教育部八十八學年度高級中學數學能力競賽決賽成績報告與試題解答

柳　賢　左太政
國立高雄師範大學　數學系

教育部為激發各公私立高級中學學生在數學方面高度學習的興趣，訓練學生獨立思考能力，並引發學生間與校際間的互相觀摩，提升數學教育品質，特舉辦此項高中數學能力競賽，本項活動今年由國立高雄師範大學數學系承辦，參加對象是由教育部中部辦公室、台北市及高雄市政府教育局辦理之複賽中選拔出優秀學生代表參加決賽，其中台灣省 34 人、台北市 11 人、高雄市 5 人，國立馬祖高中 1 人並另加國際奧林匹亞國手 2 人計 53 人；其中港明高中 1 位同學因故無法參加，故實際參賽同學有 52 人。

本次競賽活動自八十八年十二月三十一日至八十九年一月四日假國立高雄師範大學理學院數學系舉行，此項競賽活動是我國選拔國際數學奧林匹亞（ＩＭＯ）及亞太數學奧林匹亞研習營（ＡＰＭＯ）代表隊的重要參考，所以參賽者皆卯足全力參加競賽；競賽內容充實而豐富，「筆試、口試、獨立研究」是本次競賽的重點亦是評審的依據，「專題探討」分別由葉永南教授、陳昭地教授、郭滄海教授主講，內容生動活潑，使學子們獲益斐淺，「技能專題」藉由實地操作動能幾何（ＧＳＰ）軟體使參賽者瞭解套裝軟體在數學上的應用，「成果評鑑」由評審教授說明此次競賽解題的過程並與參賽者共同探討各種解題過程的樂趣，還有讓參賽者舒暢身心的「影片欣賞」、「聯誼會餐」及中國造船公司的「參觀活動」等，且因活動期間跨越千禧年，「歡迎晚會」更別具跨年晚會意味，而適逢有二位參賽同學於活動期間過生日，輔導員巧心設計慶生活動使壽星驚喜萬分；就整體競賽活動而言，這不僅是一項數學競賽活動，更可藉由共同的生活，互相的切磋，訓練學生的人格修養及人際關係的培養，提高學生對數學研究的興趣及數學教育的品質，在承辦單位精心安排活動下更讓大家都留下了美好的回憶與豐碩的成果。

此次競賽之優勝者由教育部發給獎狀及獎學金，獲得前三等獎之２０位同學得由就讀學校依照「高級中學數學及自然學科資賦優異學生輔導升學要點」推薦參加上項資優生保送升學甄試，其指導教師由主管教育行政機關給予獎勵。成績特優者得經評審委員會推薦參加亞太數學奧林匹亞研習營。本次競賽的成績評分是依據筆試（一）佔 35%、筆試（二）佔 35%、口試（Ａ）佔 20%及口試（Ｂ）佔 10%的總分來評定名次。學生獨立研究的部分不計成績，但可供評審委員評比名次之參考或供推薦參加 2000 年亞太數學奧林匹亞研習營

之依據參考。經過五天的競賽活動，由師大附中陳泊寧及武陵高中王嘉慶榮獲第一等獎各得壹萬伍仟元獎學金，建國高中黃彥維等 8 位同學獲得第二等獎各得壹萬元獎學金，武陵高中劉浩任等 10 位同學獲得第三等獎各得捌仟元獎學金，其他 32 位同學均獲入選獎各得伍仟元獎學金。除了獲前三等獎的同學外彰化高中許登貴、協同中學許栢紋、板橋高中陳韋銓及興國高中蕭清峰等四位同學也獲得評審委員的推薦參加亞太數學奧林匹亞研習營。

以下針對此次競賽的試題提供參考解答，且就所有參賽的 52 位學生答題概況加以統計分析與評析，作爲國內相關學者專家及數學教師對輔導數學資優生之應用與研究的參考。

一、參賽學生筆試成績分析圖表

表一　全部參賽學生筆試成績統計表（總人數：52 人）

項目＼題目	筆試(一)35%			筆試(二)35%		
	Q1	Q2	Q3	Q4	Q5	Q6
平均值	8.77	21.04	4.67	25.67	13.88	15.81
標準差	12.05	13.29	10.35	12.99	13.78	15.07
得分率	0.25	0.60	0.13	0.73	0.40	0.45

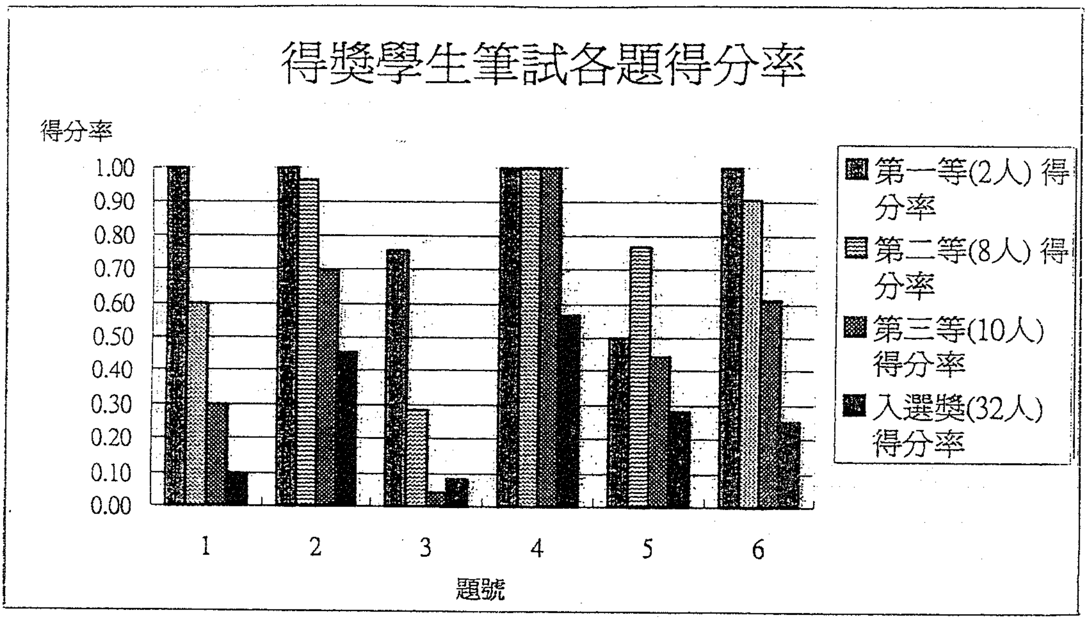
表二　前三等獎學生筆試成績統計表（總人數：20 人）

項目＼題目	筆試(一)35%			筆試(二)35%		
	Q1	Q2	Q3	Q4	Q5	Q6
平均值	17.15	29.20	7.40	35.00	20.25	26.95
標準差	13.82	10.95	12.73	0.00	12.62	13.77
得分率	0.49	0.83	0.21	1.00	0.58	0.77

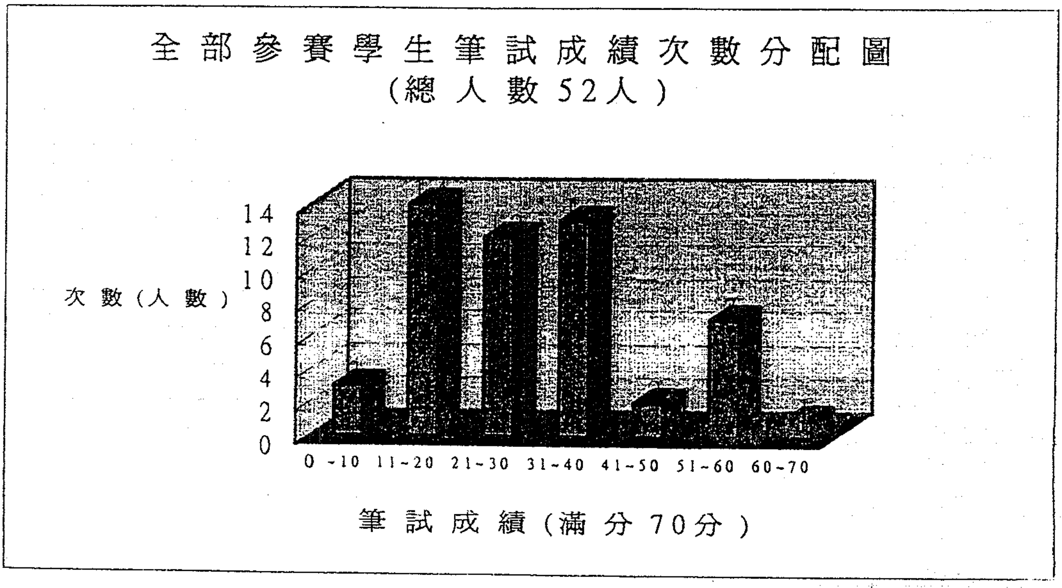
表三　得獎學生筆試成績統計表（請參照圖一）

得獎等次及人數	項目＼題目	筆試(一)35%			筆試(二)35%		
		Q1	Q2	Q3	Q4	Q5	Q6
第一等(2 人)	平均值	35.00	35.00	26.50	35.00	17.50	35.00
第二等(8 人)	平均值	21.00	33.75	10.00	35.00	26.88	31.75
第三等(10 人)	平均值	10.50	24.40	1.50	35.00	15.50	21.50
入選獎(32 人)	平均值	3.53	15.94	2.97	19.84	9.91	8.84
第一等(2 人)	標準差	0.00	0.00	12.02	0.00	24.75	0.00
第二等(8 人)	標準差	12.85	2.31	15.58	0.00	5.94	5.87
第三等(10 人)	標準差	11.89	14.05	3.37	0.00	13.22	17.49
入選獎(32 人)	標準差	6.93	12.13	8.31	13.65	13.12	11.27
第一等(2 人)	得分率	1.00	1.00	0.76	1.00	0.50	1.00
第二等(8 人)	得分率	0.60	0.96	0.29	1.00	0.77	0.91
第三等(10 人)	得分率	0.30	0.70	0.04	1.00	0.44	0.61
入選獎(32 人)	得分率	0.10	0.46	0.08	0.57	0.28	0.25

圖一　得獎學生筆試各題得分率（請參照表三）



圖二　全部參賽學生筆試成績次數分配圖



二、參賽學生獨立研究成績統計分析圖表

表四　全部參賽學生獨立研究成績統計表（總人數：52 人）

項目＼題目	獨立研究(一)		獨立研究(二)		獨立研究(三)		獨立研究(四)	
	Q1	Q2	Q3	Q4	Q5	Q6	Q7	Q8
平均值	17.71	29.21	28.92	33.17	16.69	5.58	33.38	5.77
標準差	7.50	9.96	11.16	6.03	15.64	11.53	5.46	8.11
得分率	0.51	0.83	0.83	0.95	0.48	0.16	0.95	0.16

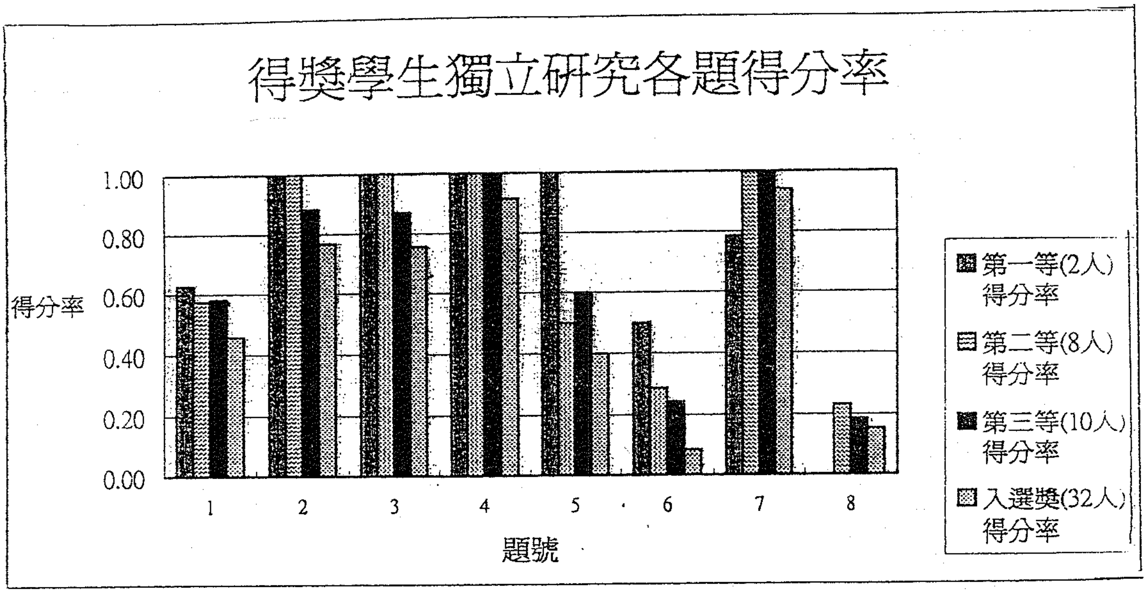
表五　前三等學生獨立研究成績統計表（總人數：20 人）

項目＼題目	獨立研究(一)		獨立研究(二)		獨立研究(三)		獨立研究(四)	
	Q1	Q2	Q3	Q4	Q5	Q6	Q7	Q8
平均值	20.45	33.00	32.75	35.00	21.00	10.00	34.25	6.50
標準差	6.82	7.85	6.38	0.00	16.43	14.23	3.35	8.75
得分率	0.58	0.94	0.94	1.00	0.60	0.29	0.98	0.19

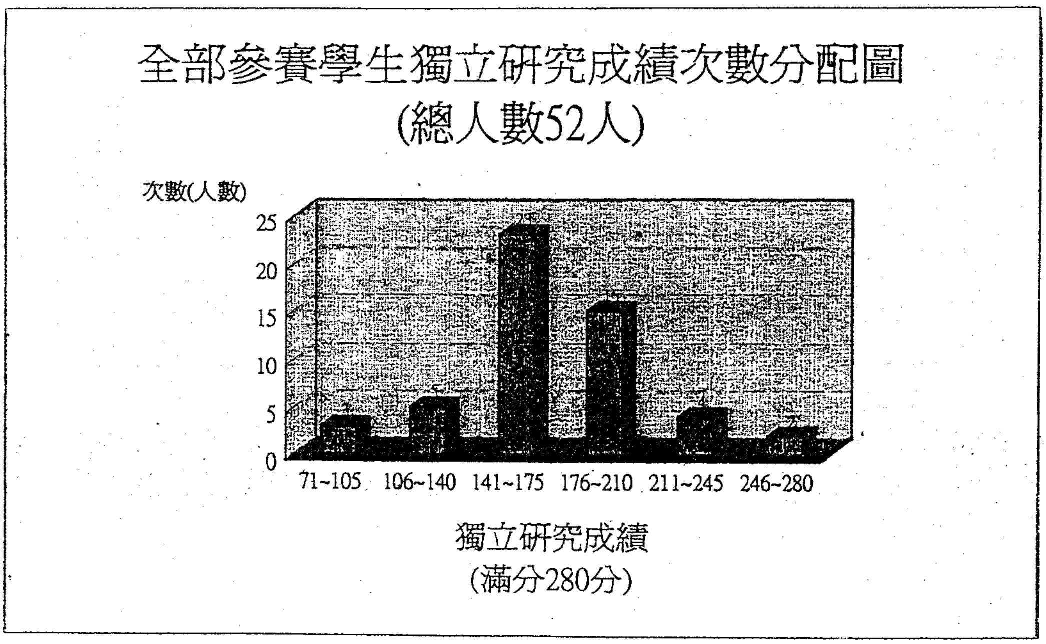
表六　得獎學生獨立研究成績統計表（請參照圖三）

得獎等次及人數	項目＼題目	獨立研究(一)		獨立研究(二)		獨立研究(三)		獨立研究(四)	
		Q1	Q2	Q3	Q4	Q5	Q6	Q7	Q8
第一等(2 人)	平均值	22.00	35.00	35.00	35.00	35.00	17.50	27.50	0.00
第二等(8 人)	平均值	20.13	35.00	35.00	35.00	17.50	10.00	35.00	8.13
第三等(10 人)	平均值	20.40	31.00	30.50	35.00	21.00	8.50	35.00	6.50
入選獎(32 人)	平均值	16.00	26.84	26.53	32.03	14.00	2.81	32.84	5.31
第一等(2 人)	標準差	9.90	0.00	0.00	0.00	0.00	24.75	10.61	0.00
第二等(8 人)	標準差	7.88	0.00	0.00	0.00	15.58	13.63	0.00	11.93
第三等(10 人)	標準差	6.20	11.01	8.64	0.00	18.07	14.15	0.00	6.26
入選獎(32 人)	標準差	7.49	10.51	12.82	7.50	14.75	8.61	6.43	7.79
第一等(2 人)	得分率	0.63	1.00	1.00	1.00	1.00	0.50	0.79	0.00
第二等(8 人)	得分率	0.58	1.00	1.00	1.00	0.50	0.29	1.00	0.23
第三等(10 人)	得分率	0.58	0.89	0.87	1.00	0.60	0.24	1.00	0.19
入選獎(32 人)	得分率	0.46	0.77	0.76	0.92	0.40	0.08	0.94	0.15

圖三 得獎學生獨立研究各題得分率（請參照表六）



圖四 全部參賽學生獨立研究成績次數分配圖



三、教育部八十八學年度高級中學數學能力競賽決賽成績

編號	姓名	性別	就讀學校	年級	指導老師	得獎等次
88041	陳泊寧	男	師大附中	二	李善文	第一等獎
88053	王嘉慶	男	武陵高中	三	許桂淋	第一等獎
88021	黃彥維	男	建國高中	三	蕭慈雲	第二等獎
88026	翁竟智	男	建國高中	三	游森棚	第二等獎
88001	柏盛峰	男	建國高中	二	毛延宗	第二等獎
88006	曾于容	女	北一女中	三	林耀煌	第二等獎
88016	賴柏翔	男	師大附中	三	李文光	第二等獎
88010	何思賢	男	高雄師大附中	二	吳吉昌	第二等獎
88019	謝易達	男	港明高中	三	陳啓欣	第二等獎
88042	全明道	男	新竹中學	三	謝坤家	第二等獎
88032	劉任浩	男	武陵高中	三	許桂淋	第三等獎
88036	呂楊凱	男	師大附中	三	李文光	第三等獎
88035	林家平	男	高雄中學	三	邵文山	第三等獎
88003	曹葉軒	男	台中一中	二	朱標宗	第三等獎
88052	謝卓勳	男	馬公高中	三	林玉芬	第三等獎
88018	張廖俊魁	男	台中一中	三	賴瑞楓	第三等獎
88031	程惠祥	男	成功高中	三	游經祥	第三等獎
88034	曾化鈞	男	新豐高中	三	鄭光志	第三等獎
88044	蔡宗霖	男	台南一中	三	林坤宏	第三等獎
88014	高浩仁	男	興國高中	三	周益在	第三等獎
88051	許栢紋	女	協同中學	三	俞繼光	入選獎
88043	劉育佑	男	嘉義高中	二	蔡安華	入選獎
88033	許登貴	男	彰化高中	三	黃溪松	入選獎
88025	黎冠成	男	高雄中學	三	蘇源森	入選獎
88012	張經略	男	永平中學	三	曾明霞	入選獎
88048	郭俊亨	男	台南一中	三	林坤宏	入選獎
88008	陳宥霖	男	彰化高中	三	陳錦源	入選獎
88022	陳韋銓	男	板橋高中	二	蔡志強	入選獎
88039	蕭清峰	男	興國高中	三	周益在	入選獎
88002	魏軍浩	男	花蓮高中	三	陳貞康	入選獎
88011	張國章	男	師大附中	三	鄒慶生	入選獎
88029	趙崇志	男	台南一中	二	黃承鋤	入選獎
88037	傅斯緯	男	新竹科學園區實驗中學	三	鄭慶瑜	入選獎
88028	李思穎	女	台中女中	三	陳勝雄	入選獎
88038	陳科廷	男	台中一中	二	朱標宗	入選獎
88023	梁元立	男	彰化高中	三	謝銘峰	入選獎
88030	蕭偉成	男	高雄中學	三	蘇源森	入選獎
88045	劉峰豪	男	建國高中	二	李　瑞	入選獎
88049	張凌逢	男	成淵高中	三	陳正鴻	入選獎
88046	林鼎博	男	新竹中學	三	謝坤家	入選獎
88004	楊清傑	男	嘉義高中	三	吳昕昇	入選獎
88007	王耀廣	男	台東高中	三	趙聰敏	入選獎
88020	羅婉嫣	女	高雄女中	三	吳建生	入選獎
88013	王業凱	男	台中一中	三	王振盛	入選獎
88015	李麗梅	女	高雄女中	三	洪淑芬	入選獎
88017	陳　亮	男	清水中學	三	林雅惠	入選獎
88027	卓旭方	男	三民中學	三	鄭歷田	入選獎
88050	徐欣怡	女	新竹女中	三	李竹梅	入選獎
88009	張毓軒	男	斗六高中	三	謝天任	入選獎
88040	葉精國	男	馬祖高中	三	劉增鎮	入選獎
88005	黃朝章	男	鳳新高中	三	方進龍	入選獎
88047	王欽洲	男	虎尾高中	三	黃文猷	入選獎
88024	陳宛如	女	港明高中	三	陳啓欣	缺考

四、筆試試題及參考解答

筆試試題(一)

注意事項：

(1)時間分配：2 小時(10:00-12:00)　　　　(2)配分：每題皆為 7 分。

(3)不可使用計算器。

問題(一)設 ABCD 為一個凸四邊形，兩條對角線 $\overline{AC}$ 與 $\overline{BD}$ 相交於 O 點，且 $\overline{AO}=\overline{OC}$，若 P 點為線段 $\overline{AO}$ 的任一內點，延長 $\overline{BP}$ 交 $\overline{AD}$ 於 E 點，延長 $\overline{DP}$ 交 $\overline{AB}$ 於 F 點。其次延長 $\overline{FO}$ 交 $\overline{CD}$ 於 H 點，延長 $\overline{EO}$ 交 $\overline{BC}$ 於 G 點。試證 $\overline{FG} \parallel \overline{EH}$。

問題(二)設 a,b 為正整數，且 a 的所有正因數之積等於 b 的所有正因數之積，試證：a=b.

問題(三)設 $f(x)=a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+\cdots+a_1x+a_0$ 為一個 n 次整係數多項式，k 為正整數且 0＜k＜n。若存在一個質數 p 使得 $p \mid a_k$，且 $p \mid a_{k-1},\cdots,p \mid a_1,p \mid a_0$，但 $p^2 \mid a_0$。試證：存在一個整係數多項式 $g(x)$ 滿足下列條件：

(1) $g(x)$ 的次數大於或等於 k，

(2) $g(x)$ 為 $f(x)$ 的因式，

(3) $g(x)$ 不可能分解成兩個次數都大於或等於 1 的整係數多項式的乘積。

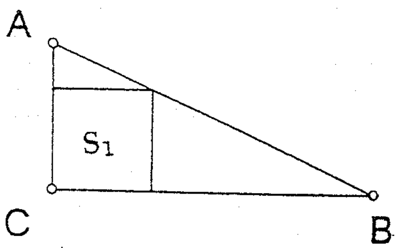
筆試試題(二)

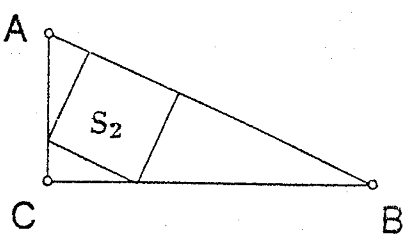
注意事項：

(1)時間分配：2 小時(14:20-16:20)　　　　(2)配分：每題皆為 7 分。

(3)不可使用計算器。

問題(四)如下圖，S_1 與 S_2 是直角三角形 ABC 的內接正方形，已知 S_1 的面積為 361 平方公分，且兩股 $\overline{AC}$ 與 $\overline{BC}$ 長的和為 380 公分，試求 S_2 的面積為多少平方公分？





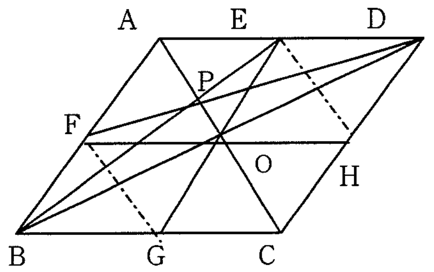
問題(五)設 c 為非零的整數，定義數列 $a_1,a_2,a_3,\cdots$ 為 $a_1=2$ 且 $a_{n+1}=ca_n+\sqrt{(c^2-1)(a_n^2-4)}$，$n=1,2,3,\cdots$. 試證 a_{2000} 是整數。

問題(六)設數列 $\{a_n\}$ 滿足 $\dfrac{a_n+a_{n+2}}{2}\le a_{n+1}$，n 是任意正整數。試證

$$\frac{a_1+a_3+\cdots+a_{2n+1}}{n+1}\le\frac{a_2+a_4+\cdots+a_{2n}}{n}.$$

筆試試題參考解答

【筆試問題一參考解答】



在ΔDPA 中，因$\overline{AF}$,$\overline{EP}$, $\overline{DO}$ 交於 B 點,

由西瓦定理知，$\dfrac{\overline{DF}}{\overline{FP}}\cdot\dfrac{\overline{PO}}{\overline{OA}}\cdot\dfrac{\overline{AE}}{\overline{ED}}=1$,

在ΔDPC 中，由西瓦定理知$\dfrac{\overline{DF}}{\overline{FP}}\cdot\dfrac{\overline{PO}}{\overline{OC}}\cdot\dfrac{\overline{CH}}{\overline{HD}}=1$, $\because\overline{AO}=\overline{OC}$

由上面兩式知 $\dfrac{\overline{CH}}{\overline{HD}}=\dfrac{\overline{AE}}{\overline{ED}}$ $\therefore\overline{FH}\,//\,\overline{AC}$

同理： $\overline{FG}\,//\,\overline{AC}$ 故 $\overline{FG}\,//\,\overline{EH}$

【筆試問題二參考解答】

設 a的正因數依序為 $a_1=1<a_2<\cdots<a_r$,

且 b的正因數依序為 $b_1=1<b_2<\cdots<b_s$

$\because\ a_1a_2\cdots a_r=b_1b_2\cdots b_s$且 $a_k.a_{r-k+1}=a$

$\forall k=1,2,\cdots r$

$\therefore\ (a_1a_r)(a_2a_{r-1})\cdots(a_ra_1)=(a_1a_2\cdots a_r)(a_1\cdots a_r)=a^r$,

且 $b^s=(b_1\cdots b_s)(b_1\cdots b_s)$

$\therefore\ a^r=b^s$,設 $a=P_1^{r_1}\cdots P_n^{r_n},b=P_1^{s_1}\cdots P_n^{s_n}$

$\therefore\ rr_i=ss_i$ $\forall i=1,2\cdots,n$

預證 $r=s$ 否則 $r\ne s$,設 $r>s$,$\therefore\ s_i>r_i,\forall i=1,2\cdots,n$

$\therefore\ r=(r_1+1)\cdots(r_n+1)<(s_1+1)\cdots(s_n+1)=s$ 矛盾

因此 $r=s$

【筆試問題三參考解答】

一.若 $f(x)$是質式多項式，則 $f(x)$即為所求

二.若 $f(x)$可分解

令 $f(x)=g_1(x)p_1(x)$ 其中 $g_1(x)=(\alpha_i x^i+\alpha_{i-1}x^{i-1}+\cdots+\alpha_0)$

$p_1(x)=(\beta_j x^j+\beta_{j-1}x^{j-1}+\cdots+\beta_0)$ $\quad i+j=n$

不妨設 $\deg g_1(x)\ge \deg p_1(x)$

(1)若 $\deg g_1(x)<k$ 時 $\therefore \deg p_1(x)$

$\because p \mid a_0$

$\therefore p \mid \alpha_0$ 或 β_0 且 $p^2 \nmid a_0$

若 $p \mid \alpha_0$，$p \mid a_0$

$\Rightarrow p \mid \alpha_1, p \mid \alpha_2 \cdots p \mid \alpha_i$（由比較係數模 p 可得）

$\therefore p$ 皆整除 $g_1(x)$ 係數和 $p \nmid a_K$ 不合

同理若 $p \mid \beta_0$ 也不合 $\therefore \deg\ g_1(x)\ge k$

(2) $\deg\ g_1(x)\ge k$

由 $p \mid a_0, p^2 \nmid a_0$

設 $p \mid \alpha_0 \Rightarrow p \nmid \beta_0$

$\Rightarrow p \mid \alpha_1, p \mid \alpha_2 \cdots p \mid \alpha_{k-1}$

又 $\because p \nmid a_k$

$\therefore p \mid \alpha_k\beta_0+\alpha_{k+1}\beta_1+\cdots \Rightarrow p \nmid \alpha_k\beta_0 \quad \therefore p \nmid \alpha_k$

若 $g_1(x)$ 是質式多項式 $\Rightarrow$ 即為所求

若 $g_1(x)$ 可分為 $g_2(x)p_2(x)$

$[\deg g_2(x)\ge \deg p_2(x)]$

由(1) $\therefore \deg g_2(x)\ge k$

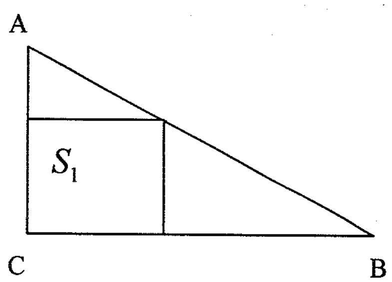
再如(2)討論則 有一 $g_m(x)$ 符合條件

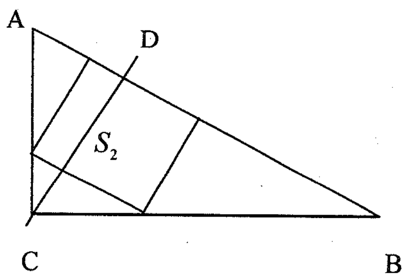
即 $\deg g_m(x)\ge k, g_m(x) \mid f(x)$ 且 $g_m(x)$ 質式多項式 $\therefore$ 命題得證

(3)若由(2)若 $p \nmid \alpha_0, p \mid \beta_0 \Rightarrow$ 一樣若 $j<k$ 不合 　如(1)

若 $j\ge k$ 則就由 $p_1(x)$ 如(2)討論一樣 $\exists p_q(x)$ 符合條件

【筆試問題四參考解答】





令 $\overline{AC}=a+19,\overline{BC}=b+19,\overline{AB}=c$

過 C 作 $\overline{CD}\perp\overline{AB}$ 於 D, S_2邊長爲x

由Δ相似性質知 $\dfrac{a}{19}=\dfrac{19}{b}\Rightarrow ab=19^2$

且由 $a+b=380-38=38\times 9$

$\therefore c^2=(a+19)^2+(b+19)^2=(a+b)^2-2ab+38(a+b)+19^2\times 2$

$=38^2\times 9^2-2\times 19^2+38^2\times 9+2\times 19^2=38^2\times 9\times 10$

$\Rightarrow c=38\times 3\sqrt{10}=114\sqrt{10}$

$\therefore\overline{CD}=\dfrac{(a+19)(b+19)}{c}=\dfrac{19^2(2+18)}{114\sqrt{10}}=\dfrac{19\sqrt{10}}{3}$

由Δ相似性質 $\dfrac{\dfrac{19\sqrt{10}}{3}-x}{x}=\dfrac{\dfrac{19\sqrt{10}}{3}}{114\sqrt{10}}=\dfrac{1}{18}$

$x=114\sqrt{10}-18x$

$19x=114\sqrt{10}$

$x=6\sqrt{10}$

$\therefore x^2=36\times 10=360$ $\qquad\therefore S_2$ 的面積$=360cm^2$

【筆試問題五參考解答】

$\because a_{n+1}=ca_n+\sqrt{(c^2-1)(a_n^2-4)}$

$\therefore(a_{n+1}-ca_n)=\left(\sqrt{(c^2-1)(a_n^2-4)}\right)^2$

即 $a_{n+1}^2+c^2a_n^2-2ca_na_{n+1}=c^2a_n^2-4c^2-a_n^2+4$

$\Rightarrow a_{n+1}^2-2ca_na_{n+1}+4c^2+a_n^2-4=0\cdots\cdots(1)$

又 $(a_{n+2}-ca_{n+1})^2=\left(\sqrt{(c^2-1)(a_{n+1}^2-4)}\right)^2$

$\therefore a_{n+2}^2+c^2a_{n+1}^2-2ca_{n+1}a_{n+2}=c^2a_{n+1}^2-4c^2-a_{n+1}^2+4$

即 $a_{n+2}^2-2ca_{n+1}a_{n+2}+4c^2+a_{n+1}^2-4=0\cdots\cdots(2)$

(2)-(1)$\Rightarrow a_{n+2}^2-2ca_{n+1}a_{n+2}+2ca_na_{n+1}-a_n^2=0$

即 $(a_{n+2}-a_n)(a_{n+2}+a_n)-2ca_{n+1}(a_{n+2}-a_n)=0$

即 $(a_{n+2}-a_n)(a_{n+2}+a_n-2a_{n+1}c)=0$

又 $a_{n+2}-a_n\neq 0\quad\therefore a_{n+2}+a_n-2ca_{n+1}=0$

即 $a_{n+2}=2ca_{n+1}-a_n$

$\because a_1=2\therefore a_2=ca_1+\sqrt{(c^2-1)(a_1^2-4)}=2c\in Z$（$\because c$ 爲非零之整數）

由數學歸納法可將通式寫成

$a_{n+2}=2ca_{n+1}-a_n$，其中 a_{n+2} 的係數爲 1，而 a_{n+1} 係數爲 $2c\in Z, a_n$ 爲 1

$\therefore \forall n\in N, a_n\in Z \therefore a_{2000}$ 爲整數

【筆試問題六參考解答】

利用數學歸納法

$n=1$ 時，$\dfrac{a_1+a_3}{2}\le a_2$ 成立

設 $n=k$ 時成立，即 $\dfrac{a_1+a_3+\cdots+a_{2k+1}}{k+1}\le\dfrac{a_2+a_4+\cdots+a_{2k}}{k}$,

即 $k(a_1+a_2+\cdots+a_{2k+1})\le(k+1)(a_2+a_4+\cdots+a_{2k})\cdots\cdots(1)$

設 $n=k+1$ 時，欲證 $(k+1)(a_1+a_2+\cdots+a_{2k+3})\le(k+2)(a_2+a_4+\cdots+a_{2k+2})$

由題意知：$a_n+a_{n+2}\le 2a_{n+1}$ 即 $a_{n+2}-a_{n+1}\le a_{n+1}-a_n$

$\therefore$ 數列 $\{a_{n+1}-a_n\}$ 爲遞減

$(k+1)(a_{2k+3}-a_{2k+2})\le(a_2-a_1)+(a_4-a_3)+\cdots+(a_{2k+2}-a_{2k+1})$

即 $a_1+a_3+\cdots+a_{2k+1}+(k+1)a_{2k+3}\le a_2+a_4+\cdots+a_{2k}+(k+2)a_{2k+2}\cdots\cdots(2)$

(1)+(2)　　$(k+1)(a_1+a_3+\cdots+a_{2k+3})\le(k+2)(a_2+a_4+\cdots+a_{2k}+a_{2k+2})$

即 $\dfrac{a_1+a_3+\cdots+a_{2(k+1)+1}}{(k+1)+1}\le\dfrac{a_2+a_4+\cdots+a_{2(k+1)}}{k+1}$ 故得證

五、口試試題及參考解答

口試試題

1.在一次聯誼活動期間，每一位參加者都贈送其他的每一位參加者一件禮物。已知在活動中場休息時，主辦單位發現：

(1)至少有一半的參加者都已恰好獲得應得禮物數的二分之一，

(2)至少有三分之一的參加者都已恰好獲得應得禮物數的三分之一，

(3)至少有七分之一的參加者都已恰好獲得應得禮物數的七分之一。

試問最少有多少人參加這次活動？

2.給定一個銳角三角形 ABC，

(1)試用尺規作圖作出一個長寬之比爲三比一的內接矩形（其中兩個頂點在 $\overline{BC}$ 上），

(2)試問共有多少個這樣的矩形？

口試試題解答

【口試一參考解答】

設有 n 人參加這次活動，則每一位可得 n-1 件禮物，由條件(1)(2)(3)可知，n-1 爲 2．3．

7=42 的倍數，故可令

$$n = 42k + 1, k \in \{1,2,3,\cdots\}$$

若 n=43,

由條件(1)至少有 2 位參加者已恰好獲得半數的禮物，

由條件(2)至少有 15 位參加者已恰好獲得三分之一的禮物，

由條件(3)至少有 7 位參加者已恰好獲得七分之一的禮物，

如此，參加的人數至少有 44 位，矛盾!故 $n > 43$

以下證明 n=85 是可行的：

將 85 位參加者分成三組,各有 43,29,13 人,在活動中場休息時,僅僅各組內的參加者互相交換禮物

【口試二參考解答】

(1) 1.作矩形 DEFG , $D \in \overline{AB}, \overline{EF} \in \overline{BC}, \overline{DE} : \overline{EF} = 1:3$

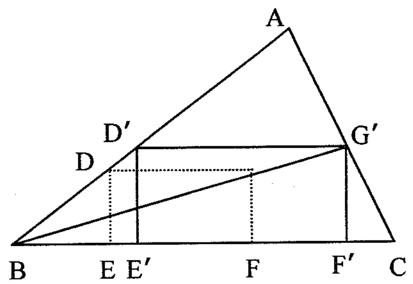
2.作 $\overrightarrow{BG}$交$\overline{AC}$於G'

3.作 $\overline{G'F'} \perp \overline{BC}$於$F'$　　$\overline{G'D'} \perp \overline{G'F'}$交$\overline{AB}$於$D'$　　$\overline{D'E'} \perp \overline{BC}$於$E'$

則 $D'E'F'G'$ 即爲所求

(2)若(1)中作 $\overline{DF} : \overline{EF} = 3:1$

使用相同方法(1)可得另一矩形　　∴共有 2 個矩形



六、獨立研究試題及參考解答

獨立研究試題(一)

注意事項：

(1)時間分配：1 時 50 分(08:10-10:00)　　(2)配分：每題皆爲 7 分。

(3)不可使用計算器。

問題(一)試求所有的正整數 n 使得 $n^3-8n^2+22n-21$ 爲完全平方數。

問題(二)試求所有的整數 x,y ，使得 $x>1, y>1$ 且 $(x-1)(y-1) \mid xy-1$.

獨立研究試題(二)

注意事項：

(1)時間分配：1 時 50 分(16:10-18:00)　　(2)配分：每題皆爲 7 分。

(3)不可使用計算器。

問題(三)設 a,b,c 爲多項式 x^3-8x^2+8x-1 的三個根，對於任一非負整數 n，表 $S_n=a^n+b^n+c^n$，試求 S_{2000} 的個位數。

問題(四)有 n 位學生參加一項數學競賽，這項競賽試題共分成兩大類：A 類與 B 類，每一大類各有 k 小題：$A_1, A_2, \cdots, A_k$ 及 $B_1, B_2, \cdots, B_k$，已知每一位學生解出 A 類的題數與解出 B 類的題數之差都是奇數；而對每一個 $i \in \{1,2,\cdots,k\}$，解出試題 A_i 的學生數與解出試題 B_i 的學生數之差都是偶數。試證：n 是一個偶數。

獨立研究試題(三)

注意事項：

(1)時間分配：2 時(8:00-10:00)　　(2)配分：每題皆爲 7 分。

(3)不可使用計算器。

問題(五)是否存在 $n(n\geq 2)$ 個相異正整數，其平方的倒數和爲整數？

問題(六)設 a,b,c 爲正數，試證：

$$\frac{1}{a(1+b)}+\frac{1}{b(1+c)}+\frac{1}{c(1+a)}\geq\frac{3}{1+abc}.$$

獨立研究試題(四)

注意事項：

(1)時間分配：1 時 50 分(10:10-12:00)　　(2)配分：每題皆爲 7 分。

(3)不可使用計算器。

問題(七)若一個直角三角形的三邊長恰好是方程式 $x^3-30x^2+281x-a=0$ 的三個根，其中 a 爲某一實數。試求此直角三角形的面積爲何？

問題(八)設

$$a_1\geq a_2\geq b_1\geq b_2\geq b_3\geq b_4\geq a_3\geq a_4>0$$

且 $a_1a_2a_3a_4=b_1b_2b_3b_4$.　試證：

$$a_1+a_2+a_3+a_4\geq b_1+b_2+b_3+b_4.$$

且等號成立的充要條件爲 $a_1 = a_2 = b_1 = b_2 = b_3 = b_4 = a_3 = a_4$.

獨立研究試題解答

【獨立研究一參考解答】

對於任意正整數 n，令 $a_n = n^3 - 8n^2 + 22n - 21$。因式分解得 $a_n = (n-3)(n^2-5n+7) = (n-3)((n-2)(n-3)+1)$。顯然 $a_1 = -6$ 與 $a_2 = -1$ 都不是完全平方數；而 $a_3 = 0$ 爲完全平方數。假設 $n > 3$ 且 a_n 爲完全平方數。因爲 $n-3$ 與 n^2-5n+7 互質，得 n^2-5n+7 亦爲完全平方數。因 $n>3$，得 $(n-3)^2 < (n-3)^2 + n - 2 = n^2 - 5n + 7 = (n-2)^2 + 3 - n < (n-2)^2$。即 n^2-5n+7 介於兩相鄰平方數之間，這是不可能的。因此 $n=3$ 爲所求。

【獨立研究二參考解答】

令 $f(x,y) = \dfrac{xy-1}{(x-1)(y-1)}, x>1, Y>1$ $\quad \because (x+1)(y+1) \mid xy-1 \quad \therefore f(x,y)$ 爲一正整數

$$\because f(x,y) = \frac{xy-x-y+1}{(x-1)(y-1)} + \frac{x+y-2}{(x-1)(y-1)} = 1 + \frac{(x-1)+(y-1)}{(x-1)(y-1)} = 1 + \frac{1}{x-1} + \frac{1}{y-1}, \ \therefore \frac{1}{x-1} + \frac{1}{y-1} \in N$$

設 $x \le y$，因 $x > 1, 1 \le \dfrac{1}{x-1} + \dfrac{1}{y-1} \le \dfrac{2}{x-1}$ 即 $x-1 \le 2$ 故 $1 < x \le 3$

(1)當 $x = 3, \dfrac{1}{x-1} + \dfrac{1}{y-1} = \dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{y-1} \in N$，且 $y \ge x = 3$，故 $y=3$ 爲唯一解

(2)當 $x = 2, \dfrac{1}{x-1} + \dfrac{1}{y-1} = 1 + \dfrac{1}{y-1} \in N, \quad \therefore \dfrac{1}{y-1} \in N \quad$ 又 $y \ge 2 \quad \therefore y = 2$

故 $(x,y) = (3,3),(2,2)$

【獨立研究三參考解答】

$S_0 = a^0 + b^0 + c^0 = 3, \quad S_1 = a+b+c = 8$（由根與係數知）

$S_2 = a^2 + b^2 + c^2 = (a+b+c)^2 - 2(ab+bc+ca) = 8^2 - 2\times 8 = 48$

當 $n \ge 0$ 時，$S_{n+3} = a^{n+3} + b^{n+3} + c^{n+3} \ge 8S_{n+2} - 8S_{n+1} + S_n$

$\therefore S_3 = 323 \equiv 3 \pmod{10}$

$S_4 \equiv 8 \pmod{10}, S_5 \equiv 8 \pmod{10}, S_{n+3} \equiv S_n \pmod{10}$

$2000 \div 3 = 666 \cdots\cdots 2$

故 $S_{2000} \equiv 8 \pmod{10}$

【獨立研究四參考解答】

令 x_i 表示第 i 位學生解出 A 類的題數，則其解出 B 類的題數爲

$$x_i \pm 2t_i - 1, \forall i = 1,2,3,\cdots,n$$

令 y_j 表示解出試題 A_j 的學生數，則解出試題 B_j 的學生數爲

$$y_j \pm 2s_j, \forall j = 1,2,3,\cdots,k$$

因爲

$$x_1 + x_2 + \cdots\cdots + x_n = y_1 + y_2 + \cdots + y_k$$

且

$$(x_1 \pm 2t_1 - 1) + (x_2 \pm 2t_2 - 1) + \cdots + (x_n \pm 2t_n - 1) = (y_1 \pm 2s_1) + (y_2 \pm 2s_2) + \cdots + (y_k \pm 2s_k)$$

故合併以上兩式可得

$$x_1 + (x_1 \pm 2t_1 - 1) + x_2 + (x_2 \pm 2t_2 - 1) + \cdots + x_n + (x_n \pm 2t_n - 1)$$
$$= y_1 + (y_1 \pm 2s_1) + y_2 + (y_2 \pm 2s_2) + \cdots + y_k + (y_k \pm 2s_k)$$

即 n 個奇數和

$$(\pm 2t_1 - 1) + (\pm 2t_2 - 1) + \cdots + (\pm 2t_n - 1)$$
$$= 2(y_1 + y_2 + \cdots + y_k) - 2(x_1 + x_2 + \cdots + x_n) + 2(\pm s_1 \pm s_2 \pm \cdots \pm s_k)$$

由此可得： n 是一偶數

【獨立研究五參考解答】

設 $a_1, a_2, \cdots, a_n$ 爲任意 n 個正整數，且 $1 < a_1 < a_2 < \cdots < a_n$　　$\therefore a_1 \geq 2, a_2 \geq 3, \cdots, a_k \geq k+1$

$$0 < \frac{1}{a_1^2} + \cdots + \frac{1}{a_n^2} < \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \cdots + \frac{1}{(n+1)^2} < \frac{1}{1\times 2} + \frac{1}{2\times 3} + \cdots + \frac{1}{n(n+1)} = 1 - \frac{1}{n+1} = \frac{n}{n+1} < 1$$

故不可能爲整數

【獨立研究六參考解答】

$$\frac{1}{a(1+b)} + \frac{1}{1+abc} = \frac{1}{1+abc}\left[\frac{1+abc}{a(1+b)} + 1\right] = \frac{1}{1+abc}\left[\frac{1+a}{a(1+b)} + \frac{b(1+c)}{1+b}\right]$$

$$\frac{1}{b(1+c)} + \frac{1}{1+abc} = \frac{1}{1+abc}\left[\frac{1+abc}{b(1+c)} + 1\right] = \frac{1}{1+abc}\left[\frac{1+b}{b(1+c)} + \frac{c(1+a)}{1+c}\right]$$

$$\frac{1}{c(1+a)} + \frac{1}{1+abc} = \frac{1}{1+abc}\left[\frac{1+abc}{c(1+a)} + 1\right] = \frac{1}{1+abc}\left[\frac{1+c}{c(1+a)} + \frac{a(1+b)}{1+a}\right]$$

三式相加

$$\frac{1}{a(1+b)} + \frac{1}{b(1+c)} + \frac{1}{c(1+a)} + \frac{3}{1+abc} =$$

$$\frac{1}{1+abc}\left[\frac{1+a}{a(1+b)} + \frac{b(1+c)}{1+b} + \frac{1+b}{b(1+c)} + \frac{c(1+a)}{1+c} + \frac{1+c}{c(1+a)} + \frac{a(1+b)}{1+a}\right] \geq \frac{1}{1+abc} \times 6\text{(利用算幾平均數)}$$

故得證

【獨立研究七參考解答】

令三根爲α,β,γ 且$\alpha\geq\beta\geq\gamma$

$\therefore\alpha+\beta+\gamma=30\qquad\alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha=281$

$\alpha^2+\beta^2+\gamma^2=(\alpha+\beta+\gamma)^2-2(\alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha)=900-562=338$

又$\alpha^2=\beta^2+\gamma^2\ \therefore\alpha^2=\dfrac{338}{2}=169$

$\therefore\alpha=13\qquad\beta+\gamma=30-13=17$

$\because\beta^2+\gamma^2=169\qquad\dfrac{1}{2}\beta\gamma=\dfrac{(\beta+\gamma)^2-(\beta^2+\gamma^2)}{4}=\dfrac{17^2-169}{4}=\dfrac{120}{4}=30$

【獨立研究八參考解答】

令$\alpha=a_1-b_2,\beta=a_2-b_1,\gamma=b_3-a_4,\delta=b_4-a_3$

欲證：$\alpha+\beta\geq\gamma+\delta$ 由題意知$(b_2+\alpha)a_2a_3a_4=b_1b_2b_3b_4$

$\Rightarrow\alpha a_2a_3a_4+b_2(\beta+b_1)a_3a_4=b_1b_2b_3b_4$

$\Rightarrow\alpha a_2a_3a_4+\beta b_2a_3a_4=b_1b_2b_3b_4-b_1b_2a_3a_4=b_1b_1(b_3b_4-a_3a_4)=b_1b_2[b_4(b_3-a_4)+a_4(b_4-a_3)]$

$=b_1b_2b_4\gamma+b_1b_2a_4\delta$

$\Rightarrow\alpha+\dfrac{b_2}{a_2}\beta=\dfrac{b_1b_2b_4}{a_2a_3a_4}\gamma+\dfrac{b_1b_2a_4}{a_2a_3a_4}\delta=\dfrac{a_1}{b_3}\gamma+\dfrac{b_1b_2}{a_2a_3}\delta\qquad(\because a_1a_2a_3a_4=b_1b_2b_3b_4)$

(i)若$a_2a_3\leq b_1b_2$,則$\alpha+\beta\geq\alpha+\dfrac{b_2}{a_2}\beta=\dfrac{a_1}{b_3}\gamma+\dfrac{b_1b_2}{a_2a_3}\delta\geq\gamma+\delta$

(ii)若$a_2a_3>b_1b_2$,則$a_2>\dfrac{b_1b_2}{a_3},\beta=a_2-b_1>\dfrac{b_1b_2}{a_3}-b_1=\dfrac{b_1}{a_3}(b_2-a_3)>\dfrac{b_1}{a_3}\delta$

$$\therefore\alpha+\beta=\alpha+\frac{b_2}{a_2}\beta+\left(1-\frac{b_2}{a_2}\right)\beta\geq\frac{a_1}{b_3}\gamma+\left[\frac{b_1b_2}{a_2a_3}+\left(\frac{a_2-b_2}{a_2}\right)\cdot\frac{b_1}{a_3}\right]\delta=\frac{a_1}{b_3}\gamma+\frac{b_1}{a_3}\delta\geq\gamma+\delta$$