觀察者所看到的水中光源的位置

蔡尚芳
國立臺灣大學　物理系

摘　要

本文以折射率 n 大於 1 的水爲例，證明位於 y 軸上、在水面($y=0$)下實際深度爲 h 的一個點光源，當由不同的角度觀察時，其像的位置座標(X,Y)須滿足以下的方程式：

$$(\frac{X}{x_C})^{2/3}+(\frac{Y}{y_I})^{2/3}=1$$

上式中 x_C 爲發生全反射之入射點的 x-座標，而$(-y_I)$爲最大視深(h/n)。如以臨界角θ_C與折射角θ'表示，則上式亦可改寫如下：

$$(\sin^2\theta_C)(-\frac{Y}{h\sin\theta_C})^{2/3}+\frac{1}{1+(\tan^2\theta_C)\cos^2\theta'}=1$$

在國中理化與高中物理課本中，常以插置於水中的筷子或筆爲例，來說明光線在空氣與水的交界面，會出現折射的現象。有關此一現象的示意圖，課本上通常多以水中筷子或筆的末端爲點光源，畫出數條射向水面的光線，這些光線在到達水面後，先折射進入空氣中，再進入水面上方觀察者的眼睛。課文在說明成像的位置時，常將折射後的光線向後延伸回到水中，而以其交點爲點光源在水中成像的位置所在，亦即像點。此像點一般都畫在點光源到水面的垂直線上。嚴格地說，此一結果，只有當觀察者是沿著水面的法線方向注視光源時，才能成立。如就其他的觀察角度而言，水中點光源所成的像，其位置並非固定於前述的垂直線上，而是會隨著觀察的角度而變，所有觀察得到的像點，實際上是落在一條曲線（更嚴格地說，應是曲面）上的。

本文以水爲透明介質之範例，導出位於 y 軸上、在水面下實際深度爲 h 的一個點光源，當由不同的角度觀察時，其像的位置座標所須滿足的數學方程式，以更明白地指出包含所有像點的曲線的實際形狀。

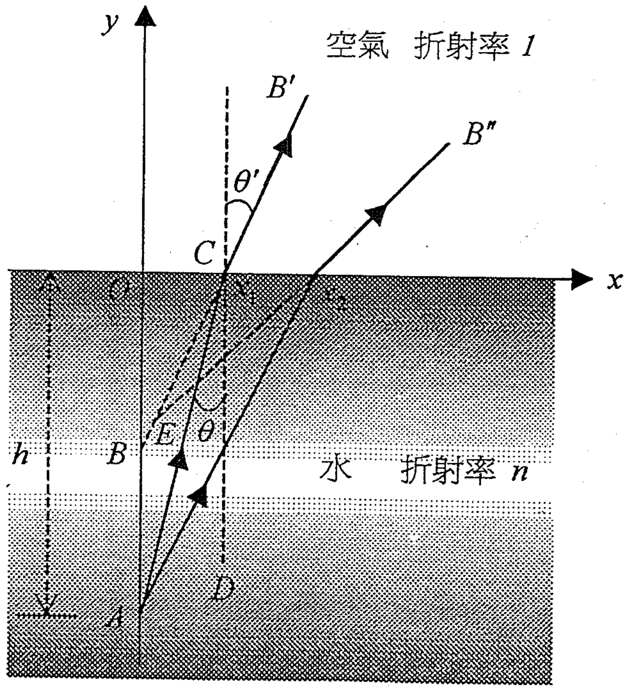


圖 1 光源在水面之折射

如圖 1 所示，在折射率爲 $n(n>1)$的水中有一點光源 A，其所發出的光線到達水面$(y=0)$後，折射進入空氣中（其折射率近似爲 1）。設其中一條光線射至水面 $C=(x_1,0)$點處，其入射角與折射角分別爲 θ 與 θ' ，則依據司乃耳折射定律(Snell's law of refraction)得

$$n\sin\theta=\sin\theta' \tag{1}$$

令點光源與水面之垂直距離 $\overline{OA}$ 爲 h（稱爲實際深度），折射線 CB' 之延伸線在水中與 y 軸之交點爲 B，則直線 BCB' 上任何一點的座標(x,y)須滿足下式：

$$y\tan\theta'=x-x_1 \tag{2}$$

因 $\angle CAO=\angle DCA=\theta$ ，故利用(1)式與三角函數的性質，可由 ΔCAO 得以下結果：

$$\sin\theta=\frac{x_1}{\sqrt{h^2+x_1^2}}=\frac{1}{\sqrt{1+\frac{h^2}{x_1^2}}} \tag{3}$$

$$\sin\theta'=n\sin\theta=\frac{n}{\sqrt{1+\frac{h^2}{x_1^2}}} \tag{4}$$

$$\tan\theta' = \frac{\sin\theta'}{\sqrt{1-\sin^2\theta'}} = \frac{1}{\sqrt{\frac{1}{\sin^2\theta'}-1}} = \frac{1}{\sqrt{\frac{1}{n^2\sin^2\theta}-1}} = \frac{n}{\sqrt{\frac{h^2}{x_1^2}+1-n^2}} \tag{5}$$

由(2)與(5)兩式可得

$$ny = (x-x_1)\sqrt{\frac{h^2}{x_1^2}+1-n^2} \tag{6}$$

同理，對應於另一入射點$(x_2,0)$之折射線的延伸線 BB''，其方程式爲

$$ny = (x-x_2)\sqrt{\frac{h^2}{x_2^2}+1-n^2} \tag{7}$$

設圖 1 中兩條折射線之延伸線在水中之交點 E（即像點）之座標爲(X,Y)，則(X,Y)須同時滿足前兩式，亦即其必爲前兩式聯立後所得之解。由(6)與(7)式可得以下關係：

$$nY\{\frac{1}{\sqrt{\frac{h^2}{x_1^2}+1-n^2}} - \frac{1}{\sqrt{\frac{h^2}{x_2^2}+1-n^2}}\} = x_2 - x_1 \tag{8}$$

$$X - x_1 = \frac{\sqrt{\frac{h^2}{x_2^2}+1-n^2}}{\sqrt{\frac{h^2}{x_2^2}+1-n^2} - \sqrt{\frac{h^2}{x_1^2}+1-n^2}}(x_2-x_1) \tag{9}$$

$$nY = (X-x_1)\sqrt{\frac{h^2}{x_1^2}+1-n^2} \tag{10}$$

令 $x_2 = x_1 + \Delta x$，則當 x_1 與 x_2 之差很小時，可將(8)式依微量 Δx 之冪次展開，而得其第一階微量滿足以下之關係：

$$-nY\Delta x\frac{d}{dx_1}(\frac{1}{\sqrt{\frac{h^2}{x_1^2}+1-n^2}}) = -nY\Delta x\frac{1}{(\frac{h^2}{x_1^2}+1-n^2)^{3/2}}(\frac{h^2}{x_1^3}) = \Delta x \tag{11}$$

由上式可得

$$-nY = (\frac{x_1^3}{h^2})(\frac{h^2}{x_1^2}+1-n^2)^{3/2} = h\{1+(1-n^2)\frac{x_1^2}{h^2}\}^{3/2} \tag{12}$$

若忽略高次項，則由(12)式可得如下之近似解：

$$-Y = \frac{h}{n}\{1+(1-n^2)\frac{x_1^2}{h^2}\}^{3/2} \cong \frac{h}{n} \tag{13}$$

上式顯示當 $n>1$ 時，光源與水面的垂直距離$-Y$（稱爲視深），看起來會較短，約爲其實際深度 h 的 n 分之一。將(12)式的結果代入(10)式得

$$X = x_1 + \frac{nY}{\sqrt{\frac{h^2}{x_1^2} + 1 - n^2}} \cong x_1 - x_1\{1 + (1-n^2)\frac{x_1^2}{h^2}\} = (n^2-1)\frac{x_1^3}{h^2} \tag{14}$$

(14)式顯示，由空氣中所看到的水中光源，當 $x_1 \neq 0$ 時，其座標 $X \neq 0$，即不在 y 軸上。只有當入射線非常靠近法線，當人眼近乎垂直於水面正對著光源注視時（亦即當 $x_1 \cong 0$ 時）才會有 $X \cong 0$ 的結果，即此情況下看到的光源，才會與實際光源一樣，都在 y 軸上。

水面上觀察者由不同觀察角度所看到的像，其實會分別落在不同的位置，形成一條曲線，而非一點，此曲線之函數表示式可用下法求得。由於圖 1 中之 x 座標，其實是一點到 y 軸的垂直距離，其值恆不得爲負值，故以下之討論，只考慮 x 座標不爲負值之情形。

(一)視深與觀察角的函數關係

折射角 θ' 可視爲水面上觀察者的觀察角。由(1)、(4)與(12)式可得

$$(-\frac{nY}{h})^{2/3} = 1 + (1-n^2)\frac{x_1^2}{h^2} = 1 + \frac{(1-n^2)\sin^2\theta'}{n^2 - \sin^2\theta'} = \frac{\cos^2\theta'}{\cos^2\theta} \tag{15}$$

上式可改寫爲

$$\frac{1}{n^2}(-\frac{nY}{h})^{2/3} = \frac{1-\sin^2\theta'}{n^2-\sin^2\theta'} = 1 - \frac{1}{1 + \frac{\cos^2\theta'}{n^2-1}} \tag{16}$$

設以 θ_C 表光源所在之介質對空氣之臨界角，即 $n\sin\theta_C = 1$，則(16)式可表示爲對任何介質都適用之形式：

$$(\sin^2\theta_C)(-\frac{Y}{h\sin\theta_C})^{2/3} + \frac{1}{1+(\tan^2\theta_C)\cos^2\theta'} = 1 \tag{17}$$

以水爲例，其折射率 n=1.5，此時(17)式之函數關係可用圖 2 之曲線表示。注意在圖 2 中，縱軸所代表之視深-Y，係以最大視深(h/n)爲單位，而橫軸所代表之觀察角即折射角 θ'。

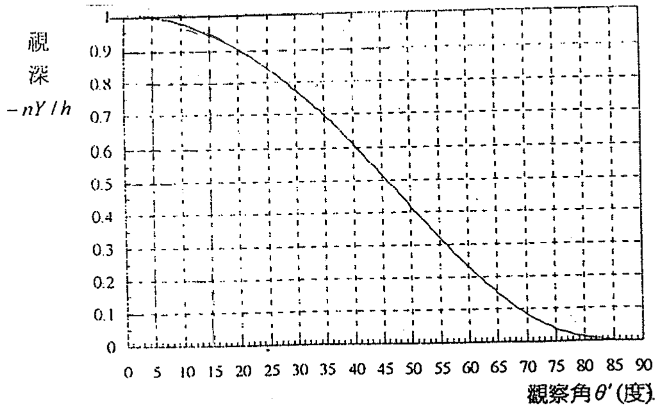


圖 2　視深 Y 隨觀察角 θ' 之變化(n=1.5)

(二)包含所有像點之曲線

由(12)式可得

$$\{(-\frac{nY}{h})^{2/3}-1\}=(1-n^2)\frac{x_1^2}{h^2} \tag{18}$$

$$\sqrt{1-(-\frac{nY}{h})^{2/3}}=\frac{x_1}{h}\sqrt{n^2-1} \tag{19}$$

如利用(10)與(19)兩式，消去 x_I，則所得之關係式，即爲由不同角度觀察時，所見之像的位置座標(X,Y)所須滿足的方程式。由(10)式得

$$-\frac{nY}{h}=\frac{\sqrt{n^2-1}}{h}(x_1-X)\sqrt{\frac{h^2}{(n^2-1)x_1^2}-1} \tag{20}$$

將(19)式之結果代入(20)式，可得

$$-\frac{nY}{h}=(\sqrt{1-(-\frac{nY}{h})^{2/3}}-\frac{\sqrt{n^2-1}}{h}X)\sqrt{\frac{1}{1-(-\frac{nY}{h})^{2/3}}-1} \tag{21}$$

上式可改寫爲

$$-\frac{nY}{h}=(1-\frac{X}{h}\frac{\sqrt{n^2-1}}{\sqrt{1-(-\frac{nY}{h})^{2/3}}})\sqrt{(-\frac{nY}{h})^{2/3}} \tag{22}$$

或可更簡潔地表示成下式：

$$1=(\frac{X}{h}\sqrt{n^2-1})^{2/3}+(-\frac{nY}{h})^{2/3} \tag{23}$$

設以 x_C 表示水中光線能折射進入空氣中之最大 x_1，則由(4)式可知此時折射角 $\theta'=90°$（即發生全反射），故得

$$1=\frac{n}{\sqrt{1+\frac{h^2}{x_C^2}}} \quad , \quad x_C=\frac{h}{\sqrt{n^2-1}} \tag{24}$$

若以 y_I 表示對應於 $x_I=0$ 之像的 y 座標，亦即 y_I 之絕對值爲最大視深，則由(12)式可知

$$y_I=-\frac{h}{n} \tag{25}$$

綜合(23)、(24)及(25)三式，即得成像位置之座標須滿足下式：

$$1=(\frac{X}{x_C})^{2/3}+(\frac{Y}{y_I})^{2/3} \tag{26}$$

(26)式之函數關係可用圖 3 之曲線表示。

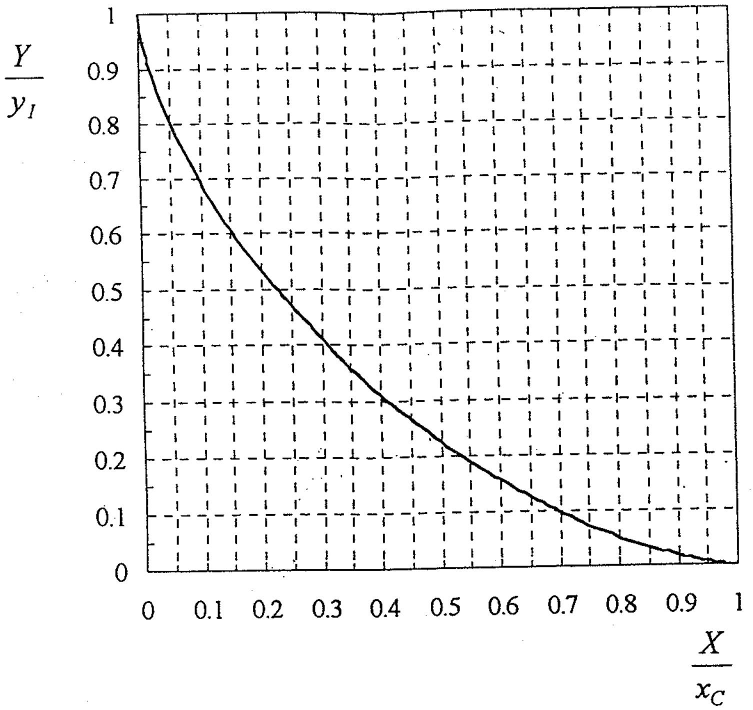


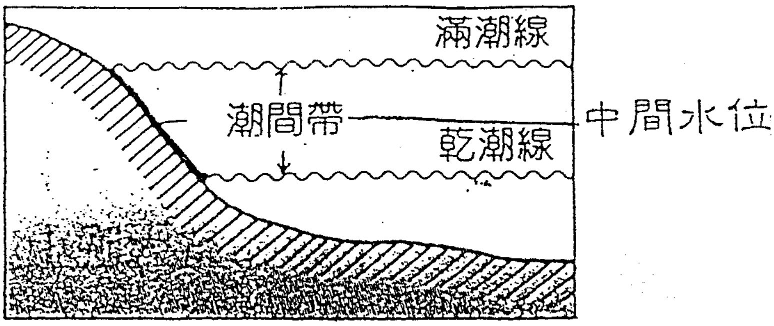
圖 3　像點之位置

（上接第 22 頁）

張潮時，魚群會湧進河口覓食，若想在下午三時到海邊的河口釣魚，應到那一個海邊？

表一

地點	第一次滿潮時間	乾潮時刻	中間水位	第二次滿潮時間
淡水	05:58	12:07	15:12	18:16
梧棲	06:10	12:17	15:21	18:24
東石	06:04	11:53	14:48	17:42
高雄	04:07	09:47	12:37	15:27
花蓮	01:45	07:27	10:18	13:08



圖一