但$P_j=R$，因此 R 可從 P 恰經由$\dfrac{n-1}{2}+\dfrac{n+1}{2}(j-1)$個合法轉換得到；所以 P 是正規排列。

【討論此情形得 2 分】

情形 3：n 是奇數，但是 n 不是形如2^j-1。n 可唯一寫成$n=(2k+1)2^j-1$，其中j, k爲正整數。定義$P_1,P_2,\cdots,P_j$與情形 2 同。跟情形 2 一樣，P_j 可從 P 恰經由$\dfrac{j(n+1)}{2}-1$個合法轉換得到。然而，在此情形$P_j\neq R$，但再恰經由 k 個合法轉換可自 P_j 得到下列排列：

$(1,2,\cdots,2^j-1,2^j;n-2^j+1,n-2^j+2,\cdots,n-1,n;0,n-2\cdot 2^j+2,\cdots,$
$n-2^j-1,n-2^j;\cdots;2\cdot 2^j,2\cdot 2^j+1,\cdots,3\cdot 2^j-2,3\cdot 2^j-1;3\cdot 2^j,3\cdot 2^j+1,\cdots,$
$2\cdot 2^j-2,2\cdot 2^j-1)$

此後，不會再有任何合法轉換。因此 P 不是正規排列。

結論：P 是正規排列 $\Leftrightarrow n=2$ 或 $n=2^j-1$， $j=1,2,\cdots$ 。

【討論情形 3 及答案正確得 3 分】

【註】：沒有提及 $n=1,2$，最多僅得 6 分。

（解法二）：如果一個 1, 2, ⋯, n 的排列中某一段是形如⋯, $a, i, i+1, \cdots, i+k-1, b, \cdots$，其中 $a\neq i-1, b\neq i+k$，那麼這一段中的 $i, i+1, \cdots, i+k-1$ 稱爲長度爲 k 的上升線段，而 i 和 $i+k-1$ 將稱爲此線段的左端點和右端點。任意排列都能被畫分成數段長度不小於 1 的上升線段。

【得 1 分】

我們來討論排列中 0 的移動情形。若 0 在某一上升線段的內部：

$$i, 0, i+1, i+2,\cdots, i+k-1,$$

則 0 可經由一系列合法轉換移到右端點

$$i, i+1, i+2,\cdots, i+k-1, 0 。$$

若 0 在兩個上升線段之間：

$$\cdots, k-1, k, 0, i, i+1,\cdots$$

其中 $k<n, k+1\neq i$；則 $k+1$ 必是某一上升線段 A 的左端點：

$$\cdots, l-1, l, \underbrace{(k+1,k+2,\cdots)}_{A}, \cdots$$

因此 0 必須被迫和 $k+1$ 互換；接著 0 必須和 $l+1$ 互換。在此過程中，位於 A 左鄰的線段長度必增 1，而線段 A 的長度必少 1：

$$\cdots, l-1, l, l+1, (k+2, k+3, \cdots), \cdots$$

此過程稱爲 0 越過線段 A。

【得 1 分】

給定排列$(1, n, n-1, n-2, \cdots, 5, 4, 3, 2, 0)$，我們能互換 0 與 3, 然後互換 0 與 5 等等。若 n 是偶數，我們可以得到 $1, n, 0, n-2, n-1, \cdots, 4, 5, 2, 3$；然後不能再有任何合法轉換。因此，若 $n>2$, n 必爲奇數。

【證得 n 是奇數再加 1 分】

現在設 $n>1$ 爲奇數。我們有如下的排列：

$$1,0,\underbrace{n-1,n}_{\frac{n-1}{2}},\underbrace{n-3,n-2}_{\frac{n-3}{2}},\cdots,\underbrace{6,7}_{3},\underbrace{4,5}_{2},\underbrace{2,3}_{1}\text{，} \tag{1}$$

其中下標爲線段編號。接著 0 從右到左越過編號爲奇數的線段，且使編號爲偶數的線段長度都各增加 1。若 $\frac{n-1}{2}$ 爲偶數，0 可一直越過到編號爲 $\frac{n-3}{2}$ 的線段，這時的排列變成 $1,2,n-1,n,0,\cdots$ ，此種排列不能再有任何合法轉換。因此 $\frac{n-1}{2}$ 必須爲奇數；即 $n\equiv 3\ (\mathrm{mod}\ 4)$。如此我們將有如下的排列：

$$1,2,0,\underbrace{n}_{\frac{n-1}{2}},\underbrace{n-3,n-2,n-1}_{\frac{n-3}{2}},\underbrace{n-4}_{\frac{n-5}{2}},\cdots,\underbrace{7}_{3},\underbrace{4,5,6}_{2},\underbrace{3}_{1} \tag{2}$$

接著 0 與 3 互換，移到線段 1 且從右到左越過奇數號線段，最後形成一條每四個數爲一上升線段的畫分：

$$1,2,3,0,\underbrace{n-3,n-2,n-1,n}_{\frac{n-3}{2}},\cdots,\underbrace{8,9,10,11}_{2},\underbrace{4,5,6,7}_{1} \tag{3}$$

然後 0 必須越過奇數號線段。$\frac{n-3}{2}$ 必須爲奇數，否則這種過程被迫結束。如此，$n\equiv 7\ (\mathrm{mod}\ 8)$。重複此一過程 4 次後，我們可得到一條每 8 個數爲一上升線段的畫分：

$$1,2,3,4,5,6,7,0,\underbrace{n-7,\cdots,n}_{\frac{n-7}{2}},\cdots,\underbrace{8,9,10,11,12,13,14,15}_{1} \tag{4}$$

因此，$n\equiv 15\ (\mathrm{mod}\ 16)$，…等等。

此種過程結束 $\Leftrightarrow n\equiv 2^j-1\ (\mathrm{mod}\ 2^j)$ 且 $\frac{n-2^j-1}{2^j}=1$；即 $n=2^{j+1}-1$。

在這種情形下，排列變成 $1,2,\cdots,2^j-1,0,2^j,2^j+1,\cdots,2^{j+1}$。所以 0 能移到最右端，過程結束。因此，(1, n, n-1, n-2, …, 5, 4, 3, 2, 0)是正規排列 $\Leftrightarrow n=2$ 或 $n=2^j-1$, $j=1,2,\cdots$。

【得 4 分】

【註】：證明(1), (2), (3), (4)中的每一個可各得 1 分，但是最多只給 3 分。