

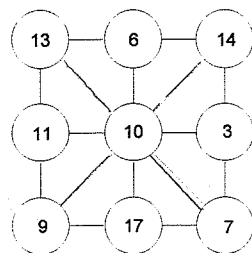
中學生通訊解題第四期解答及評析

臺北市立建國高級中學

問題編號

89401

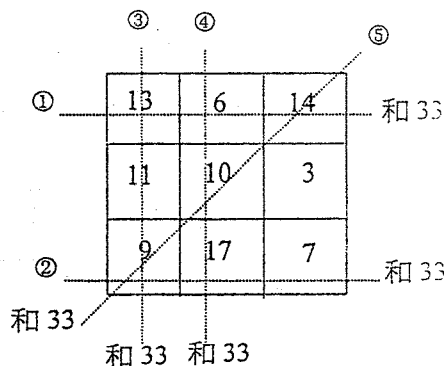
某家軍火製造公司配製了一種編號為 A-1 的烈性炸藥，分別裝在密封的小罐裡，如圖放置，每一罐子上的數目字代表該罐內所裝炸藥的容量，按規定同一直線上的炸藥容量絕對不准超過 30 個單位，以策安全。請問要達到安全要求，至少要移動那幾罐炸藥？如何安置？



解答：如圖。

(1)仔細檢查炸藥罐的放置圖：

- | | | | |
|-----|---------------|---|----|
| 第①線 | $13+6+14=33$ | } | 橫列 |
| 第②線 | $9+17+7=33$ | | |
| 第③線 | $13+11+9=33$ | } | 縱列 |
| 第④線 | $6+10+17=33$ | | |
| 第⑤線 | $14+10+17=33$ | | |



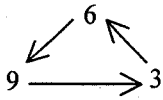
以上五條路線安置的「炸藥容量」都是 33 個單位（超過 30 個單位）。這是非常危險的！所以我們必須找出一種安置的方法使每一行、每一列和兩條對角線上的炸藥容量都不超過 30 個單位。

(2)其次把 9 個藥罐的容量加起來，總和是 90 個單位。因為 $90 \div 3 = 30$ 。故每一行、每一列都恰好安置 30 單位。

(3)想法：

- ① “9 單位”的藥罐位於②、③、⑤三條危險線的交會點上，所以優先考慮將它移走。
- ② 因 $9-6=3$ ，將“6 單位”移到原來“9 單位”的位置上，此時②、③、⑤三線的危險立刻解除（因每線都少 3 個單位）。
- ③ 因 $6-3=3$ ，將“3 單位”移到原來“6 單位”的位置上，此時①、④兩線的危險立刻解除（因每線都少 3 個單位）。
- ④ 最後將“9 單位”移到原來“3 單位”的位置上。如圖。

(4)顯然，互調任意兩罐，都無法解除以上 5 條線的危險，所以至少移動 3 罐：



13	6	14
11	10	3
9	17	7

評析：1.這是一道趣味性十足的“三階幻方”改編而成的「安置炸藥」問題。“三階幻方”出自洛書，傳說中國夏禹治水時發現的。

2.本題只用到“整數加法”這一點兒知識就可以解決，因此徵答者很多（包括國小學生）。答對的有 95%，但能深入作分析的並不多，能說出為什麼「至少移動三罐」者，少之又少。

3.有少部分的徵答者未注意到題目中所問：至少移動哪幾罐炸藥，所以很有創意的設計了很多種不同的安置法，比如：

9	10	11
14	3	13
7	17	6

3	13	14
17	6	7
10	11	9

6	11	13
17	10	3
7	9	14

11	6	13
9	7	14
10	17	3

4.答題分析較佳者有竹市光華國中賴俊儒、彰化縣員林國中羅元隆、北市師大附中莫立平、永吉國中黃紹倫、高市陽明國小蔡政江、基市銘傳國中蕭子訓、北市薇閣中學歐陽奕等。

5.參答人數有 286 人，平均得分數 5.89 分，得分率為 84%。

問題編號
89402

詩人徐志摩有一首膾炙人口的小詩 ~ 再別康橋，詩中有這樣一段話：

輕輕的我走了

正如我輕輕的來

現將短詩改變成一個算式

$$\sqrt{\text{輕輕的}} = \sqrt{\text{我}} + \text{走了}$$

$$\text{正} - \text{如} \div \text{我} = \sqrt{\text{輕輕的}} \div \sqrt{\text{來}}$$

相同的漢字代表同一個阿拉伯數字，不同的漢字代表不同的阿拉伯數字，你能解開上面的算式嗎？並說明理由。

解題重點：

1° 令 a=輕, b=的, c=我, d=走, e=了, f=正, g=如, h=來, 則算式為

$$(1) \sqrt{aab} = \sqrt{c} + de \quad ;$$

$$(2) f - g/c = \sqrt{aab}/\sqrt{h}$$

由(1)式有 $\sqrt{aab} - \sqrt{c} = de$, 而 $de \in N$, 故 $\sqrt{aab} \in N$, 且 $\sqrt{c} \in N$.

$$2^\circ \sqrt{aab} \in \{\sqrt{001}, \sqrt{004}, \sqrt{009}, \sqrt{225}, \sqrt{441}\}, \sqrt{c} \in \{\sqrt{0}, \sqrt{1}, \sqrt{4}, \sqrt{9}\}$$

(也可以利用(2)式先排除 $\sqrt{0}$)

由(1)式知 $\sqrt{aab} \notin \{\sqrt{001}, \sqrt{004}, \sqrt{009}\}$, 所以 $\sqrt{aab} \in \{\sqrt{225}, \sqrt{441}\}$

$$\text{若 } \sqrt{aab} = \sqrt{225}, \text{ 則(1)式可能情形有 } \begin{cases} \sqrt{225} = \sqrt{0} + 15, \text{ 與 } b=e \text{ 矛盾} \\ \sqrt{1} + 14, \text{ 與 } c=d \text{ 矛盾} \\ \sqrt{4} + 13, \\ \sqrt{9} + 12, \text{ 與 } a=c \text{ 矛盾} \end{cases}$$

$$\text{若 } \sqrt{aab} = \sqrt{441}, \text{ 則(1)式可能情形有 } \begin{cases} \sqrt{441} = \sqrt{0} + 21, \text{ 與 } b=e \text{ 矛盾} \\ \sqrt{9} + 18, \text{ 與 } b=d \text{ 矛盾} \end{cases}$$

故 $a=2, b=5, c=4, d=1, e=3$, 即 $\sqrt{225} = \sqrt{4} + 13$.

3° 於是(2)可寫成 $f - g/4 = \sqrt{225}/\sqrt{h}$

因為 $f - g/4$ 是有理數, 所以 $\sqrt{h} \in N$, 從而 $\sqrt{h} \in \{\sqrt{1}, \sqrt{9}\}$,

因為 $f - g/4 \leq 9$, 所以 $\sqrt{h} = \sqrt{9}$, $h=9$

由 $\sqrt{225}/\sqrt{9} = 5$, 得 $4|g$, 故 $g=8$.

由 $f - 8/4 = \sqrt{225}/\sqrt{9}$, 得 $f=7$ (1分)

故 $f=7, g=8, h=9$, 即 $7-8/4 = \sqrt{225}/\sqrt{9}$.

評析：1. 本題較適合國一、國二學生作答，對國三學生來說是一道容易解決的問題。大多數學生都得 5 分或 5 分以上。其中以北市永吉國中黃國僑、黃紹倫及北市薇閣中學歐陽奕答題品質最優良。給分標準並非以答案正確便得滿分來評定，而是依解題的過程來判定得分的高低。

2.本題參答人數有 258 人，平均得分為 5.71 分，得分率為 82%。

問題編號

89403

有一電動數字盤如下：

1	3	7	15	31	63	127	255	511
3	5	9	17	33	65	129	257	513
7	9	13	21	37	69	133	261	517
15	17	21	29	45	77	141	269	525
31	33	37	45	61	93	157	285	541
63	65	69	77	93	125	189	317	573
127	129	133	141	157	189	253	381	637
255	257	261	269	285	317	381	509	765
511	513	517	525	541	573	637	765	1021

若按其中任一個數字，則該數字所在的行與列燈光全亮。如此繼續按為亮的數字，直到整個數字盤燈光為止。此題的按法有很多種，無論用那一種方法所按過的數字總和是否都會相等？請說明理由。

參考解答：設 a_{ij} 表第 i 列第 j 行的數字，其中 $i, j=1, 2, 3, \dots, 9$

$$\text{則當 } i=1 \Rightarrow a_{ij}=2^j-1$$

$$\text{當 } i \geq 2 \Rightarrow a_{ij}=a_{i-1,j}+(2^i-2)$$

因為所按的數字必不同行且不同列

所以所按的數字總和=第一列數字總和再依次加上每列與第一列的差數

故為定值。

$$\text{又 } a_{ij}=a_{i-1,j}+(2^i-2)$$

$$=(2^{i-1}-1)+(2^i-2)$$

$$=2^i+2^{i-1}-3 \quad i, j=1, 2, 3, \dots, 9$$

為總和只按 9 次，

$$\text{所以此定值為 } (2^1+2^2+\dots+2^9)+(2^1+2^2+\dots+2^9)-3 \times 9 = 2017。$$

解題重點：1.因每次所按的數必不同行不同列，所以總共按 9 次。

2.尋找每行與每列數的規律性。

評析：1.本題答題者中，能詳細分析，有條理敘述者，計有彰化員林國中羅元隆，北市敦化國中劉峻豪，北市中正國中謝卓觀，北縣東海中學林聖智。而其中定值亦能正確計算出來者，計有北市永吉國中黃紹倫，北市仁愛國中蔡耕碩，北市建中林裕翔。

2.本題參答人數有 147 人，平均得分數 4.83 分，得分率為 69%。

問題編號

89404

\overline{AB} 表正立方體「最長」的對角線，將立方體繞直線 \overline{AB} 旋轉 (A 與 B 二頂點固定不動)，問至少需要轉多少圈使正立方體轉至「與原來位置重合」？（「與原來位置重合」的意思就是正立方體外觀與原來完全相同，但每一點可以不必在原來位置上）

解答：立方體 ABCD-EFGH 中，取最長對角線 AG，使其垂直地面，則有三點 B、D、E，在空中為同一高度，且形成一個正三角形，此三角形與 AG 垂直，且 AG 必通過其重心 O（如下圖）。故以 AG 為軸，旋轉 120° 即可重合於原三角形，另言之，原立方體要旋轉 120° ，必可重合於原立方體。

評析：1.本題為一簡單的立體幾何題，參答同學作答的方式有多種，記有用操作、解析幾何、綜合幾何等方式。

2.答題優良者有北市敦化國中薛朝文、劉俊豪；北市永吉國中黃紹倫、黃國僑；彰化縣員林國中徐勝駿、羅元隆；北縣土城中正國中吳致宏；北縣福和國中陳思佑；北市陽明國中吳哲宇。有同學除了敘述，還另外製作了模型，是較為特別的。

3.本題參答人數有 138 人，平均得分數 4.27 分，得分率為 61%。

問題編號

89405

同底等高的柱體體積是錐體體積的多少倍？請說明理由。

解題重點：1.先將正立方體切割成 3 個全等的四角錐，可直觀地瞭解同底等高的錐體與柱體間的可能比例。

2.透過同一高度之截面積比例，可推得多角錐的體積仍是同底等高的多角柱體積的三分之一。

3.至於不規則形角錐與同底等高之不規則形柱體比例需借助 n 等分割與無窮級數化成定積分來處理，因而可得任何同底等高的角錐體與柱體的體積比必為 1：3。

評析：1.本題屬開放性問題，任憑參加者自由發揮空間圖形之分割能力。

2.參答者中，以建中林裕翔之解答較詳細，其次為北市永吉國中黃紹倫、黃國僑，北市中正國中謝卓叡，北縣福和國中李柏勳。較特別的是高雄陽明國小蔡政江的解答雖未詳盡，但國小程度參與解答，實為難得。

3.參答人數有 141 人，平均得分數為 4.23 分，得分率為 60%。

神奇的化學魔術—冷沸與冷泉

方金祥 楊慶成
國立高雄師範大學 化學系

將一密閉的試管或圓底燒瓶中的熱蒸氣冷卻之後，所形成的部分真空(partial vacuum)，以降低密閉系統中的壓力，使試管或圓底燒瓶中的水即使在 100°C 以下的溫度也能沸騰（稱為冷沸），或從外界引水入圓底燒瓶中，以形成噴泉（稱為冷泉）。本實驗可使學生了解液體的沸點與壓力的關係。雖然與參考資料 1 的「越冷越開花」同樣演示壓力越低沸點越低的物理概念外，因引水進入燒瓶以形成噴泉，使得實驗更顯得有趣。

材料與藥品：

試管（長 20cm，內徑 22mm）	1 支	圓底燒瓶（150mL）	1 支
酒精燈	1 個	溫度計（長 14.5cm，-10°~100°C）	1 支
塑膠雙通活栓	1 粒	注射針頭	1 支
橡皮塞（7 號）	1 粒	塑膠瓶子（含塑膠蓋，250mL）	1 個
塑膠杯（150mL）	1 個	鐵架或壓克力架	1 組
透明塑膠軟管（10cm）	1 條	熱熔膠（槍）	1 組

演示過程：

一、冷沸

1. 用熱熔膠將一粒 7 號橡皮塞較鈍的一方黏在塑膠瓶子的蓋子上（如圖 1）。
2. 在試管中倒入三分之一滿的自來水。
3. 將溫度計的上下兩端各用一段 2cm 長的橡皮管套住（以避免溫度計在試管倒轉時破裂），並將溫度計倒轉後輕輕地放入試管中。
4. 在試管口下方用塑膠帶纏繞 3cm 的寬度約十圈左右，以增加其隔熱，方便直接用手持試管加熱。
5. 手持試管在酒精燈上直接加熱至沸騰後，再繼續加熱 1 - 2 分鐘，使試管中充滿熱蒸氣（如圖 2）。
6. 迅速用圖 1 的橡皮塞塞住試管的管口（如圖 3），並將試管倒轉且固定在塑膠瓶子上。為增加塑膠瓶的穩定，在瓶內預先放入三分之一滿的水，如此可使其平穩地站立於桌上（如圖 4）。

- 7.待試管內之水不再沸騰時，觀察試管內的溫度計，將溫度記錄下來。
- 8.在桌上準備一條濕毛巾，手掌先觸摸毛巾一下後，用手掌握住試管，此時便發現試管中的水又沸騰起來（如圖 5）。這種現象，液體遇冷而沸騰，可稱為冷沸（Cold boiling）。
- 9.試管中的水經沸騰一段時間後，沸騰現象會慢慢減弱，而試管內的溫度也會逐漸降低，致使沸騰現象消失。用手再去觸摸濕毛巾後，再度握住試管，便可使試管中的水又再度沸騰起來。不斷地重複此一步驟至無法再沸騰時，將沸騰之最低溫度記錄下來。

二、冷泉

- 1.在一粒 7 號橡皮塞的中央處插入一支注射針（針頭先剪平），在注射針的下方接一粒塑膠雙通活栓及一條透明塑膠軟管（如圖 6）。
- 2.在 150 mL 的圓底燒瓶（亦可用錐形瓶替代）內放入約 10mL 的水，手持燒瓶在酒精燈上加熱至水沸騰（如圖 7），然後再繼續加熱約 1 - 2 分鐘。或者將約 50mL 的熱開水（80 - 100 °C）倒入 150mL 的圓底燒瓶內，並將圓底燒瓶搖盪之使整個燒瓶中充滿熱蒸氣。
- 3.將圖 6 的塑膠雙通活栓關注後，並迅速將橡皮塞塞住圓底燒瓶（如圖 8）。
- 4.再將圓底燒瓶倒轉過來後置放於鐵架或壓克力架上，並使透明的塑膠軟管末端插入塑膠杯中的水內。打開雙通活栓後，發現塑膠杯中的水會經由透明塑膠軟管上升，再經雙通活栓，最後由注射針頭噴出形成噴泉，即所謂冷泉（Cold fountain）（如圖 9）。

問題

- 1.在冷沸與冷泉的實驗，為何於加熱至沸騰後還要繼續加熱 1 - 2 分鐘，其目的何在？
- 2.為何第一次手握住試管時，手掌必須先去觸摸濕毛巾？
- 3.用手去握住已不再沸騰的試管時，為何水又會沸騰起來？
- 4.水的正常沸點是 100°C，而此一實驗發覺水在低於 100°C，甚至於更低的溫度也會沸騰，其理由為何？
- 5.冷泉的形成原因為何？

結論

冷沸主要的原理是在一密閉系統中，若設法使液體上面的空間冷卻之後其中的水蒸氣會凝結為小水滴，使其成為部分真空而降低密閉系統中的壓力。壓力降低會導致試管中的水沸騰的溫度隨著降低，因此發現水在 100°C 之下甚至於更低的溫度（55°C）也會沸騰。如用碎冰塊或水直接去接觸試管則其冷卻效果更迅速，水的再沸騰也就更明顯，即所謂「越冷越沸騰」的現象。此一現象即為蕭次融教授曾在本刊所發表的『越冷越開花』。本文中

的冷沸是將其作法稍加改變，使實驗裝置能平穩地放置在桌面上，以方便操作與觀察，並以手掌替代碎冰塊直接去觸摸試管的方式，來降低溫度以增加神奇的效果，可以分批讓教師或學生等觀眾親自來觸摸試管，並可讓觀眾來思考並發表當用手去握住試管時為何又會再沸騰起來的理由？如此更能顯示出科學魔術的神奇與魅力。

而冷泉的原理與冷沸相同，也是在一密閉瓶子內先充滿熱蒸氣，但經瓶子外周圍的空氣將其自然冷卻後，導致瓶內的壓力減小，因此當打開塑膠雙通活栓之後，大氣壓力會將下面塑膠杯中的水壓入透明塑膠軟管，並上升至塑膠雙通活栓，最後再經由注射針頭以噴泉方式噴出，此刻因密閉瓶子內的熱蒸氣會加速冷卻而更降低其壓力，因此可繼續噴出直到瓶子內外壓力平衡為止（約可噴入 75mL 的水，約相當於圓底燒瓶容積的 50%）。此一噴泉之產生乃是由於瓶內的熱蒸氣冷卻後形成部分真空，使其壓力降低所產生的現象，因此將其稱之為「冷泉」。

參考資料

- 1.蕭次融（民 87）「越冷越開花」—水的沸點與壓力。本刊 215 期，29 頁。
- 2.Ford, L, A, (1993) Chemical Magic 2nd ed. Dover Publications, Ine. New York.

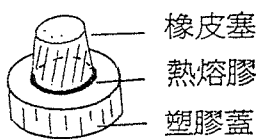


圖 1 由橡皮塞與塑膠蓋組合而成的試管塞

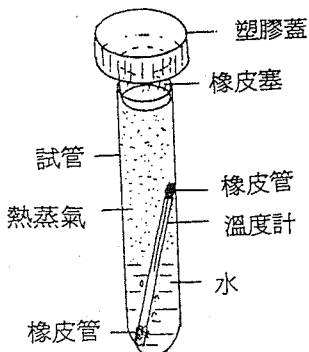


圖 3 水沸騰後以試管塞塞住試管使熱蒸氣充滿試管

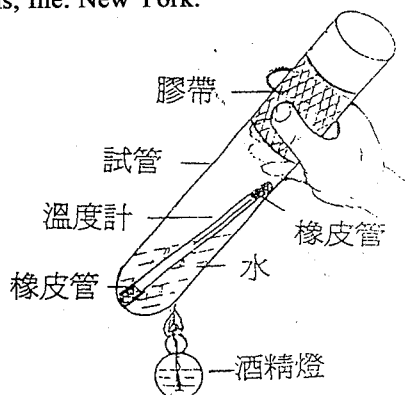


圖 2 手持試管加熱至沸騰

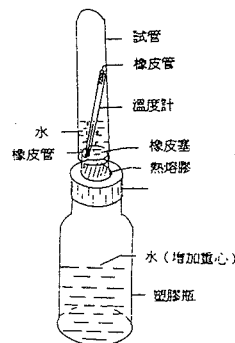


圖 4 將試管倒置於塑膠瓶上

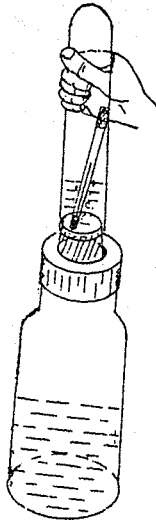


圖 5 以手掌心握住已停止沸騰的試管後又再沸騰的現象

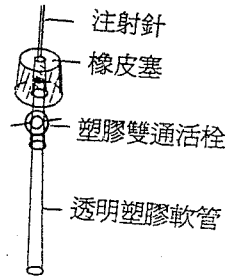


圖 6 附有注射針、塑膠雙通活栓和透明塑膠軟管的橡皮塞



圖 7 在酒精燈上加熱至沸騰

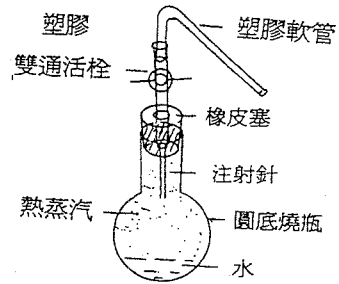


圖 8 以橡皮塞塞住圓底燒瓶使其充滿熱蒸汽

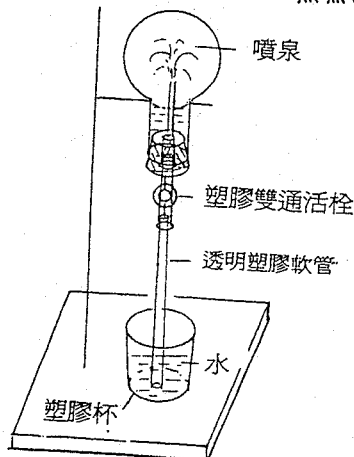


圖 9 將圓底燒瓶倒置於鐵架上，打開塑膠雙通活栓後形成噴泉（冷泉）

教育部八十八學年度高級中學數學能力 競賽決賽成績報告與試題解答

柳 賢 左太政
國立高雄師範大學 數學系

教育部為激發各公私立高級中學學生在數學方面高度學習的興趣，訓練學生獨立思考能力，並引發學生間與校際間的互相觀摩，提升數學教育品質，特舉辦此項高中數學能力競賽，本項活動今年由國立高雄師範大學數學系承辦，參加對象是由教育部中部辦公室、台北市及高雄市政府教育局辦理之複賽中選拔出優秀學生代表參加決賽，其中台灣省 34 人、台北市 11 人、高雄市 5 人，國立馬祖高中 1 人並另加國際奧林匹亞國手 2 人計 53 人；其中港明高中 1 位同學因故無法參加，故實際參賽同學有 52 人。

本次競賽活動自八十八年十二月三十一日至八十九年一月四日假國立高雄師範大學理學院數學系舉行，此項競賽活動是我國選拔國際數學奧林匹亞（IMO）及亞太數學奧林匹亞研習營（APMO）代表隊的重要參考，所以參賽者皆卯足全力參加競賽；競賽內容充實而豐富，「筆試、口試、獨立研究」是本次競賽的重點亦是評審的依據，「專題探討」分別由葉永南教授、陳昭地教授、郭滄海教授主講，內容生動活潑，使學子們獲益斐淺，「技能專題」藉由實地操作動能幾何（GSP）軟體使參賽者瞭解套裝軟體在數學上的應用，「成果評鑑」由評審教授說明此次競賽解題的過程並與參賽者共同探討各種解題過程的樂趣，還有讓參賽者舒暢身心的「影片欣賞」、「聯誼會餐」及中國造船公司的「參觀活動」等，且因活動期間跨越千禧年，「歡迎晚會」更別具跨年晚會意味，而適逢有二位參賽同學於活動期間過生日，輔導員巧心設計慶生活動使壽星驚喜萬分；就整體競賽活動而言，這不僅是一項數學競賽活動，更可藉由共同的生活，互相的切磋，訓練學生的人格修養及人際關係的培養，提高學生對數學研究的興趣及數學教育的品質，在承辦單位精心安排活動下更讓大家都留下了美好的回憶與豐碩的成果。

此次競賽之優勝者由教育部發給獎狀及獎學金，獲得前三等獎之 20 位同學得由就讀學校依照「高級中學數學及自然學科資賦優異學生輔導升學要點」推薦參加上項資優生保送升學甄試，其指導教師由主管教育行政機關給予獎勵。成績特優者得經評審委員會推薦參加亞太數學奧林匹亞研習營。本次競賽的成績評分是依據筆試（一）佔 35%、筆試（二）佔 35%、口試（A）佔 20%及口試（B）佔 10%的總分來評定名次。學生獨立研究的部分不計成績，但可供評審委員評比名次之參考或供推薦參加 2000 年亞太數學奧林匹亞研習營

之依據參考。經過五天的競賽活動，由師大附中陳泊寧及武陵高中王嘉慶榮獲第一等獎各得壹萬伍仟元獎學金，建國高中黃彥維等 8 位同學獲得第二等獎各得壹萬元獎學金，武陵高中劉浩任等 10 位同學獲得第三等獎各得捌仟元獎學金，其他 32 位同學均獲入選獎各得伍仟元獎學金。除了獲前三等獎的同學外彰化高中許登貴、協同中學許栢紋、板橋高中陳韋銓及興國高中蕭清峰等四位同學也獲得評審委員的推薦參加亞太數學奧林匹亞研習營。

以下針對此次競賽的試題提供參考解答，且就所有參賽的 52 位學生答題概況加以統計分析與評析，作為國內相關學者專家及數學教師對輔導數學資優生之應用與研究的參考。

一、參賽學生筆試成績分析圖表

表一 全部參賽學生筆試成績統計表（總人數：52 人）

項目\題目	筆試(一)35%			筆試(二)35%		
	Q1	Q2	Q3	Q4	Q5	Q6
平均值	8.77	21.04	4.67	25.67	13.88	15.81
標準差	12.05	13.29	10.35	12.99	13.78	15.07
得分率	0.25	0.60	0.13	0.73	0.40	0.45

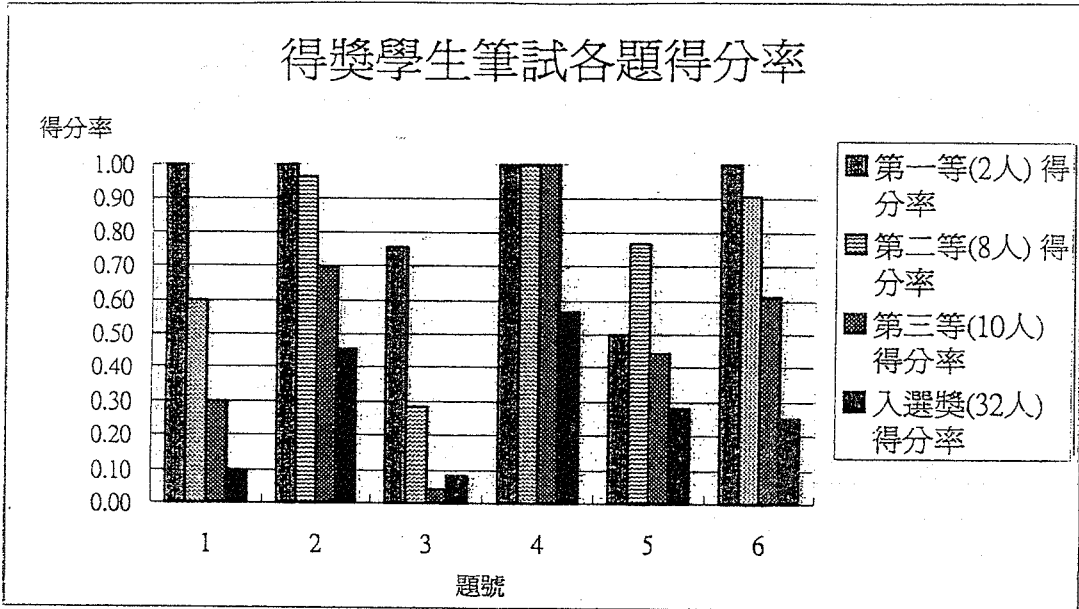
表二 前三等獎學生筆試成績統計表（總人數：20 人）

項目\題目	筆試(一)35%			筆試(二)35%		
	Q1	Q2	Q3	Q4	Q5	Q6
平均值	17.15	29.20	7.40	35.00	20.25	26.95
標準差	13.82	10.95	12.73	0.00	12.62	13.77
得分率	0.49	0.83	0.21	1.00	0.58	0.77

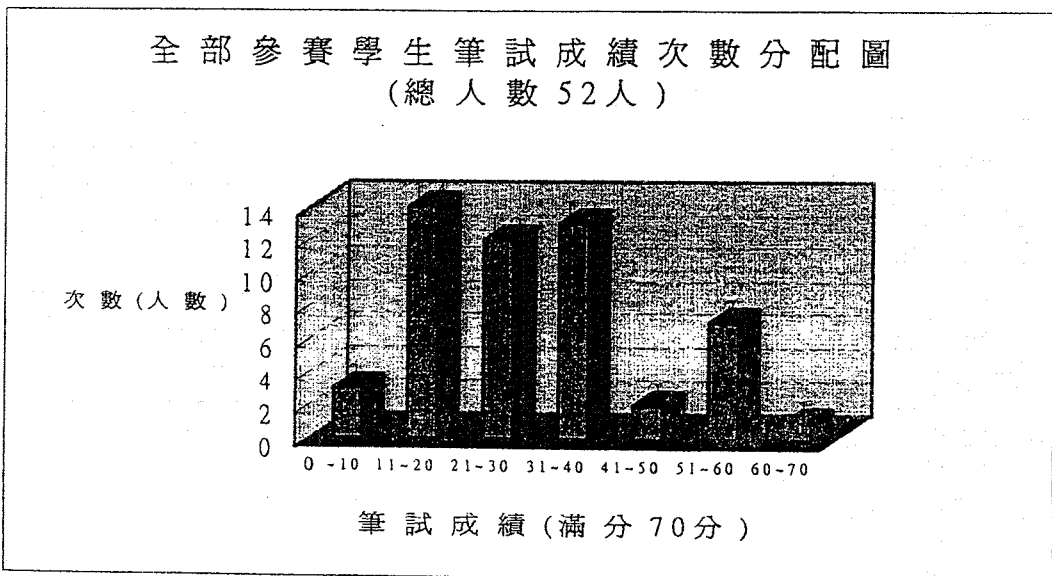
表三 得獎學生筆試成績統計表（請參照圖一）

得獎等次及人數	項目\題目	筆試(一)35%			筆試(二)35%		
		Q1	Q2	Q3	Q4	Q5	Q6
第一等(2人)	平均值	35.00	35.00	26.50	35.00	17.50	35.00
第二等(8人)	平均值	21.00	33.75	10.00	35.00	26.88	31.75
第三等(10人)	平均值	10.50	24.40	1.50	35.00	15.50	21.50
入選獎(32人)	平均值	3.53	15.94	2.97	19.84	9.91	8.84
第一等(2人)	標準差	0.00	0.00	12.02	0.00	24.75	0.00
第二等(8人)	標準差	12.85	2.31	15.58	0.00	5.94	5.87
第三等(10人)	標準差	11.89	14.05	3.37	0.00	13.22	17.49
入選獎(32人)	標準差	6.93	12.13	8.31	13.65	13.12	11.27
第一等(2人)	得分率	1.00	1.00	0.76	1.00	0.50	1.00
第二等(8人)	得分率	0.60	0.96	0.29	1.00	0.77	0.91
第三等(10人)	得分率	0.30	0.70	0.04	1.00	0.44	0.61
入選獎(32人)	得分率	0.10	0.46	0.08	0.57	0.28	0.25

圖一 得獎學生筆試各題得分率 (請參照表三)



圖二 全部參賽學生筆試成績次數分配圖



二、參賽學生獨立研究成績統計分析圖表

表四 全部參賽學生獨立研究成績統計表（總人數：52人）

項目\題目	獨立研究(一)		獨立研究(二)		獨立研究(三)		獨立研究(四)	
	Q1	Q2	Q3	Q4	Q5	Q6	Q7	Q8
平均值	17.71	29.21	28.92	33.17	16.69	5.58	33.38	5.77
標準差	7.50	9.96	11.16	6.03	15.64	11.53	5.46	8.11
得分率	0.51	0.83	0.83	0.95	0.48	0.16	0.95	0.16

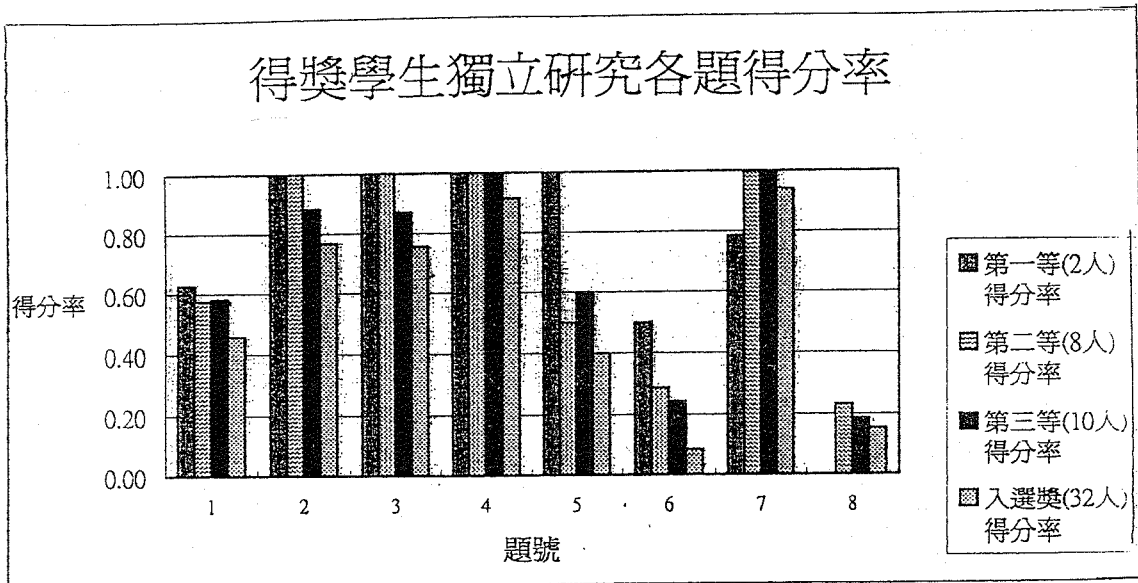
表五 前三等學生獨立研究成績統計表（總人數：20人）

項目\題目	獨立研究(一)		獨立研究(二)		獨立研究(三)		獨立研究(四)	
	Q1	Q2	Q3	Q4	Q5	Q6	Q7	Q8
平均值	20.45	33.00	32.75	35.00	21.00	10.00	34.25	6.50
標準差	6.82	7.85	6.38	0.00	16.43	14.23	3.35	8.75
得分率	0.58	0.94	0.94	1.00	0.60	0.29	0.98	0.19

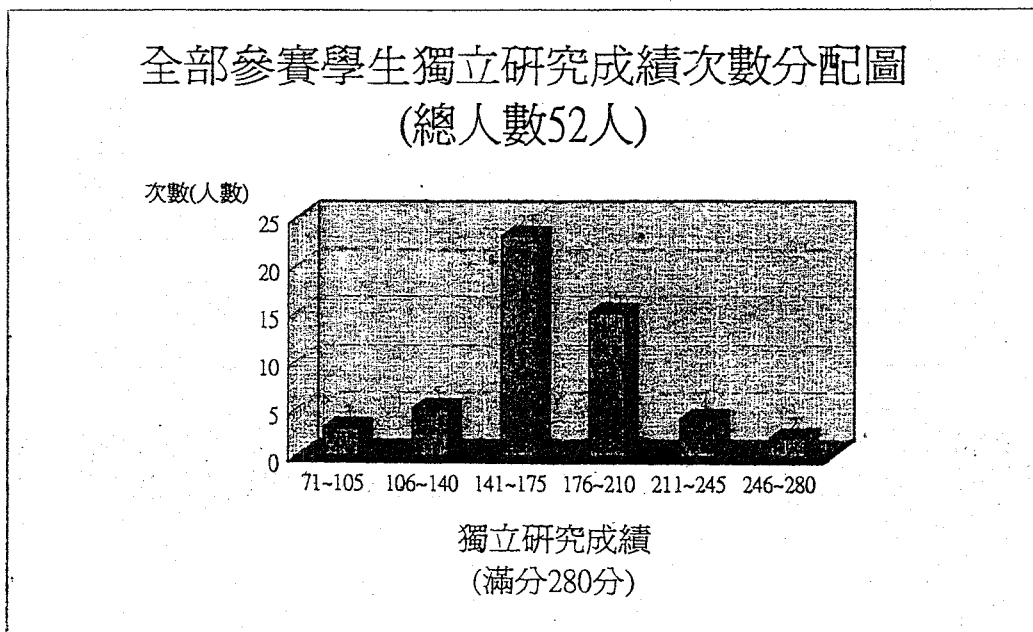
表六 得獎學生獨立研究成績統計表（請參照圖三）

得獎等次及人數	項目\題目	獨立研究(一)		獨立研究(二)		獨立研究(三)		獨立研究(四)	
		Q1	Q2	Q3	Q4	Q5	Q6	Q7	Q8
第一等(2人)	平均值	22.00	35.00	35.00	35.00	35.00	17.50	27.50	0.00
第二等(8人)	平均值	20.13	35.00	35.00	35.00	17.50	10.00	35.00	8.13
第三等(10人)	平均值	20.40	31.00	30.50	35.00	21.00	8.50	35.00	6.50
入選獎(32人)	平均值	16.00	26.84	26.53	32.03	14.00	2.81	32.84	5.31
第一等(2人)	標準差	9.90	0.00	0.00	0.00	0.00	24.75	10.61	0.00
第二等(8人)	標準差	7.88	0.00	0.00	0.00	15.58	13.63	0.00	11.93
第三等(10人)	標準差	6.20	11.01	8.64	0.00	18.07	14.15	0.00	6.26
入選獎(32人)	標準差	7.49	10.51	12.82	7.50	14.75	8.61	6.43	7.79
第一等(2人)	得分率	0.63	1.00	1.00	1.00	1.00	0.50	0.79	0.00
第二等(8人)	得分率	0.58	1.00	1.00	1.00	0.50	0.29	1.00	0.23
第三等(10人)	得分率	0.58	0.89	0.87	1.00	0.60	0.24	1.00	0.19
入選獎(32人)	得分率	0.46	0.77	0.76	0.92	0.40	0.08	0.94	0.15

圖三 得獎學生獨立研究各題得分率 (請參照表六)



圖四 全部參賽學生獨立研究成績次數分配圖



三、教育部八十八學年度高級中學數學能力競賽決賽成績

編號	姓名	性別	就讀學校	年級	指導老師	得獎等次
88041	陳泊寧	男	師大附中	二	李善文	第一等獎
88053	王嘉慶	男	武陵高中	三	許桂淋	第一等獎
88021	黃彥維	男	建國高中	三	蕭慈雲	第二等獎
88026	翁竟智	男	建國高中	三	游森棚	第二等獎
88001	柏盛峰	男	建國高中	二	毛延宗	第二等獎
88006	曾于容	女	北一女中	三	林耀煌	第二等獎
88016	賴柏翔	男	師大附中	三	李文光	第二等獎
88010	何思賢	男	高雄師大附中	二	吳吉昌	第二等獎
88019	謝易達	男	港明高中	三	陳啓欣	第二等獎
88042	全明道	男	新竹中學	三	謝坤家	第二等獎
88032	劉任浩	男	武陵高中	三	許桂淋	第三等獎
88036	呂楊凱	男	師大附中	三	李文光	第三等獎
88035	林家平	男	高雄中學	三	邵文山	第三等獎
88003	曹葉軒	男	台中一中	二	朱標宗	第三等獎
88052	謝卓勳	男	馬公高中	三	林玉芬	第三等獎
88018	張廖俊魁	男	台中一中	三	賴瑞楓	第三等獎
88031	程惠祥	男	成功高中	三	游經祥	第三等獎
88034	曾化鈞	男	新豐高中	三	鄭光志	第三等獎
88044	蔡宗霖	男	台南一中	三	林坤宏	第三等獎
88014	高浩仁	男	興國高中	三	周益在	第三等獎
88051	許栢紋	女	協同中學	三	俞繼光	入選獎
88043	劉育佑	男	嘉義高中	二	蔡安華	入選獎
88033	許登貴	男	彰化高中	三	黃溪松	入選獎
88025	黎冠成	男	高雄中學	三	蘇源森	入選獎
88012	張經略	男	永平中學	三	曾明霞	入選獎
88048	郭俊亨	男	台南一中	三	林坤宏	入選獎
88008	陳宥霖	男	彰化高中	三	陳錦源	入選獎
88022	陳韋銓	男	板橋高中	二	蔡志強	入選獎
88039	蕭清峰	男	興國高中	三	周益在	入選獎
88002	魏軍浩	男	花蓮高中	三	陳貞康	入選獎
88011	張國韋	男	師大附中	三	鄒慶生	入選獎
88029	趙崇志	男	台南一中	二	黃承鉤	入選獎
88037	傅斯緯	男	新竹科學園區實驗中學	三	鄭慶瑜	入選獎
88028	李思穎	女	台中女中	三	陳勝雄	入選獎
88038	陳科廷	男	台中一中	二	朱標宗	入選獎
88023	梁元立	男	彰化高中	三	謝銘峰	入選獎
88030	蕭偉成	男	高雄中學	三	蘇源森	入選獎
88045	劉峰豪	男	建國高中	二	李瑞	入選獎
88049	張凌逢	男	成淵高中	三	陳正鴻	入選獎
88046	林鼎博	男	新竹中學	三	謝坤家	入選獎
88004	楊清傑	男	嘉義高中	三	吳昕昇	入選獎
88007	王耀廣	男	台東高中	三	趙聰敏	入選獎
88020	羅婉嫣	女	高雄女中	三	吳建生	入選獎
88013	王業凱	男	台中一中	三	王振盛	入選獎
88015	李麗梅	女	高雄女中	三	洪淑芬	入選獎
88017	陳亮	男	清水中學	三	林雅惠	入選獎
88027	卓旭方	男	三民中學	三	鄭歷田	入選獎
88050	徐欣怡	女	新竹女中	三	李竹梅	入選獎
88009	張毓軒	男	斗六高中	三	謝天任	入選獎
88040	葉精國	男	馬祖高中	三	劉增鎮	入選獎
88005	黃朝章	男	鳳新高中	三	方進龍	入選獎
88047	王欽洲	男	虎尾高中	三	黃文猷	入選獎
88024	陳宛如	女	港明高中	三	陳啓欣	缺考

四、筆試試題及參考解答

筆試試題(一)

注意事項：

- (1)時間分配：2 小時(10:00-12:00) (2)配分：每題皆為 7 分。
 (3)不可使用計算器。

問題(一)設 $ABCD$ 為一個凸四邊形，兩條對角線 \overline{AC} 與 \overline{BD} 相交於 O 點，且 $\overline{AO} = \overline{OC}$ ，若 P 點為線段 \overline{AO} 的任一內點，延長 \overline{BP} 交 \overline{AD} 於 E 點，延長 \overline{DP} 交 \overline{AB} 於 F 點。其次延長 \overline{FO} 交 \overline{CD} 於 H 點，延長 \overline{EO} 交 \overline{BC} 於 G 點。試證 $\overline{FG} \parallel \overline{EH}$ 。

問題(二)設 a, b 為正整數，且 a 的所有正因數之積等於 b 的所有正因數之積，試證： $a=b$ 。

問題(三)設 $f(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0$ 為一個 n 次整係數多項式， k 為正整數且 $0 < k < n$ 。若存在一個質數 p 使得 $p \mid a_k$ ，且 $p \mid a_{k-1}, \dots, p \mid a_1, p \mid a_0$ ，但 $p^2 \nmid a_0$ 。試證：存在一個整係數多項式 $g(x)$ 滿足下列條件：

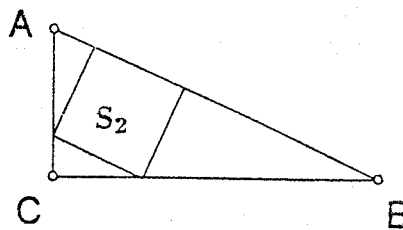
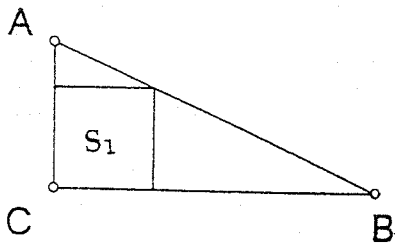
- (1) $g(x)$ 的次數大於或等於 k ，
 (2) $g(x)$ 為 $f(x)$ 的因式，
 (3) $g(x)$ 不可能分解成兩個次數都大於或等於 1 的整係數多項式的乘積。

筆試試題(二)

注意事項：

- (1)時間分配：2 小時(14:20-16:20) (2)配分：每題皆為 7 分。
 (3)不可使用計算器。

問題(四)如下圖， S_1 與 S_2 是直角三角形 ABC 的內接正方形，已知 S_1 的面積為 361 平方公分，且兩股 \overline{AC} 與 \overline{BC} 長的和為 380 公分，試求 S_2 的面積為多少平方公分？



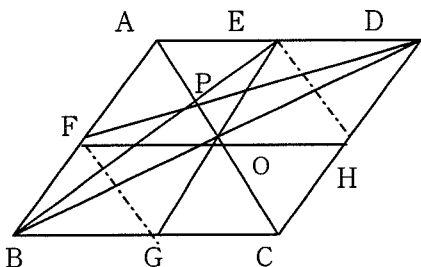
問題(五)設 c 為非零的整數，定義數列 a_1, a_2, a_3, \dots 為 $a_1 = 2$ 且 $a_{n+1} = ca_n + \sqrt{(c^2 - 1)(a_n^2 - 4)}$ ， $n = 1, 2, 3, \dots$ 。試證 a_{2000} 是整數。

問題(六)設數列 $\{a_n\}$ 滿足 $\frac{a_n + a_{n+2}}{2} \leq a_{n+1}$ ， n 是任意正整數。試證

$$\frac{a_1 + a_3 + \cdots + a_{2n+1}}{n+1} \leq \frac{a_2 + a_4 + \cdots + a_{2n}}{n}$$

筆試試題參考解答

【筆試問題一參考解答】



在 $\triangle DPA$ 中，因 \overline{AF} , \overline{EP} , \overline{DO} 交於 B 點，

由西瓦定理知， $\frac{\overline{DF}}{\overline{FP}} \cdot \frac{\overline{PO}}{\overline{OA}} \cdot \frac{\overline{AE}}{\overline{ED}} = 1$ ，

在 $\triangle DPC$ 中，由西瓦定理知 $\frac{\overline{DF}}{\overline{FP}} \cdot \frac{\overline{PO}}{\overline{OC}} \cdot \frac{\overline{CH}}{\overline{HD}} = 1$ ， $\therefore \overline{AO} = \overline{OC}$

由上面兩式知 $\frac{\overline{CH}}{\overline{HD}} = \frac{\overline{AE}}{\overline{ED}} \quad \therefore \overline{FH} \parallel \overline{AC}$

同理： $\overline{FG} \parallel \overline{AC}$ 故 $\overline{FG} \parallel \overline{EH}$

【筆試問題二參考解答】

設 a 的正因數依序為 $a_1 = 1 < a_2 < \cdots < a_r$ ，

且 b 的正因數依序為 $b_1 = 1 < b_2 < \cdots < b_s$ ，

$\therefore a_1 a_2 \cdots a_r = b_1 b_2 \cdots b_s$ 且 $a_k \cdot a_{r-k+1} = a$

$\forall k = 1, 2, \cdots, r$

$\therefore (a_1 a_r)(a_2 a_{r-1}) \cdots (a_r a_1) = (a_1 a_2 \cdots a_r)(a_1 \cdots a_r) = a^r$ ，

且 $b^s = (b_1 \cdots b_s)(b_1 \cdots b_s)$

$\therefore a^r = b^s$ ，設 $a = P_1^{r_1} \cdots P_n^{r_n}$ ， $b = P_1^{s_1} \cdots P_n^{s_n}$

$\therefore r r_i = s s_i \quad \forall i = 1, 2, \cdots, n$

預證 $r = s$ 否則 $r \neq s$ ，設 $r > s$ ， $\therefore s_i > r_i, \forall i = 1, 2, \cdots, n$

$\therefore r = (r_1 + 1) \cdots (r_n + 1) < (s_1 + 1) \cdots (s_n + 1) = s$ 矛盾

因此 $r = s$

【筆試問題三參考解答】

一.若 $f(x)$ 是質式多項式，則 $f(x)$ 即為所求

二.若 $f(x)$ 可分解

令 $f(x) = g_1(x)p_1(x)$ 其中 $g_1(x) = (\alpha_i x^i + \alpha_{i-1} x^{i-1} + \dots + \alpha_0)$

$p_1(x) = (\beta_j x^j + \beta_{j-1} x^{j-1} + \dots + \beta_0) \quad i+j=n$

不妨設 $\deg g_1(x) \geq \deg p_1(x)$

(1) 若 $\deg g_1(x) < k$ 時 $\therefore \deg p_1(x)$

$$\therefore p \mid a_0$$

$$\therefore p \mid \alpha_0 \text{ 或 } \beta_0 \text{ 且 } p^2 \nmid a_0$$

$$\text{若 } p \mid \alpha_0, p \mid a_0$$

$$\Rightarrow p \mid \alpha_1, p \mid \alpha_2 \dots p \mid \alpha_i \quad (\text{由比較係數模 } p \text{ 可得})$$

$$\therefore p \text{ 皆整除 } g_1(x) \text{ 係數和 } p \nmid a_k \text{ 不合}$$

$$\text{同理若 } p \mid \beta_0 \text{ 也不合 } \therefore \deg g_1(x) \geq k$$

(2) $\deg g_1(x) \geq k$

$$\text{由 } p \mid a_0, p^2 \nmid a_0$$

$$\text{設 } p \mid \alpha_0 \Rightarrow p \nmid \beta_0$$

$$\Rightarrow p \mid \alpha_1, p \mid \alpha_2 \dots p \mid \alpha_{k-1}$$

$$\text{又 } \therefore p \nmid a_k$$

$$\therefore p \mid \alpha_k \beta_0 + \alpha_{k+1} \beta_1 + \dots \Rightarrow p \nmid \alpha_k \beta_0 \quad \therefore p \nmid \alpha_k$$

若 $g_1(x)$ 是質式多項式 \Rightarrow 即為所求

若 $g_1(x)$ 可分為 $g_2(x)p_2(x)$

$$[\deg g_2(x) \geq \deg p_2(x)]$$

$$\text{由(1) } \therefore \deg g_2(x) \geq k$$

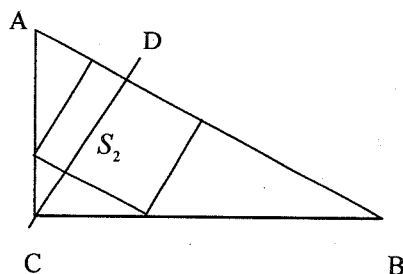
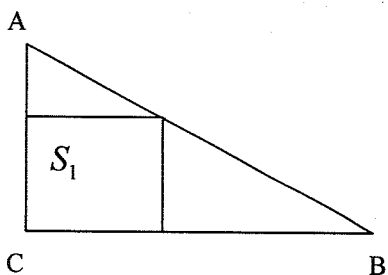
再如(2)討論則 有一 $g_m(x)$ 符合條件

即 $\deg g_m(x) \geq k, g_m(x) \mid f(x)$ 且 $g_m(x)$ 質式多項式 \therefore 命題得證

(3) 若由(2)若 $p \nmid \alpha_0, p \mid \beta_0 \Rightarrow$ 一樣若 $j < k$ 不合 如(1)

若 $j \geq k$ 則就由 $p_1(x)$ 如(2)討論一樣 $\exists p_q(x)$ 符合條件

【筆試問題四參考解答】



$$\text{令 } \overline{AC} = a+19, \overline{BC} = b+19, \overline{AB} = c$$

過 C 作 $\overline{CD} \perp \overline{AB}$ 於 D, S_2 邊長為 x

$$\text{由 } \Delta \text{ 相似性質知 } \frac{a}{19} = \frac{19}{b} \Rightarrow ab = 19^2$$

$$\text{且由 } a+b = 380 - 38 = 38 \times 9$$

$$\begin{aligned} \therefore c^2 &= (a+19)^2 + (b+19)^2 = (a+b)^2 - 2ab + 38(a+b) + 19^2 \times 2 \\ &= 38^2 \times 9^2 - 2 \times 19^2 + 38^2 \times 9 + 2 \times 19^2 = 38^2 \times 9 \times 10 \end{aligned}$$

$$\Rightarrow c = 38 \times 3\sqrt{10} = 114\sqrt{10}$$

$$\therefore \overline{CD} = \frac{(a+19)(b+19)}{c} = \frac{19^2(2+18)}{114\sqrt{10}} = \frac{19\sqrt{10}}{3}$$

$$\text{由 } \Delta \text{ 相似性質 } \frac{\frac{19\sqrt{10}}{3} - x}{x} = \frac{\frac{19\sqrt{10}}{3}}{114\sqrt{10}} = \frac{1}{18}$$

$$x = 114\sqrt{10} - 18x$$

$$19x = 114\sqrt{10}$$

$$x = 6\sqrt{10}$$

$$\therefore x^2 = 36 \times 10 = 360 \quad \therefore S_2 \text{ 的面積} = 360 \text{ cm}^2$$

【筆試問題五參考解答】

$$\therefore a_{n+1} = ca_n + \sqrt{(c^2-1)(a_n^2-4)}$$

$$\therefore (a_{n+1} - ca_n)^2 = \left(\sqrt{(c^2-1)(a_n^2-4)} \right)^2$$

$$\text{即 } a_{n+1}^2 + c^2 a_n^2 - 2ca_n a_{n+1} = c^2 a_n^2 - 4c^2 - a_n^2 + 4$$

$$\Rightarrow a_{n+1}^2 - 2ca_n a_{n+1} + 4c^2 + a_n^2 - 4 = 0 \dots\dots(1)$$

$$\text{又 } (a_{n+2} - ca_{n+1})^2 = \left(\sqrt{(c^2-1)(a_{n+1}^2-4)} \right)^2$$

$$\therefore a_{n+2}^2 + c^2 a_{n+1}^2 - 2ca_{n+1} a_{n+2} = c^2 a_{n+1}^2 - 4c^2 - a_{n+1}^2 + 4$$

$$\text{即 } a_{n+2}^2 - 2ca_{n+1} a_{n+2} + 4c^2 + a_{n+1}^2 - 4 = 0 \dots\dots(2)$$

$$(2)-(1) \Rightarrow a_{n+2}^2 - 2ca_{n+1} a_{n+2} + 2ca_n a_{n+1} - a_n^2 = 0$$

$$\text{即 } (a_{n+2} - a_n)(a_{n+2} + a_n) - 2ca_{n+1}(a_{n+2} - a_n) = 0$$

$$\text{即 } (a_{n+2} - a_n)(a_{n+2} + a_n - 2ca_{n+1}) = 0$$

$$\text{又 } a_{n+2} - a_n \neq 0 \quad \therefore a_{n+2} + a_n - 2ca_{n+1} = 0$$

$$\text{即 } a_{n+2} = 2ca_{n+1} - a_n$$

$$\therefore a_1 = 2 \therefore a_2 = ca_1 + \sqrt{(c^2-1)(a_1^2-4)} = 2c \in Z \quad (\because c \text{ 為非零之整數})$$

由數學歸納法可將通式寫成

$a_{n+2} = 2ca_{n+1} - a_n$ ，其中 a_{n+2} 的係數為 1，而 a_{n+1} 係數為 $2c \in Z, a_n$ 為 1

$\therefore \forall n \in N, a_n \in Z \therefore a_{2000}$ 為整數

【筆試問題六參考解答】

利用數學歸納法

$n=1$ 時， $\frac{a_1+a_3}{2} \leq a_2$ 成立

設 $n=k$ 時成立，即 $\frac{a_1+a_3+\dots+a_{2k+1}}{k+1} \leq \frac{a_2+a_4+\dots+a_{2k}}{k}$ ，

即 $k(a_1+a_2+\dots+a_{2k+1}) \leq (k+1)(a_2+a_4+\dots+a_{2k}) \dots\dots(1)$

設 $n=k+1$ 時，欲證 $(k+1)(a_1+a_2+\dots+a_{2k+3}) \leq (k+2)(a_2+a_4+\dots+a_{2k+2})$

由題意知： $a_n+a_{n+2} \leq 2a_{n+1}$ 即 $a_{n+2}-a_{n+1} \leq a_{n+1}-a_n$

\therefore 數列 $\{a_{n+1}-a_n\}$ 為遞減

$(k+1)(a_{2k+3}-a_{2k+2}) \leq (a_2-a_1)+(a_4-a_3)+\dots+(a_{2k+2}-a_{2k+1})$

即 $a_1+a_3+\dots+a_{2k+1}+(k+1)a_{2k+3} \leq a_2+a_4+\dots+a_{2k}+(k+2)a_{2k+2} \dots\dots(2)$

(1)+(2) $(k+1)(a_1+a_3+\dots+a_{2k+3}) \leq (k+2)(a_2+a_4+\dots+a_{2k}+a_{2k+2})$

即 $\frac{a_1+a_3+\dots+a_{2(k+1)+1}}{(k+1)+1} \leq \frac{a_2+a_4+\dots+a_{2(k+1)}}{k+1}$ 故得證

五、口試試題及參考解答

口試試題

1. 在一次聯誼活動期間，每一位參加者都贈送其他的每一位參加者一件禮物。已知在活動中場休息時，主辦單位發現：

- (1) 至少有一半的參加者都已恰好獲得應得禮物數的二分之一，
- (2) 至少有三分之一的參加者都已恰好獲得應得禮物數的三分之一，
- (3) 至少有七分之一的參加者都已恰好獲得應得禮物數的七分之一。

試問最少有多少人參加這次活動？

2. 給定一個銳角三角形 ABC，

- (1) 試用尺規作圖作出一個長寬之比為三比一的內接矩形（其中兩個頂點在 \overline{BC} 上），
- (2) 試問共有多少個這樣的矩形？

口試試題解答

【口試一參考解答】

設有 n 人參加這次活動，則每一位可得 $n-1$ 件禮物，由條件(1)(2)(3)可知， $n-1$ 為 $2 \cdot 3 \cdot$

$7=42$ 的倍數，故可令

$$n = 42k + 1, k \in \{1, 2, 3, \dots\}$$

若 $n=43$,

由條件(1)至少有 2 位參加者已恰好獲得半數的禮物，

由條件(2)至少有 15 位參加者已恰好獲得三分之一的禮物，

由條件(3)至少有 7 位參加者已恰好獲得七分之一的禮物，

如此，參加的人數至少有 44 位，矛盾！故 $n > 43$

以下證明 $n=85$ 是可行的：

將 85 位參加者分成三組，各有 43, 29, 13 人，在活動中場休息時，僅僅各組內的參加者互相交換禮物

【口試二參考解答】

(1) 1. 作矩形 $DEFG$, $D \in \overline{AB}$, $E, F \in \overline{BC}$, $\overline{DE} : \overline{EF} = 1:3$

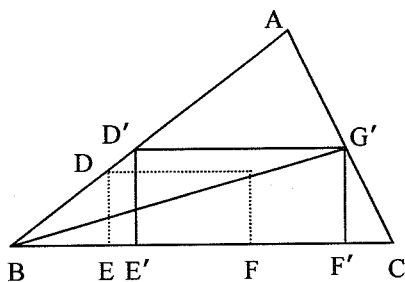
2. 作 \overline{BG} 交 \overline{AC} 於 G'

3. 作 $\overline{G'F'} \perp \overline{BC}$ 於 F' $\overline{G'D'} \perp \overline{G'F'}$ 交 \overline{AB} 於 D' $\overline{D'E'} \perp \overline{BC}$ 於 E'

則 $D'E'F'G'$ 即為所求

(2) 若(1)中作 $\overline{DF} : \overline{EF} = 3:1$

使用相同方法(1)可得另一矩形 \therefore 共有 2 個矩形



六、獨立研究試題及參考解答

獨立研究試題(一)

注意事項：

(1) 時間分配：1 時 50 分(08:10-10:00)

(2) 配分：每題皆為 7 分。

(3) 不可使用計算器。

問題(一)試求所有的正整數 n 使得 $n^3 - 8n^2 + 22n - 21$ 為完全平方數。

問題(二)試求所有的整數 x, y ，使得 $x > 1, y > 1$ 且 $(x-1)(y-1) \mid xy-1$ 。

獨立研究試題(二)

注意事項：

(1)時間分配：1 時 50 分(16:10-18:00)

(2)配分：每題皆為 7 分。

(3)不可使用計算器。

問題(三)設 a, b, c 為多項式 $x^3 - 8x^2 + 8x - 1$ 的三個根，對於任一非負整數 n ，表

$S_n = a^n + b^n + c^n$ ，試求 S_{2000} 的個位數。

問題(四)有 n 位學生參加一項數學競賽，這項競賽試題共分成兩大類：A 類與 B 類，每一大類各有 k 小題： A_1, A_2, \dots, A_k 及 B_1, B_2, \dots, B_k ，已知每一位學生解出 A 類的題數與解出 B 類的題數之差都是奇數；而對每一個 $i \in \{1, 2, \dots, k\}$ ，解出試題 A_i 的學生數與解出試題 B_i 的學生數之差都是偶數。試證： n 是一個偶數。

獨立研究試題(三)

注意事項：

(1)時間分配：2 時(8:00-10:00)

(2)配分：每題皆為 7 分。

(3)不可使用計算器。

問題(五)是否存在 $n(n \geq 2)$ 個相異正整數，其平方的倒數和為整數？

問題(六)設 a, b, c 為正數，試證：

$$\frac{1}{a(1+b)} + \frac{1}{b(1+c)} + \frac{1}{c(1+a)} \geq \frac{3}{1+abc}.$$

獨立研究試題(四)

注意事項：

(1)時間分配：1 時 50 分(10:10-12:00)

(2)配分：每題皆為 7 分。

(3)不可使用計算器。

問題(七)若一個直角三角形的三邊長恰好是方程式

$x^3 - 30x^2 + 281x - a = 0$ 的三個根，其中 a 為某一實數。試求此直角三角形的面積為何？

問題(八)設

$$a_1 \geq a_2 \geq b_1 \geq b_2 \geq b_3 \geq b_4 \geq a_3 \geq a_4 > 0$$

且 $a_1 a_2 a_3 a_4 = b_1 b_2 b_3 b_4$ 。試證：

$$a_1 + a_2 + a_3 + a_4 \geq b_1 + b_2 + b_3 + b_4.$$

且等號成立的充要條件為 $a_1 = a_2 = b_1 = b_2 = b_3 = b_4 = a_3 = a_4$.

獨立研究試題解答

【獨立研究一參考解答】

對於任意正整數 n ，令 $a_n = n^3 - 8n^2 + 22n - 21$ 。因式分解得 $a_n = (n-3)(n^2 - 5n + 7) = (n-3)((n-2)(n-3) + 1)$ 。顯然 $a_1 = -6$ 與 $a_2 = -1$ 都不是完全平方數；而 $a_3 = 0$ 為完全平方數。假設 $n > 3$ 且 a_n 為完全平方數。因為 $n-3$ 與 $n^2 - 5n + 7$ 互質，得 $n^2 - 5n + 7$ 亦為完全平方數。因 $n > 3$ ，得 $(n-3)^2 < (n-3)^2 + n - 2 = n^2 - 5n + 7 = (n-2)^2 + 3 - n < (n-2)^2$ 。即 $n^2 - 5n + 7$ 介於兩相鄰平方數之間，這是不可能的。因此 $n = 3$ 為所求。

【獨立研究二參考解答】

令 $f(x, y) = \frac{xy-1}{(x-1)(y-1)}$, $x > 1, y > 1$ $\because (x+1)(y+1) \mid xy-1$ $\therefore f(x, y)$ 為一正整數

$\therefore f(x, y) = \frac{xy-x-y+1}{(x-1)(y-1)} + \frac{x+y-2}{(x-1)(y-1)} = 1 + \frac{(x-1)+(y-1)}{(x-1)(y-1)} = 1 + \frac{1}{x-1} + \frac{1}{y-1}$, $\therefore \frac{1}{x-1} + \frac{1}{y-1} \in N$

設 $x \leq y$ ，因 $x > 1, 1 \leq \frac{1}{x-1} + \frac{1}{y-1} \leq \frac{2}{x-1}$ 即 $x-1 \leq 2$ 故 $1 < x \leq 3$

(1) 當 $x = 3, \frac{1}{x-1} + \frac{1}{y-1} = \frac{1}{2} + \frac{1}{y-1} \in N$ ，且 $y \geq x = 3$ ，故 $y = 3$ 為唯一解

(2) 當 $x = 2, \frac{1}{x-1} + \frac{1}{y-1} = 1 + \frac{1}{y-1} \in N$, $\therefore \frac{1}{y-1} \in N$ 又 $y \geq 2 \therefore y = 2$

故 $(x, y) = (3, 3), (2, 2)$

【獨立研究三參考解答】

$S_0 = a^0 + b^0 + c^0 = 3, S_1 = a + b + c = 8$ (由根與係數知)

$S_2 = a^2 + b^2 + c^2 = (a+b+c)^2 - 2(ab+bc+ca) = 8^2 - 2 \times 8 = 48$

當 $n \geq 0$ 時, $S_{n+3} = a^{n+3} + b^{n+3} + c^{n+3} \geq 8S_{n+2} - 8S_{n+1} + S_n$

$\therefore S_3 = 323 \equiv 3 \pmod{10}$

$S_4 \equiv 8 \pmod{10}, S_5 \equiv 8 \pmod{10}, S_{n+3} \equiv S_n \pmod{10}$

$2000 \div 3 = 666 \dots 2$

故 $S_{2000} \equiv 8 \pmod{10}$

【獨立研究四參考解答】

令 x_i 表示第 i 位學生解出 A 類的題數，則其解出 B 類的題數為

$$x_i \pm 2t_i - 1, \forall i = 1, 2, 3, \dots, n$$

令 y_j 表示解出試題 A_j 的學生數，則解出試題 B_j 的學生數為

$$y_j \pm 2s_j, \forall j = 1, 2, 3, \dots, k$$

因為

$$x_1 + x_2 + \dots + x_n = y_1 + y_2 + \dots + y_k$$

且

$$(x_1 \pm 2t_1 - 1) + (x_2 \pm 2t_2 - 1) + \dots + (x_n \pm 2t_n - 1) = (y_1 \pm 2s_1) + (y_2 \pm 2s_2) + \dots + (y_k \pm 2s_k)$$

故合併以上兩式可得

$$\begin{aligned} x_1 + (x_1 \pm 2t_1 - 1) + x_2 + (x_2 \pm 2t_2 - 1) + \dots + x_n + (x_n \pm 2t_n - 1) \\ = y_1 + (y_1 \pm 2s_1) + y_2 + (y_2 \pm 2s_2) + \dots + y_k + (y_k \pm 2s_k) \end{aligned}$$

即 n 個奇數和

$$\begin{aligned} (\pm 2t_1 - 1) + (\pm 2t_2 - 1) + \dots + (\pm 2t_n - 1) \\ = 2(y_1 + y_2 + \dots + y_k) - 2(x_1 + x_2 + \dots + x_n) + 2(\pm s_1 \pm s_2 \pm \dots \pm s_k) \end{aligned}$$

由此可得： n 是一偶數

【獨立研究五參考解答】

設 a_1, a_2, \dots, a_n 為任意 n 個正整數，且 $1 < a_1 < a_2 < \dots < a_n \quad \therefore a_1 \geq 2, a_2 \geq 3, \dots, a_k \geq k+1$

$$0 < \frac{1}{a_1^2} + \dots + \frac{1}{a_n^2} < \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \dots + \frac{1}{(n+1)^2} < \frac{1}{1 \times 2} + \frac{1}{2 \times 3} + \dots + \frac{1}{n(n+1)} = 1 - \frac{1}{n+1} = \frac{n}{n+1} < 1$$

故不可能為整數

【獨立研究六參考解答】

$$\frac{1}{a(1+b)} + \frac{1}{1+abc} = \frac{1}{1+abc} \left[\frac{1+abc}{a(1+b)} + 1 \right] = \frac{1}{1+abc} \left[\frac{1+a}{a(1+b)} + \frac{b(1+c)}{1+b} \right]$$

$$\frac{1}{b(1+c)} + \frac{1}{1+abc} = \frac{1}{1+abc} \left[\frac{1+abc}{b(1+c)} + 1 \right] = \frac{1}{1+abc} \left[\frac{1+b}{b(1+c)} + \frac{c(1+a)}{1+c} \right]$$

$$\frac{1}{c(1+a)} + \frac{1}{1+abc} = \frac{1}{1+abc} \left[\frac{1+abc}{c(1+a)} + 1 \right] = \frac{1}{1+abc} \left[\frac{1+c}{c(1+a)} + \frac{a(1+b)}{1+a} \right]$$

三式相加

$$\frac{1}{a(1+b)} + \frac{1}{b(1+c)} + \frac{1}{c(1+a)} + \frac{3}{1+abc} =$$

$$\frac{1}{1+abc} \left[\frac{1+a}{a(1+b)} + \frac{b(1+c)}{1+b} + \frac{1+b}{b(1+c)} + \frac{c(1+a)}{1+c} + \frac{1+c}{c(1+a)} + \frac{a(1+b)}{1+a} \right] \geq \frac{1}{1+abc} \times 6 \text{ (利用算幾平均數)}$$

故得證

【獨立研究七參考解答】

令三根為 α, β, γ 且 $\alpha \geq \beta \geq \gamma$

$$\therefore \alpha + \beta + \gamma = 30 \quad \alpha\beta + \beta\gamma + \gamma\alpha = 281$$

$$\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 = (\alpha + \beta + \gamma)^2 - 2(\alpha\beta + \beta\gamma + \gamma\alpha) = 900 - 562 = 338$$

$$\text{又 } \alpha^2 = \beta^2 + \gamma^2 \therefore \alpha^2 = \frac{338}{2} = 169$$

$$\therefore \alpha = 13 \quad \beta + \gamma = 30 - 13 = 17$$

$$\therefore \beta^2 + \gamma^2 = 169 \quad \frac{1}{2}\beta\gamma = \frac{(\beta + \gamma)^2 - (\beta^2 + \gamma^2)}{4} = \frac{17^2 - 169}{4} = \frac{120}{4} = 30$$

【獨立研究八參考解答】

令 $\alpha = a_1 - b_2, \beta = a_2 - b_1, \gamma = b_3 - a_4, \delta = b_4 - a_3$

欲證： $\alpha + \beta \geq \gamma + \delta$ 由題意知 $(b_2 + \alpha)a_2a_3a_4 = b_1b_2b_3b_4$

$$\Rightarrow \alpha a_2a_3a_4 + b_2(\beta + b_1)a_3a_4 = b_1b_2b_3b_4$$

$$\Rightarrow \alpha a_2a_3a_4 + \beta b_2a_3a_4 = b_1b_2b_3b_4 - b_1b_2a_3a_4 = b_1b_2(b_3b_4 - a_3a_4) = b_1b_2[b_4(b_3 - a_4) + a_4(b_4 - a_3)]$$

$$= b_1b_2b_4\gamma + b_1b_2a_4\delta$$

$$\Rightarrow \alpha + \frac{b_2}{a_2}\beta = \frac{b_1b_2b_4}{a_2a_3a_4}\gamma + \frac{b_1b_2a_4}{a_2a_3a_4}\delta = \frac{a_1}{b_3}\gamma + \frac{b_1b_2}{a_2a_3}\delta \quad (\because a_1a_2a_3a_4 = b_1b_2b_3b_4)$$

$$(i) \text{ 若 } a_2a_3 \leq b_1b_2, \text{ 則 } \alpha + \beta \geq \alpha + \frac{b_2}{a_2}\beta = \frac{a_1}{b_3}\gamma + \frac{b_1b_2}{a_2a_3}\delta \geq \gamma + \delta$$

$$(ii) \text{ 若 } a_2a_3 > b_1b_2, \text{ 則 } a_2 > \frac{b_1b_2}{a_3}, \beta = a_2 - b_1 > \frac{b_1b_2}{a_3} - b_1 = \frac{b_1}{a_3}(b_2 - a_3) > \frac{b_1}{a_3}\delta$$

$$\therefore \alpha + \beta = \alpha + \frac{b_2}{a_2}\beta + \left(1 - \frac{b_2}{a_2}\right)\beta \geq \frac{a_1}{b_3}\gamma + \left[\frac{b_1b_2}{a_2a_3} + \left(\frac{a_2 - b_2}{a_2}\right) \cdot \frac{b_1}{a_3}\right]\delta = \frac{a_1}{b_3}\gamma + \frac{b_1}{a_3}\delta \geq \gamma + \delta$$

2000 年第 12 屆亞太數學奧林匹亞競賽試題

中華民國數學奧林匹亞委員會

比賽時間：2000 年 3 月 15 日(9:30 - 13:30)

比賽地點：台師大理學院

注意事項：

- (1) 本試卷共五題，每題滿分七分。
- (2) 考試時間：4 小時(9:30 - 13:30)。
- (3) 計算紙必須連同試卷繳回。
- (4) 不可使用計算器。

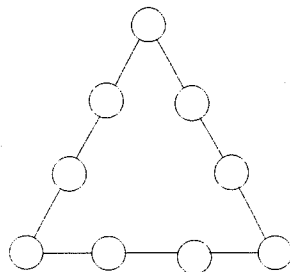
【問題一】求下列級數的和

$$S = \sum_{i=0}^{101} \frac{x_i^3}{1-3x_i+3x_i^2}, \text{ 其中 } x_i = \frac{i}{101}.$$

【問題二】將九個數字 1, 2, ..., 9 全部填入以下三角形邊上的九個小圓中，使得每一個小圓中恰有一個數字，且滿足：

- (i) 三角形每一邊上的四個數字和都相等；
- (ii) 三角形每一邊上的四個數字之平方和也都相等。

試問有多少種不同的填法？



【問題三】過三角形 ABC 的頂點 A 之中線及內角平分線分別與 \overline{BC} 相交於點 M 及 N 。令通過 N 而與 \overline{NA} 垂直的直線分別與 \overline{MA} 及直線 BA 相交於點 Q 及點 P ，且通過 P 而與直線 BA 垂直的直線與直線 AN 相交於點 O 。試證：直線 QO 與 \overline{BC} 垂直。

【問題四】設 n, k 為滿足 $n > k$ 的正整數。證明：

$$\frac{1}{n+1} \cdot \frac{n^n}{k^k \cdot (n-k)^{n-k}} < \frac{n!}{k! \cdot (n-k)!} < \frac{n^n}{k^k \cdot (n-k)^{n-k}}.$$

【問題五】給定數列 $0, 1, \dots, n$ 的一個排列 (a_0, a_1, \dots, a_n) 。當 $i > 0, a_i = 0$ 且 $a_{i-1} + 1 = a_i$ 時，將 a_i 與 a_{i-1} 互換，稱作一次「合法轉換」。若排列 (a_0, a_1, \dots, a_n) 可經由有限次合法轉換而得到排列 $(1, 2, \dots, n, 0)$ ，則稱此排列為「正規排列」。

試問哪些 n 能使排列 $(1, n, n-1, \dots, 3, 2, 0)$ 是一個正規排列？

1999 年第 31 屆 IChO 競賽(II) :

試題參考題解與評分標準

—邁向 2005 年第 37 屆國際化學奧林匹亞—

方泰山* 汪炳鈞** 劉如熹*** 何寶珠# 陳彥潔##

*國立臺灣師範大學化學系 **國立清華大學化學系

***國立臺灣大學化學系 #國立基隆女子中學

##教育部中教司

試題與評析詳見本刊第 228 期第 49 頁

問題 1

23 分

A 部分 (PART A)

1-1. 由計算決定化合物 Q 之分子式，並寫下其燃燒之平衡方程式，同時表示出各物質之正確狀態。

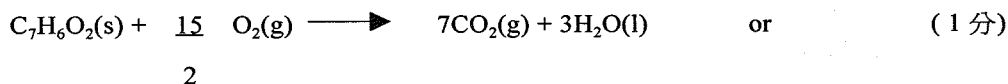
計算

$$\text{Mole C : H : O} = \frac{(1.5144)(12.0/44.0)}{12.0} : \frac{(0.2656)(2.0/18.0)}{1.0} : \frac{(0.1575)}{16.0}$$

$$= 0.0344 : 0.0295 : 0.00984 = 7 : 6 : 2$$

實驗式式量 $\text{C}_7\text{H}_6\text{O}_2 \xrightarrow{=122}$

$\text{C}_7\text{H}_6\text{O}_2$ 的式量與分子量相等，故實驗式及即為分子式 (2 分)



Q 的分子式正確得 2 分，方程式及狀態都正確得 1 分，共 3 分。

1-2. 計算卡計之熱容量(heat capacity of the calorimeter) (不包含水)。

Mole $Q = \frac{0.6000}{122.0} = 4.919 \times 10^{-3}$	(0.5 分)
$q_v = n\Delta U^0 = \frac{0.6000 \times (-3079)}{122.0} = -15.14 \text{ kJ}$	(2 分)
總熱容量 = $-q_v = \frac{15.14}{\Delta T} = \frac{6.730 \text{ kJ}}{2.250} = 6.730 \text{ kJ K}^{-1}$	(1.5 分)
水的熱容量 = $710.0 \times 4.184 = 2971 \text{ J K}^{-1}$	(1 分)
卡計之熱容量 = $6730 - 2971 = 3759 \text{ J K}^{-1}$	(1 分)

共 6 分

卡計之熱容量為 3759 J K^{-1}

1-3. 計算化合物 Q 之標準生成焓(the standard enthalpy of formation) ΔH_f^0 。

$\Delta n_g = \frac{7-15}{2} = -0.5 \text{ mol}$	(0.5 分)
$\Delta H^0 = \Delta U^0 + RT \Delta n_g$	(0.5 分)
$= -3079 + (8.314 \times 10^{-3})(298)(-0.5)$	(1 分)
$= -3079 - 1$	
$= -3080$	(0.5 分)
$\Delta H^0 = (7\Delta H_f^0 \text{ CO}_2(\text{g}) + 3\Delta H_f^0 \text{ H}_2\text{O}(\text{l})) - (\Delta H_f^0 \text{ Q})$	(1 分)
$\Delta H_f^0 \text{ of Q} = 7(-393.51) + 3(-285.83) - (-3080)$	(1 分)
$= -532 \text{ kJ mol}^{-1}$	(0.5 分)

共 5 分

Q 之 ΔH_f^0 為 -532 kJ mol^{-1}

B 部分 (PART B)

1-4. 由計算結果推導化合物 Q 於苯中主要為單體(monomer)，還是二聚體(dimer)？

(假定 Q 於水中是單體)

$C_B (\text{mol L}^{-1})$	0.0118	0.0478	0.0981	0.156	
$C_W (\text{mol L}^{-1})$	0.00281	0.00566	0.00812	0.0102	
either C_B/C_W	4.20	8.44	12.1	15.3	
or C_B/C_W^2	1.49×10^3	1.49×10^3	1.49×10^3	1.50×10^3	(2 分)
(or $\sqrt{C_B/C_W}$)	38.6	38.6	38.6	38.7)	
由上述可知 C_B/C_W 值變動很大，但 C_B/C_W^2 or $\sqrt{C_B/C_W}$ 值幾為恆定，顯示在苯中 Q 結為雙分子。					
Q 於苯中是	<input type="checkbox"/>	單體(monomer)	<input checked="" type="checkbox"/>	二聚體(dimer.)	(1 分)

共 3 分

1-5. 計算含 0.244 g 之 Q 化合物於 5.85 g 之苯中形成溶液時，其凝固點(T_f)在一大氣壓下為何？

計算

若 Q 在苯中完全為二聚體，則顯然其分子量應該是 244。

$$\text{莫耳分率 } Q_2 = \frac{0.244/244}{(0.244/244) + (5.85/78.0)} = 1.32 \times 10^{-2} \quad (0.01316) \quad (3 \text{ 分})$$

$$\Delta T_f = \frac{(8.314)(278.55)^2}{9.89 \times 10^3} \cdot 1.32 \times 10^{-2} = 0.861 \quad (2 \text{ 分})$$

$$T_f = 5.40 - 0.861 = 4.54 \text{ } ^\circ\text{C} \quad (1 \text{ 分})$$

溶液之 T_f 為

4.54

$^\circ\text{C}$

溫度錯誤扣 1 分，熔化熱錯誤亦扣 1 分，總共 6 分。

問題 2

20 分

A 部分 (PART A)

2-1. 加入 1.00 mL 之 HCl 後，混合水溶液中那一種離子最先反應？那一種離子成為產物？

最先反應的離子是

A^{2-}

0.5 分

成為產物的離子是

HA^-

0.5 分

2.2 (2-1)中的產物之產量是多少 mmol？

產物之產量(mmol) =

$1.00 \times 0.300 = 0.300$

0.5 分

2-3. 寫出 (2-1) 中之產物與溶劑反應的主要平衡方程式。



1 分

2-4. Na_2A 與 NaHA 原有存在之量為多少 mmol ?

計算

在 pH 8.34 , 此等於 $(\text{p}K_{a1} + \text{p}K_{a2})/2$ 之下, 所有 A^{2-} 皆以 HA^- 狀態存在

$$\begin{aligned} \text{因此 } \text{A}^{2-} \text{ 在溶液中之初毫莫耳數} &= 0.300 \times 10.00 \\ &= 3.00 \text{ mmol} \end{aligned}$$

在 pH 10.33 的緩衝狀態下, $[\text{A}^{2-}]$ 與 $[\text{HA}^-]$ 之比值為 1。

$$\text{因此 } [\text{HA}^-]_{\text{initial}} + [\text{HA}^-]_{\text{formed}} = [\text{A}^{2-}]_{\text{initial}} - [\text{HA}^-]_{\text{formed}}$$

$$\text{HA}^- \text{ 之初毫莫耳數} = 3.00 - 0.300 - 0.300 \text{ mmol} = 2.40 \text{ mmol}$$

Na_2A 之 mmol 數 =

3.00

2.0 分

NaHA 之 mmol 數 =

2.40

2.5 分

2-5. 計算反應至第二當量點(second equivalence point) 需 HCl 的總體積為多少?

計算

$$\begin{aligned} \text{需要的 HCl 之總體積} &= [(2 \times 3.00) + 2.40]/0.300 \\ &= 28.00 \text{ mL} \end{aligned}$$

$$\text{需 HCl 的總體積} = 28.00 \text{ mL}$$

1.5 分

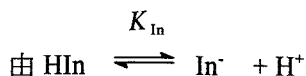
B 部分 PART B

2-6. 計算溶液 III 於 400 nm 之吸收度。

計算

溶液 III 是含 10^{-5} M 指示劑及 1.0M CH_3COOH 的溶液, 為得到此溶液的吸收度, 必須先計算溶液之 $[\text{H}^+]$ 濃度, 再計算指示劑基本形式的濃度。

$$\begin{aligned} \text{溶液 III 中的 } [\text{H}^+] &= \sqrt{K_a \cdot C} \\ &= \sqrt{1.75 \times 10^{-5} \times 1.0} \\ &= 4.18 \times 10^{-3} \quad (1.0 \text{ 分}) \end{aligned}$$



$$K_{\text{In}} = \frac{[\text{H}^+][\text{In}^-]}{[\text{HIn}]} \quad (0.5 \text{ 分})$$

$$\frac{[\text{In}^-]}{[\text{HIn}]} = \frac{K_{\text{In}}}{[\text{H}^+]}$$

$$= \frac{10^{-3.38}}{10^{-2.38}}$$

$$= 0.100$$

$$\frac{[\text{In}^-]}{[\text{HIn}]} = 0.100 \quad (1.0 \text{ 分})$$

然而 $[\text{HIn}] + [\text{In}^-] = 10^{-5}$

$$10[\text{In}^-] + [\text{In}^-] = 10^{-5}$$

$$[\text{In}^-] = 0.091 \times 10^{-5} \quad (1.5 \text{ 分})$$

$$\therefore \text{溶液 III 的吸收度} = \frac{0.091 \times 10^{-5}}{1.00 \times 10^{-5}} \times 0.300$$

$$= 0.027 \quad (1.0 \text{ 分})$$

單位不正確扣 0.5 分

溶液 III 於 400 nm 之吸收度 =

0.027

5 分

- 2-7. 將溶液 II 與溶液 III 以 1 : 1 之體積比混合後，除了 H_2O , H^+ 及 OH^- 外，寫出於混合溶液中全部可能存在之化學物種。

$$\text{CH}_3\text{COOH}, \text{CH}_3\text{COO}^-, \text{Na}^+, \text{HIn}, \text{In}^-$$

1.5 分

- 2-8. (2-7)中的混合溶液於 400 nm 的吸收度(absorbance)為何？

計算

當溶液 II 和 III 以 1:1 的體積比混合時，可計算 0.05M CH_3COO^- / 0.45M CH_3COOH 的緩衝液之 $[\text{H}^+]$ 。

$$\begin{aligned}
 \text{混合液之 } [H^+] &= K_a \frac{[CH_3COOH]}{[CH_3COO^-]} \\
 &= 1.75 \times 10^{-5} \times \frac{0.45}{0.05} \\
 &= 15.75 \times 10^{-5} \quad (1.0 \text{ 分}) \\
 \text{因此 } \frac{[In^-]}{[HIn]} &= \frac{K_{In}}{[H^+]} = \frac{10^{-3.38}}{15.75 \times 10^{-5}} \\
 \frac{[In^-]}{[HIn]} &= 2.65 \quad (1.0 \text{ 分}) \\
 \text{然而 } [HIn] + [In^-] &= 10^{-5} \\
 \frac{[In^-]}{2.65} + [In^-] &= 10^{-5} \\
 [In^-] &= 0.726 \times 10^{-5} \quad (1.5 \text{ 分}) \\
 \therefore \text{溶液的吸光度} &= \frac{0.726 \times 10^{-5}}{1.0 \times 10^{-5}} \times 0.300 \\
 &= 0.218 \quad (0.5 \text{ 分})
 \end{aligned}$$

單位不正確扣 0.5 分。

混合溶液於 400 nm 的吸光度(absorbance) =

0.218

4 分

2-9. (2-7)中的混合溶液於 400 nm 的穿透度(transmittance)為何?

計算

$$\begin{aligned}
 \text{溶液之透光度} &= \text{antilog}(-\text{吸光度}) \\
 &= 0.605
 \end{aligned}$$

混合溶液的穿透度 =

0.605 or 60.5%

1 分

問題 3

20 分

3-1. 此系列中有多少貝他衰變(β^- decays)? 將其計算過程寫出。

計算

$$A = 232 - 208 = 24;$$

產生 $24/4 = 6$ 個 α 粒子 (1 分)故核電荷減少 $2 \times 6 = 12$ 單位，但實際上核電荷只減少 $90 - 82 = 8$ 單位，所以應該有 $12 - 8 = 4\beta^-$ 個產生。 (1 分)

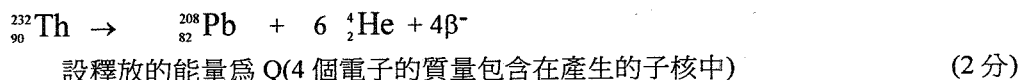
2 分

貝他衰變(β^- decays)數目 =

4

3-2. 完成此衰變鏈有多少能量被釋放出來 (以 MeV 為單位)?

計算



$$Q = [m({}^{232}\text{Th}) - m({}^{208}\text{Pb}) - 6m({}^4\text{He})]c^2$$

$$= [232.03805 \text{ u} - 207.97664 \text{ u} - 6 \times 4.00260 \text{ u}] \times 931.5 \text{ MeV u}^{-1}$$

$$= (0.04581 \text{ u})(931.5 \text{ MeV u}^{-1}) = 42.67 \text{ MeV} \quad (2 \text{ 分})$$

4 分

能量被釋放 = 42.67 MeV

3-3. 以瓦(watts)為單位計算 1.00 kg 的 ${}^{232}\text{Th}$ (半生期 $t_{1/2} = 1.40 \times 10^{10}$ 年) 之能量生成速率。
($1\text{W} = \text{J s}^{-1}$)

計算

$$1.00 \text{ kg 含有: } (1000\text{g} \times 6.02 \times 10^{23} \text{ atom mol}^{-1}) / 232 \text{ g mol}^{-1}$$

$$= 2.60 \times 10^{24} \text{ 原子} \quad (1 \text{ 分})$$

$${}^{232}\text{Th} \text{ 的衰變常數}$$

$$\lambda = 0.693 / [(1.40 \times 10^{10} \text{ y})(3.1540 \times 10^7 \text{ s y}^{-1})]$$

$$= 1.57 \times 10^{-18} \text{ s}^{-1} \quad (1 \text{ 分})$$

$$\text{活性 } A = N\lambda = (2.60 \times 10^{24})(1.57 \times 10^{-18})$$

$$= 4.08 \times 10^6 \text{ dps (disintegrations s}^{-1}\text{)}$$

因每次衰變釋放能量 42.67 MeV (1分)

故產生能量的速率(功率)

$$4.08 \times 10^6 \text{ dis s}^{-1} \times 42.67 \text{ MeV dis}^{-1} \times 1.602 \times 10^{-13} \text{ J MeV}^{-1} \\ = 2.79 \times 10^{-5} \text{ J s}^{-1} = 2.79 \times 10^{-5} \text{ W} \quad (2分)$$

5分

能量生成速率 = 2.79×10^{-5} W

3-4. ^{228}Th 為鈾系列之一員，當 1.00g 之 ^{228}Th (半生期 $t_{1/2} = 1.91$ 年) 存於容器中 20.0 年，於 0°C 及 1 atm 下將產生多少 cm^3 之氦(helium)？

計算



各種中間產物的半生期比 ^{228}Th 短得多

$$A = \lambda N = (0.693/1.91\text{y})[(1.00\text{g} \times 6.02 \times 10^{23} \text{ mol}^{-1})/228\text{mol}^{-1}] \\ = 9.58 \times 10^{20} \text{ y}^{-1} \quad (1分)$$

收集的 He 的數目

$$N_{\text{He}} = (9.58 \times 10^{20} \text{ y}^{-1})(20.0 \text{ y})(5 \text{ particles}) \\ = 9.58 \times 10^{22} \text{ 個氦粒子} \quad (1分)$$

$$V_{\text{He}} = (9.58 \times 10^{22} \times 2214 \text{ L mol}^{-1} \times 10^3 \text{ cm}^3 \text{ L}^{-1})/6.02 \times 10^{23} \text{ mol}^{-1} \\ = 3.56 \times 10^3 \text{ cm}^3 \quad (2分)$$

5分

0°C 及 1 atm 下將產生氦 = 3.56×10^3 cm^3

3-5. 於分離後得鈾系列之一員，被發現含 1.50×10^{10} 原子之核種，以每分鐘 3440 個原子之速率衰變(disintegrations per minute)，以年為單位計算其半生期。

計算

$$A = \lambda N; \\ t_{1/2} = 0.693/\lambda = 0.693N/A \quad (1.5分)$$

$$= (0.693 \times 1.5 \times 10^{10} \text{ atom})/3440 \text{ atom min}^{-1} \quad (1.5分) \\ = 3.02 \times 10^6 \text{ min}$$

$$= 5.75 \text{ years} \quad (1分)$$

4分

半生期 = 5.75 年

問題 4

28 分

4-1.

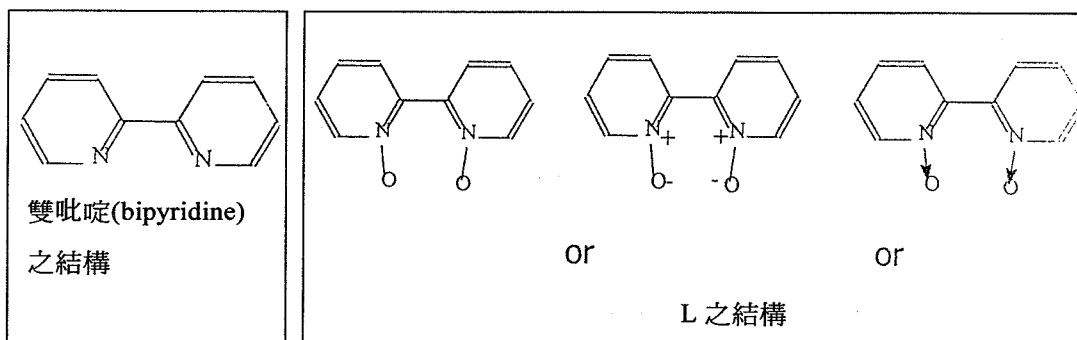
L 之分子式是



2 分

因為 L 是由雙吡啶合成的。在反應過程中雙吡啶只是氧化成雙吡啶氧化物，雙吡啶的分子量是 156(對 $C_{10}H_8N_2$ 而言)，而 L 的分子量是 188，這相差的 32 是由於增加二個氧原子所致，所以 L 的分子式為 $C_{10}H_8N_2O_2$ 。

4-2. 畫出雙吡啶(bipyridine) 與 L 之結構。



2 分

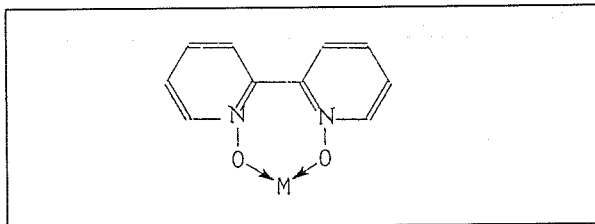
2 分

4-3. 配位基 L 具有電荷嗎？若有其淨電荷為何？請於正確答案之方格內打勾。

-2 電荷	-1 電荷	no 電荷	+1 電荷	+2 電荷
		√		

1 分

4-4. 當一分子的 L 與金屬(M)結合後，畫出所形成錯合物之結構，其中配位的原子必須清楚地表示出來。



2 分

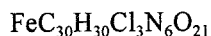
4-5. A 之實驗式(empirical formula)決定。

計算

	Fe	C	H	Cl	N	O
%	5.740	37.030	3.090	10.940	8.640	34.560*
mol	0.103	3.085	3.090	0.309	0.617	2.160
mol ratio	1.000	29.959	30.00	2.996	5.992	20.971
atom ratio	1	30	30	3	6	21

(* 氧的百分比會有差異)

A 之實驗式為



3 分

錯合物 $\text{FeL}_m(\text{ClO}_4)_n \cdot 3\text{H}_2\text{O}$ 中 m 及 n 之值為

m =

3

1 分

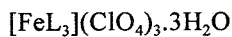
n =

3

1 分

因為分子式含有一個 Fe 原子，故實驗式即為分子式，L 的分子式由前面 4a 和 4b 獲得，所以我們可得出 $m=3$ ，由此可得出 $n=3$ 。

A 之完整分子式為



1 分

當 A 溶解於水中時陽離子與陰離子之數目比為

1 : 3

3 個 $(\text{ClO}_4)^-$ 原子團溶於水解離成自由離子，故整個錯合物在水中形成 1 個 $[\text{FeL}_3]^{3+}$ 及 3 個 $(\text{ClO}_4)^-$ 離子。

1 分

4-6. Fe 於錯合物 A 中之氧化數為

+3 or III

0.5 分

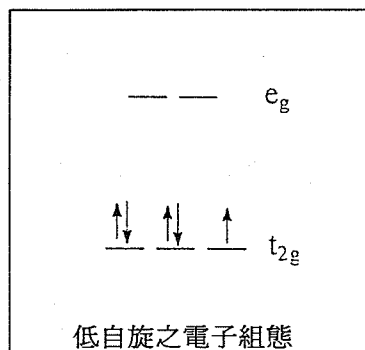
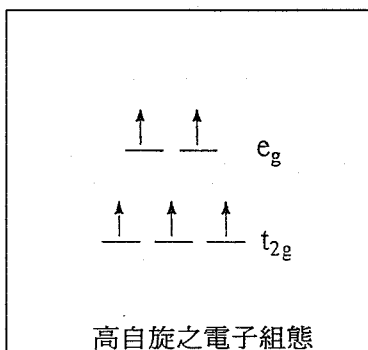
錯合物中之 Fe 離子之 d 電子數目為

=

5

0.5 分

寫下此錯合物中可能存在高自旋 (high spin) 及低自旋 (low spin) 之電子組態 (configurations)。



2 分

那一種組態是正確的(高自旋或低自旋)? 請於正確答案之方格內打勾。

√	High spin
	Low spin

1 分

支持你的答案(高自旋或低自旋)之最佳的證據為下列何種分析方法? 請於正確答案之方格內打勾。

	顏色 (Color)
	元素分析數據 (Elemental analysis data)
√	由磁性分所得之磁距 (Magnetic moment)
	莫耳導電度 (Molar conductance)

1 分

不成對電子數與磁矩的簡單關係是如下： $\mu = \sqrt{n(n+2)}$ ，於此 μ 為只考慮自旋時 ('spin-only') 磁矩，而 n 為不成對電子數。如此在高自旋狀態下， $\mu = \sqrt{5(5+2)} = \sqrt{35} = 5.92 \text{ B.M.}$ ；但在低自旋狀態下，則 $\mu = \sqrt{1(1+2)} = \sqrt{3} = 1.73 \text{ B.M.}$ 。

由表 4b 可得 A 之磁矩 $\mu = 6.13 \text{ B.M.}$ 。這是在高自旋的範圍內，故可得結論是 A 為高自旋的錯合物。

4-7. A 之最大吸收波長 λ_{\max} 為

450

nm

(1 分)

由表 4c，吸收的色光與所見的光為互補色。

計算只考慮自旋時 ('spin-only')，此錯合物 B 之磁距為何？

計算

由 $\mu = \sqrt{n(n+2)}$

對 Cr^{3+} ， $n = 3$

故 $\mu = \sqrt{3(3+2)} = \sqrt{15} = 3.87 \text{ B.M.}$ (1 分)

只考慮自旋時 ('spin-only')，此錯合物 B 之磁距 =

3.87

B.M.

4-9.

B 之實驗式為

$\text{CrC}_{20}\text{H}_{18}\text{N}_4\text{Cl}_3\text{O}_9$

1 分

x =

2

1 分

y =

2

1 分

z =

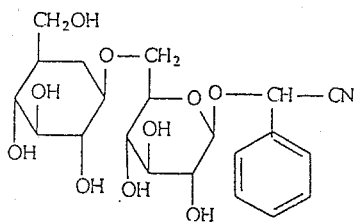
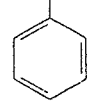
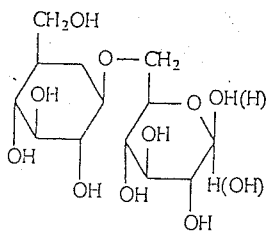
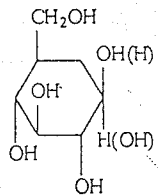
1

1 分

問題 5

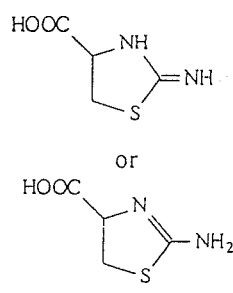
23 分

5-1. 寫出化合物 A-D 的化學結構，並以 Haworth 投射圖 (Haworth projection) 標示其立體化學(B 除外)。

 <p style="text-align: center;">A</p> <p style="text-align: right;">(3 分)</p> <p>附註：cyanohydrin 部分正確得 1 分，2 個 D-glucose 正確得 1 分 1,6-連接正確得 1 分。</p>	<p style="text-align: center;">HO-CH-CN</p>  <p style="text-align: center;">(1 分)</p> <p style="text-align: center;">B</p>
 <p style="text-align: center;">C</p> <p style="text-align: right;">(2 分)</p> <p>附註：2 個 D-glucose 正確得 1 分，1,6-連接正確得 0.5 分，β-連接正確得 0.5 分，。</p>	 <p style="text-align: center;">D</p> <p style="text-align: right;">(1.5 分)</p> <p>附註：結構正確得 0.5 分，光學幾何正確得 1 分。</p>

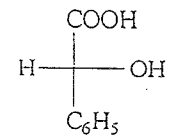
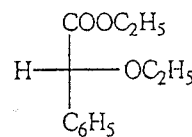
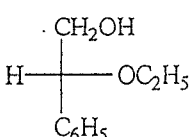
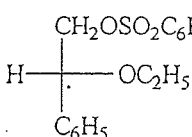
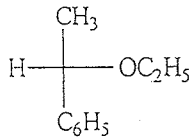
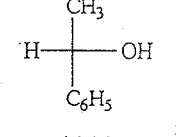
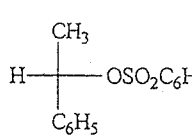
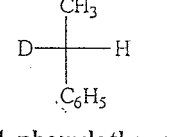
(7.5 分)

5-2. 寫出化合物 F 及 G 的分子式。寫出化合物 H 及 I 的化學結構，同時標示化合物 H 的立體化學。

化合物 F 的分子式 = HCN (0.5 分) 化合物 G 的分子式 = H ₂ S (0.5 分)	 化合物 H	 化合物 I
---	---------------------------------------	---

(5 分)

5-3. 導出(-)-E 的絕對組態(absolute configuration)。寫出反應流程中每個中間產物(J-O)的化學結構及其組態，按答案紙中的要求以 R 或 S 指出該化合物的絕對組態。

 (-) E <input type="checkbox"/> R or <input type="checkbox"/> S (2 marks) 附註：結構正確得 1 分，R、S 及光學幾何正確各 0.5 分。	 (-) J (1.5 mark) 附註：酯基、醚基正確各得 0.5 分，光學幾何正確得 0.5 分。	 (-) K (1 mark) 附註：結構正確得 0.5 分，光學幾何正確得 0.5 分。	 Compound L (1 mark) 附註：結構正確得 0.5 分，光學幾何正確得 0.5 分。
 (-) M (1 mark) 附註：結構正確得 0.5 分，光學幾何正確得 0.5 分。	 (-) N <input type="checkbox"/> R or <input type="checkbox"/> S (1.5 mark) 附註：結構正確得 0.5 分，R、S 及光學幾何正確各 0.5 分。	 Compound O (1 mark) 附註：結構正確得 0.5 分，光學幾何正確得 0.5 分。	 (-) 1-phenylethane-1-d <input type="checkbox"/> R or <input type="checkbox"/> S (0.5 mark) 附註：R、S 正確得 0.5 分。

共 9.5 分

5-4. 將化合物 O 轉化成(-)-1-氘-1-苯基乙烷的反應機構應為下列何者

	S_N1
√	S_N2
	S_Ni
	E1
	E2

1 分

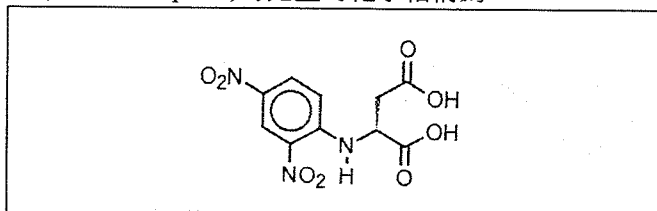
問題 6

16 分

6-1. 個磺酸基(sulfonic acid groups)在氧化一個二硫鍵(disulfide bond) 後形成。

(1 分)

6-2. DNP-Asp 在等電點(isoelectric point)時完整的化學結構為



2 分

附註：結構正確得 2 分，濃縮的結構式扣 1 分，Zwitterionic 形式扣 0.5 分，DNP 原子團誤置則 0 分。

6-3. B8 的序列(sequence) 為

2 分

附註：胺基酸系列正確，但以"Cys"代替 "Cya"扣 0.5 分，"Cya"放在正確的 N-端，但系列錯誤扣 1 分，相反的系列則 0 分。

6-4. B9 的序列(sequence) 為

1 分

附註：胺基酸系列正確，但以"Cys"代替 "Cya"扣 0.5 分，胺基酸系列錯誤即使 Asp 和

Leu 置於正確位置也是 0 分，因為這項訊息在試題中已經題到。

6-5. A 的完整結構為

Cys-Tyr-Ile-Glu-Asp-Cys-Pro-Leu-Gly-NH₂

5 分

附註：相同的胺基酸系列及雙硫鍵位置給 5 分，每一缺失或誤置雙硫鍵位置扣 1 分，在 C 的一端少掉 NH₂ 扣 0.5 分，用 "Cya" 代替 "Cys" 扣 0.5 分，胺基酸系列錯誤則為 0 分。

6-6. 寫出修正後 A 之結構於下，同時圈出結構中釋放出氨的部位

Cys-Tyr-Ile-Gln-Asn-Cys-Pro-Leu-Gly-NH₂

3 分

附註：每一醯胺基的位置正確得 0.5 分(在 C 的一端 Glu->Gln, Asp->Asn)，每一圈選正確位置亦得 0.5 分。(圈選在 Gly 也可以)

6-7. A 的等電點(isoelectric point) 為

9

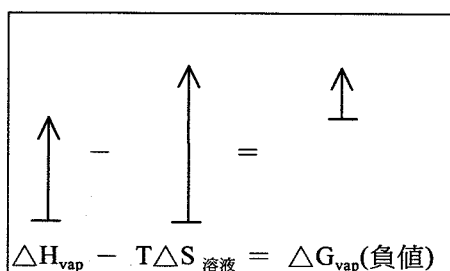
2 分

來函照登

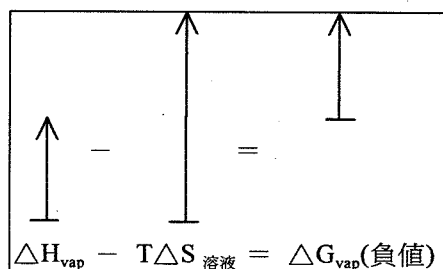
編輯您好：

針對貴刊（科學教育月刊第 226 期。八十九年一月）P15 討論：《為什麼非揮發性溶質能使溶液之蒸氣下降》一文，提出一補充修正意見。

於該文 P16 圖二，所引用的圖形，嚴和說來應有誤，因為溶液或溶劑的揮發是屬於自發性反應，其 $\Delta G < 0$ 才是自發性反應，而由該圖視之，並且於 P16 倒數第二行言：「造成前者有較大正值的 ΔG ，使蒸發過程較困難…」。蒸發既是自發反應， ΔG 一定小於 0，所以文章須改正。圖形也須配合文章修正如下：



(a) 溶液



(b) 溶劑

由於溶劑中 ΔG_{vap} 負值較大，故其較易蒸發，蒸氣壓較大，而溶液中 ΔG_{vap} 負值較小，蒸發較困難，蒸氣壓因而下降。

台北縣石碇中學 彭俊傑

洪教授鈞啓：

來函敬悉，感謝您為科學教育月刊的付出與努力，使全國科教同仁能擁有一片交換心得、分享經驗的園地。有關石碇中學彭老師對拙作的修正意見（科學教育月刊第 226 期，為什麼非揮發性溶質能使溶液之蒸氣壓下降），本人對其詳細的閱讀及精準的訂正，深感佩服，若依其意見將圖 2 修改如下可能更接近事實，敬請參酌。

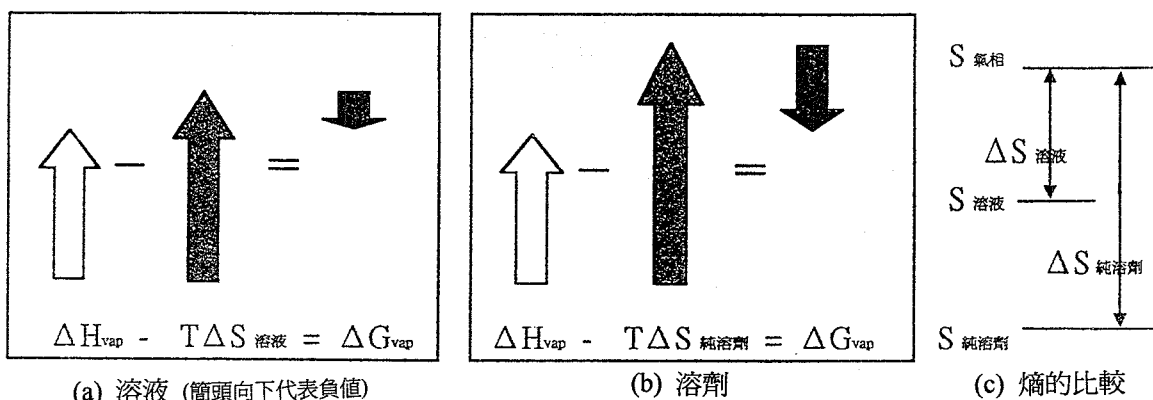


圖 2 溶液和純溶劑溶液 ΔH 、 ΔS 和 ΔG 的比較 溶液(a)純溶劑(b)含有相同的 ΔH_{vap} ，但兩者熵的變化不同(c)，造成前者有較大正值或較小負值的 ΔG_{vap} ，使蒸發過程較困難，蒸氣壓因而下降。

簡此 順祝

教 安

國立三重高中
邱智宏 敬上 4/5

誰疊的最高

設計者：黃福坤

器材：

報紙 60 張、膠帶 1 卷、安全剪刀 1 把（材料用完不補充）。

構想：

利用報紙疊成一高度最高的結構體，使用報紙總張數固定，可使用膠帶，但不得用其他器材，可以將報紙作各種可能的方式變形或摺疊……等。並請將設計簡圖繪製於答案紙上。

成績計算：

在一定時間內，設計後開始製作；並將結構體在一樓中庭組合，能支撐最少 5 分鐘以上的最高結構體，由高度決定成績高低。

（取材自：國立臺灣師範大學科學教育中心承辦之台北地區國中學生科學創意競賽題目。競賽地點：臺灣師大科教大樓）

Science Education Monthly

No. 229, April, 2000

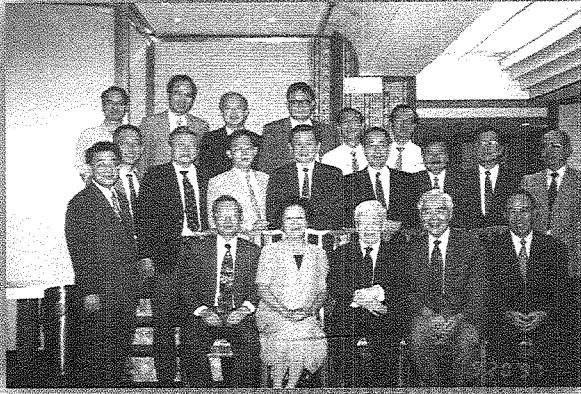
CONTENTS

Memorial Report for Dr.Ta-You Wu	
About Dr.Ta-You Wu.....	2
The late Dr.Ta-You Wu, former Academia Sinica President, and his correct and penetrating views about science education reform.....Chin-Chi Chao	5
Chairman Dr.Ta-You Wu, my sincerely favorite..... Ming-Tong Wey	9
In remembrance of Dr.Ta-You Wu	Jau-D Chen 13
Mourn over the decease of a great physicist-Prof. Ta-You Wu.....Der-San Chuu	17
In remembrance of Dr.Ta-You Wu, Chairman of Advisor Committee of Science Education in Ministry of Education..... C. S.Shern	21
Science Classroom	
Galileo's spring: The application of lens.....Chun-Yen Chang, Chia-Chu Tung	22
The questions in the 7 th issue of high school mathematics through communication	Division of Mathematics, Taipei Municipal Chien Kuo Senior High School 27
The solutions for reference and analysis on the questions in the 4 th issue of high school mathematics through communication	Division of Mathematics, Taipei Municipal Chien Kuo Senior High School 29
A crypto arithmetic problem.....Jau-D Chen	28
Surprising structures: Build a tower with newspapers.....Fu-Kwun Hwang	72
Experiment	
Mystery chemical magic: Cold boiling and cold fountain	Chin-Hsiang Fang, Thomas C. Yang 34
Evaluation	
The report of the 88 th high school mathematical competition with solutions to problems	Shian Leou, Tai Cheng Tso 38
International Mathematics and Science Olympiad	
Items of the 2000 APMO Competition	The Mathematical Olympiad Committee of ROC 54
Solution and marking scheme of tasks of Bangkok 31 st ChO Competition (II)--ROC Toward 2005 Hosting 37 th IChO	Tai-Shan Fang, Biing-Jiun Uang, Ru-Shi Liu, Jewel Ho and Yen-Chieh Chen 55
Correspondence.....	71

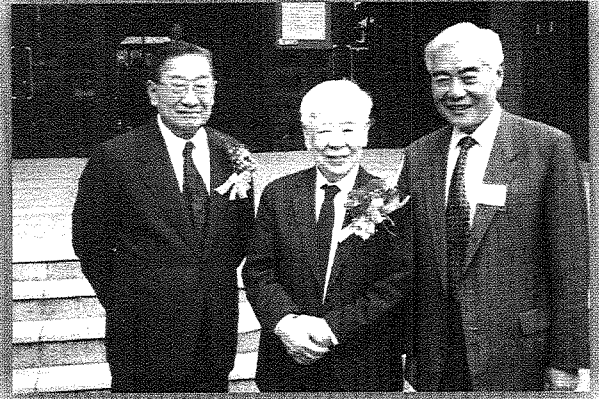
統一編號

006388890014

懷念吳大猷先生



吳大猷先生九秩大壽，與祝壽者合影



吳先生與李煥資政（左）、趙金祁教授（右）合影於台灣師大科教大樓前



吳先生主持科學教育研討會之神韻（一）



吳先生九秩華誕之愉悅神情



吳先生主持科學教育研討會之神韻（二）



吳先生主持科學教育研討會之神韻（三）