2000 年第 12 屆亞太數學奧林匹亞競賽試題

中華民國數學奧林匹亞委員會

比賽時間：2000 年 3 月 15 日(9:30 – 13:30)

比賽地點：台師大理學院

注意事項：

(1)本試卷共五題，每題滿分七分。

(2)考試時間：4 小時(9:30 - 13:30)。

(3)計算紙必須連同試卷繳回。

(4)不可使用計算器。

【問題一】求下列級數的和

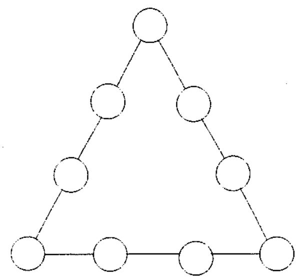
$$S=\sum_{i=0}^{101}\frac{x_i^3}{1-3x_i+3x_i^2}\text{，其中 } x_i=\frac{i}{101}\text{。}$$

【問題二】將九個數字 1, 2, …, 9 全部填入以下三角形邊上的九個小圓中，使得每一個小圓中恰有一個數字，且滿足：

(i)三角形每一邊上的四個數字和都相等；

(ii)三角形每一邊上的四個數字之平方和也都相等。

試問有多少種不同的填法？



【問題三】過三角形 ABC 的頂點 A 之中線及內角平分線分別與 $\overline{BC}$ 相交於點 M 及 N。令通過 N 而與 $\overline{NA}$ 垂直的直線分別與 $\overline{MA}$ 及直線 BA 相交於點 Q 及點 P，且通過 P 而與直線 BA 垂直的直線與直線 AN 相交於點 O。試證：直線 QO 與 $\overline{BC}$ 垂直。

【問題四】設 n, k 爲滿足 $n>k$ 的正整數。證明：

$$\frac{1}{n+1}\cdot\frac{n^n}{k^k\cdot(n-k)^{n-k}}<\frac{n!}{k!\cdot(n-k)!}<\frac{n^n}{k^k\cdot(n-k)^{n-k}}\text{。}$$

【問題五】給定數列 0, 1, …, n 的一個排列 $(a_0,a_1,\cdots,a_n)$。當 $i>0$, $a_i=0$ 且 $a_{i-1}+1=a_j$ 時，將 a_i 與 a_j 互換，稱作一次「合法轉換」。若排列 $(a_0,a_1,\cdots,a_n)$ 可經由有限次合法轉換而得到排列 $(1,2,\cdots,n,0)$，則稱此排列爲「正規排列」。

試問哪些 n 能使排列 $(1,n,n-1,\cdots,3,2,0)$ 是一個正規排列？