中學生通訊解題第三期參考解答與評析

臺北市立建國高級中學　數學科

問題編號
88301

坐標平面上有相異的 10 個點，其中沒有三點在同一條直線上，每一點均爲格子點，試證明這 10 個點兩兩之間的連接線段中，必有一個異於這 10 個點的格子點。(點 A 爲格子點的意思，就是點 A 坐標(m, n)中，m, n 均爲整數)

參考解答：因爲 10 個點坐標均爲格子點，根據整數的奇偶性來分類，可分爲(奇,偶)、(偶,奇)、(奇,奇)、(偶,偶)四個情形，故必有二個頂點的坐標其奇偶性一樣，設這兩個點爲 A,B，則線段 AB 的中點 M 必爲格子點，因爲 10 點中任 3 點不共線，所以 M 必異於這 10 點。

解題重點：1.本題主要是利用鴿籠原理、整數奇偶性這兩個概念解決問題。

評析：1.本次徵答的同學中，大部分同學均能掌握住利用鴿籠原理、奇偶性解決這個問題。解題的形式大致上有兩個方向：直接將點坐標(m, n)分成(奇,偶)、(偶,奇)、(奇,奇)、(偶,偶)四個情形或是討論兩點的 x 座標差、y 座標差的奇偶性，再利用鴿籠原理去證明所求的格子點是存在的。不過有些同學對於找出來的格子點是否異於這 10 個點，並沒有加以注意，這是解題上的一個小瑕疵。

2.優良的徵答中，採用直接討論點座標奇偶性的有北市民生國中陳官暉、古君揚、江家瑋、林沛妤、洪偉傑，北市敦化國中劉峻豪，北市仁愛國中翁書鈞；討論兩點的 x 座標差、y 座標差奇偶性的有北市永吉國中黃紹倫，北市螢橋國中吳奕緯。

3.本題參答人數共有 27 人，得分率爲 63%。

問題編號
88302

九位好人好事代表，他們的年齡分別是 10,21,22,23,24,31,40,86,87 歲，已知其中有 5 位代表年齡總和是另外 3 位代表年齡總和的 4 倍，試問剩下 1 位代表的年齡是多少歲？

參考解答 1：設 5 位代表年齡總和爲 m，另 3 位代表年齡總和爲 n。

由題意知 $m=4n$

$\therefore m+n=4n+n=5n$

即 8 位代表的年齡總和必爲 5 之倍數

$10=5\times2+0$　　$31=5\times6+1$

$21=5\times4+1$　　$40=5\times8+0$

$22=5\times4+2$　　$86=5\times17+1$

$23=5\times4+3$　　$87=5\times17+2$

$24=5\times4+4$

檢驗 24 被 5 除之餘數為 4，其餘 8 個數之餘數和恰可被 5 整除。故剩下數字必為 24，即另一位代表的年齡為 24 歲。

參考解答 2： 設 5 位代表年齡總和為 m，另 3 位代表年齡總和為 n。

而剩下一位代表為 x 歲。

由題意知　$m=4n$

九位代表年齡總和為　$m+n+x=344$

$\Rightarrow 4n+n+x=344$

$\Rightarrow 5n+x=344$

即 $344-x=5n$ 為 5 之倍數。

故 x 之個位數必為 4 或 9　　$\therefore x=24$

即另一位代表年齡為 24 歲。

解題重點： 1.依題意正確假設。

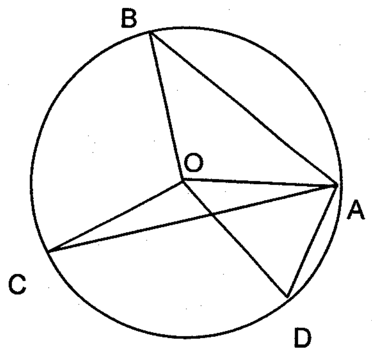
2.利用倍數相關性質求解。

評析： 1.本題參答題人數共有 184 位，得分率為 84%。

2.答題品質較佳者有：北縣永和國中曾鈺翔、宋岳穎，桃園縣東興國中吳添如，北縣明志國中鄭宇珊，北市民生國中余佳叡，北縣新泰國中李佩珊，北市南門國中秦子承，高市五福國中林佳瀅，北市仁愛國中張耀仁，基市銘傳國中白哲鳴，北縣明志國中楊雅婷，彰化縣員林國中羅元隆等。

問題編號
88303

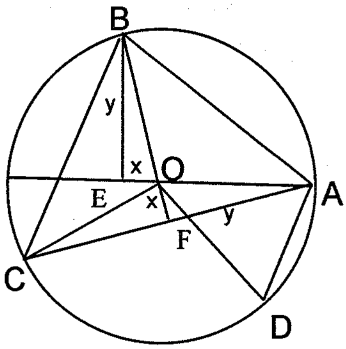
如圖，在半徑為 5，圓心為 O 的圓上，依逆時針方向排列有 A,B,C,D 四點，且滿足 $\angle AOB=\angle BOC=\angle COD$, $\overline{AB}=8$，試求 $\overline{AC}$ 與 $\overline{AD}$ 的長度。



參考解答：

(1)右圖中，過 B 點作線段 BE，使 $\overline{BE}$ 垂直直線 OA，垂足爲 E

設 $\overline{OE}=x,\overline{BE}=y$



由 ΔOBE 知　$x^2+y^2=25$　①

由 ΔABE 知　$(x+5)^2+y^2=64$　②

解①、②得 $x=\dfrac{7}{5},y=\dfrac{24}{5}$

延長線段 OB 交線段 AC 於 F 點，作線段 BC

因爲 $\overline{OA}=\overline{OB}=\overline{OC}=5,\angle AOB=\angle BOC$

所以 $\Delta BOA\cong\Delta BOC$，所以 $\overline{AB}=\overline{BC},\angle ABO=\angle CBO$

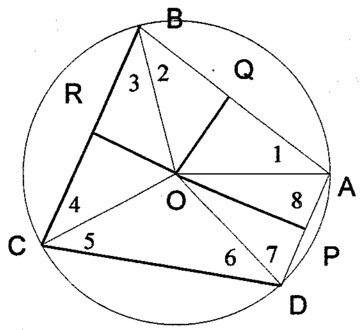
故 $\overline{BF}\perp\overline{AC}$ 且 $\overline{AF}=\overline{CF}$。

因爲 $\angle BOE=\angle AOF,\angle BEO=\angle AFO=90°,\overline{OB}=\overline{OA}$

所以 $\Delta BOE\cong\Delta AOF$,故 $\overline{AF}=\overline{BE}=y$，$\overline{AC}=2\overline{AF}=2y=\dfrac{48}{5}$

(2)右圖中，作 $\overline{OP}\perp\overline{AD},\overline{OQ}\perp\overline{AB},\overline{OR}\perp\overline{BC}$ 垂足分別爲 P,Q,R 三點

因爲 $\overline{OA}=\overline{OB}=\overline{OC}=5,\overline{AB}=\overline{BC}=8$



所以 $\overline{BR}=\overline{BQ}=\overline{QA}=4,\overline{OR}=\overline{OQ}=3$

因爲 $\angle1=\angle2=\angle3=\angle4=\angle5=\angle6,\angle7=\angle8$

所以 $\angle ABC=\angle DCB,\angle BAD=\angle CDA$

$\angle ABC+\angle BAD=180°,\overline{BR}$ 平行 $\overline{AP}$

所以四邊形 $ABRP$ 爲梯形，$\overline{PR}$ 爲高，設 $\overline{OP}=x,\overline{AP}=y$

梯形 $ABRP$ 面積 $=\dfrac{(y+4)(x+3)}{2}=\dfrac{1}{2}(xy+4x+3y+12)$

梯形 $ABRP$ 面積 $=\Delta BRO+\Delta BQO+\Delta AQO+\Delta APO$ 面積

$$=\frac{3\times4}{2}+\frac{4\times3}{2}+\frac{4\times3}{2}+\frac{xy}{2}$$

$$=\frac{xy}{2}+18$$

所以 $\dfrac{1}{2}[xy+4x+3y+12]=\dfrac{xy}{2}+18$　③

由 ΔAPO 知 $x^2+y^2=25$　④

解③④得 $x=\dfrac{117}{25},y=\dfrac{44}{25}$

$\overline{AD}=2y=\dfrac{88}{25}$。

評析：1.本題共有 83 位優秀同學參與徵答，得分率爲 72%

2.同學解答內容概分成三類：

(1)利用三角形全等、相似等性質及三角形、梯形之面積關係之答題者有彰化文興中學馬銘徽、竹市新竹女中陳哲萱等 49 位。

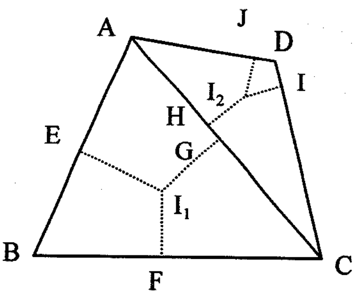
(2)利用圓內接四邊形的托勒密性質答題者有北縣永和國中周朠，北市敦化國中劉峻豪、北市民生國中何芝穎，竹市光華國中賴俊儒，...等 17 位。

(3)利用三角學中的正、餘弦定理，和角及二、三倍角定理答題者有北縣義學國中蔡玉甫，竹林國中李孟峰等 6 位。

3.本題若拓展為 $\angle AOB=\angle BOC=\angle COD=\angle DOE=\angle EOF=......=2\theta$ 時，必須引用餘弦定理、n 倍角公式加以說明！若同學能提前學習，將可增加解題的方向和視野。

問題編號
88304

有一個四邊形紙板 ABCD，一面塗成白色，一面塗成黑色，現在將白面朝上，再將紙板分割成 6 小塊，然後把每一小塊翻過面來(黑面朝上)，但不改變每一小塊的相對位置，請問此紙板要如何分割，才會使得翻過面後，仍然可以拼成原來的四邊形 ABCD。



參考解答：連接 $\overline{AC}$，利用幾何作圖找出ΔABC 與ΔADC 的內心 I_1、I_2，由內心對三角形三邊分別作垂線，垂足為 E、F、G、H、I、J（如圖），如此可構成六個四邊形 AEI_1G、$EBFI_1$、$FCGI_1$、AHI_2J、DJI_2I、$HCII_2$，每個四邊形都是軸對稱圖形，對稱軸分別為 AI_1、BI_1、CI_1、AI_2、DI_2、CI_2，以這些軸為準，將六個四邊形翻面，所得圖形仍然為原來的四邊形。

解題重點：1.依題意知分割成 6 小塊的每一塊均為軸對稱圖形。

2.連接任一對角線可將圖形分割成 2 個三角形，由三角形之相關性質著手。可有兩種情形：

①若要使分割成的六小塊，每一塊均為四邊形，則此時可作 2 個三角形之內心，再過內心對三邊作垂線，可得六個鳶形。

②若要使分割成的六小塊，每一塊均為三角形，則此時可作 2 個三角形之外心，再過外心作三頂點連線，可得六個等腰三角形。

評析：1.本題意在評量同學對三角形性質的理解及應用能力。

2.本題答對者有 27 人，其中有 7 人敘述非常完整，此 7 人爲北市民生國中張聿珩、吳佳靖，洪偉傑，林垣立，陳官暉、江家瑋，另 1 人爲鳳山高中李育誠。

3.得分率爲 89%。

問題編號
88305

某班學生共計 24 人，男女生各占一半。他們數學老師爲加強「有號數乘法」單元的教學效果，請學生到操場面向圓心圍成兩個圓圈，男生在外圈，女生在內圈，且每一男生都要恰好站在一名女生的後方。然後發給每人一張寫有一個整數的牌子，要學生在哨音響起時，女生依逆時針，男生依順時針的方向，以原來排列的順序繞圈子移動，在哨音停止時，每一男生都要站在一名女生的身後。這時所有女生轉過身來，與身後的男生共同計算他們兩人手上牌子的整數乘積，並將結果報告給老師。老師發下數字牌時，已事先安排，使得所有男生手中數字牌上的數字和爲負數，所有女生數字牌上的數字和也是負數。這時老師向同學們說：「不管你們怎樣轉圈圈，你們所得到的 12 個整數乘積之和永遠是個負數。」請你判斷老師這句話是對的或是錯的，並說明你的理由。

參考解答：

設男、女生依順時針方向的排列順序分別是 a_1、a_2、a_3、…、a_{12}與 b_1、b_2、b_3、…、b_{12}，由題意知：$a_1+a_2+a_3+\cdots+a_{12}<0$，且 $b_1+b_2+b_3+\cdots+b_{12}<0$。故

$$(a_1+a_2+a_3+\cdots+a_{12})(b_1+b_2+b_3+\cdots+b_{12})>0。$$

哨聲停止時，男女生一一對應的相對位置共有 12 種不同的可能情況，設每一情形下 12 對男女生手中的牌數字乘積之總和分別是 k_1、k_2、k_3、…、k_{12}，且

$$k_1=a_1b_1+a_2b_2+a_3b_3+\cdots+a_{12}b_{12},$$

$$k_2=a_1b_2+a_2b_3+a_3b_4+\cdots+a_{12}b_1,$$

$$k_3=a_1b_3+a_2b_4+a_3b_5+\cdots+a_{12}b_2,$$

……………………………………

$$k_{12}=a_1b_{12}+a_2b_1+a_3b_2+\cdots+a_{12}b_{11}。$$

(3)但 $k_1+k_2+k_3+\cdots+k_{12}$ 共 144 項，重新排列後恰好可以因式分解成 $k_1+k_2+k_3+\cdots+k_{12}=(a_1+a_2+a_3+\cdots+a_{12})(b_1+b_2+b_3+\cdots+b_{12})>0$，如果 k_1、k_2、k_3、…k_{12} 都小於 0，則 $k_1+k_2+k_3+\cdots+k_{12}<0$，此與 $k_1+k_2+k_3+\cdots+k_{12}>0$ 之事實不符。所以 k_1、k_2、k_3、…、k_{12} 中必至少有一爲正數，因此老師的話不真。 （下轉第 42 頁）