2000 年亞太數學奧林匹亞研習營

模擬競試試題及參考解答

中華民國數學奧林匹亞委員會試題組提供

編號：＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿（學生自填）

注意事項：

(1)本試卷共五題，每題滿分七分。

(2)考試時間：4 小時(09:30-13:30)。

(3)計算紙必須連同試卷繳回。

(4)不可使用計算器。

時間：2000 年 2 月 14 日

地點：國立臺灣師範大學　理學院

問題一：試求所有的正整數 a, b, c 使得 $2^a + 3^b = c^2$。

問題二：在ΔABC中，已知$\overline{CA} < \overline{CB}$且$\angle C$的平分線與$\overline{AB}$的中垂線交於 G，過 G 作直線 BC 的垂線，垂足為 F。 試證：$\overline{CF} = \frac{1}{2}(\overline{CA} + \overline{CB})$。

問題三：設實函數 $f(x)$ 滿足：

(1) $f(1) = 0$

(2)對所有的實數 x 與 y 恆有

$$f(x+y) = f(x) + f(y) - 2xy$$

試求 $f(50) = ?$　$f(\frac{1}{50}) = ?$

問題四：設 n 為正整數。在3×3方格子的九個小格中，分別填入非負的整數，使得每一行、每一列的和都是 n。 試求滿足上述條件的填法共有幾種。

問題五：給定一正實數 p 及一正整數 $r \geq 2$， 令 $S = \{pr^m \mid m 為非負整數\}$。 若數列 $a_1, a_2, \cdots, a_n$ 滿足：$a_i \in S$，$i = 1, 2, \cdots, n$ 且 $a_1 \leq a_2 \leq \cdots \leq a_n$，則稱數列 $a_1, a_2, \cdots, a_n$ 為一 (p, r) 數列。

試求最小的正整數 k，使得有兩個(p,r)數列 $a_1, a_2, \cdots, a_k$ 及 $b_1, b_2, \cdots, b_k$ 滿足下列兩個條件：

(1) $a_i \neq b_i$，$i = 1, 2, \cdots, k$；

(2) $a_1 + a_2 + \cdots + a_k = b_1 + b_2 + \cdots + b_k$。

2000 年亞太數學奧林匹亞研習營模擬競試參考解答

問題一：試求所有的正整數 a, b, c 使得 $2^a+3^b=c^2$。

【參考解答】：$2^a-c^2=-3^b\equiv 0 \pmod 3$，所以 a 為偶數，c 為奇數。

令 $a=2x,\ c=2y+1$，則 $4^x+3^b=4y^2+4y+1$；因而 $3^b\equiv 1 \pmod 4$。

可令 $b=2z,\ z\in N$，由此可得 $4^x+9^z=(2y+1)^2$，因而

$$4^x=(2y+1-3^z)(2y+1+3^z)。$$

因為 4 不整除 $(2y+1-3^z)+(2y+1+3^z)$，而 $(2y+1-3^z)$ 及 $(2y+1+3^z)$ 均為偶數，所以上式中至多只有一個為 4 的倍數。因此，$2y+1-3^z=2$ 且 $2y+1+3^z=2^{2x-1}$。

由此可知 $2\cdot 3^z=2^{2x-1}-2$，因而可得 $3^z=4^{x-1}-1$。

所以，$x>1$ 且

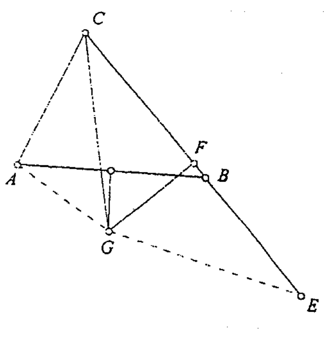
$$\begin{cases} z=4d+1 \\ x-1=2e+1 \end{cases} \quad d,e\in N\cup\{0\}。$$

由此可得 $3^{4d+1}=4^{2e+1}-1$。若 $d\geq 1$，則 $e\geq 1$(矛盾)；故 $d=0$。因而，$e=0,\ z=1,\ b=2,\ x=2$ 且 $a=4,\ c=5$。

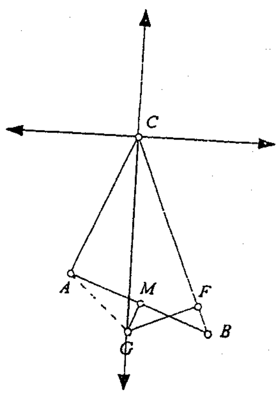
問題二：在ΔABC 中，已知 $\overline{CA}<\overline{CB}$ 且 $\angle$C 的平分線與 $\overline{AB}$ 的中垂線交於 G，過 G 作直線 BC 的垂線，垂足為 F。 試證：$\overline{CF}=\frac{1}{2}(\overline{CA}+\overline{CB})$。

【參考解答】：(A)（綜合幾何法）：

延長 $\overline{CB}$ 並在此直線上取 E 使 $\overline{BE}=\overline{AC}$ (如圖一所示)。本題相當於證明 F 為 $\overline{CE}$ 的中點，因此僅需證明 $\overline{CG}=\overline{GE}$。但已知 $\overline{GA}=\overline{GB}$，所以僅需證明 $\angle CAG=\angle GBE$ 即可；即證 A、C、B、G 四點共圓。可用同一證法證明 $\angle$C 的平分線與 $\overline{AB}$ 的中垂線交於 ΔABC 外接圓的 AB 弧上。



（圖一）



（圖二）

(B)（解析幾何法）：

取 C 點爲原點，CG 直線爲 y 軸建立直角坐標系(如圖二)。因此可設 A，B 兩點的坐標分別爲 $A:\left(x_a,-kx_a\right)$, $B:\left(x_b,kx_b\right)$，因而 $\overline{AB}$ 的中點 M 的坐標爲 $M:\left(\frac{x_a+x_b}{2},\frac{k(x_b-x_a)}{2}\right)$, 直線 BC 與直線 AC 的方程式分別爲 $BC:y=kx$, $AC:y=-kx$ $(k<0)$,直線 AB 的斜率爲 $-\frac{k(x_a+x_b)}{x_a-x_b}(\neq 0)$。所以直線 MG 的方程式爲 $MG:y-\frac{k(x_b-x_a)}{2}=\frac{x_a-a_b}{k(x_a+x_b)}(x-\frac{x_a+x_b}{2})$；令 $x=0$ 得 $G:\left(0,\frac{x_b-x_a}{2k}(k^2+1)\right)$。因此，$\overline{GF}^2=\frac{1}{1+k^2}\left(\frac{x_b-x_a}{2k}(1+k^2)\right)^2=\left(\frac{x_b-x_a}{2k}\right)^2(1+k^2)$，因而 $\overline{CF}^2=\overline{CG}^2-\overline{GF}^2=(x_a-x_b)^2\left((\frac{k^2+1}{2k})^2-\frac{1+k^2}{(2k)^2}\right)=(x_a-x_b)^2\frac{k^2+1}{4}$。由此可知 $2\overline{CF}=\sqrt{1+k^2}\left|x_a-x_b\right|$, 但 $\overline{AC}=\sqrt{1+k^2}\left|x_a\right|$, $\overline{BC}=\sqrt{1+k^2}\left|x_b\right|$, 其中 $x_a<0$, $x_b>0$；故 $2\overline{CF}=\sqrt{1+k^2}\left|x_b\right|+\sqrt{1+k^2}\left|x_a\right|=\overline{AC}+\overline{BC}$，亦即 $\overline{CF}=\frac{1}{2}(\overline{CA}+\overline{CB})$。

問題三：設實函數 $f(x)$ 滿足：

(1) $f(1)=0$

(2)對所有的實數 x 與 y 恆有

$$f(x+y)=f(x)+f(y)-2xy$$

試求 $f(50)=?$ $f(\frac{1}{50})=?$

【參考解答】：

（解法一）：由(1)及(2)可知，對所有的實數 x

$$f(x+1)=f(x)+f(1)-2x$$

$$f(x+2)=f(x+1)+f(1)-2(x+1)$$

$$\vdots$$

$$f(x+k)=f(x+k-1)+f(1)-2(x+k-1)$$

將其相加可得

$$f(x+k)=f(x)-k(2x+k-1),\ \forall\, k\geq 1,\ x\in R。\tag{3}$$

此外，

$$0=f(1)=f(1+0)=f(1)+f(0)，$$

所以，由(1)及(2)又可知

$$f(0)=0。$$

取 $x=0$，代入(3)我們可得

$$f(k)=-k(k-1),\ \forall\, k\geq 1,\ k\in N。\tag{4}$$

所以猜測 $f(x)=x(1-x)=x-x^2$, $\forall\, x\in Q$。

令 $h(x)=f(x)-x+x^2$, $\forall x\in Q$，則由(2)可知 $h(x+y)=h(x)+h(y)$, 因而 $h(0)=0$。由(1)可得 $h(1)=f(1)=0$；再由(1), (2) 及 $h(x+y)=h(x)+h(y)$，利用數學歸納法可證

$$h(\tfrac{q}{p})=0,\ \forall \tfrac{q}{p}\in Q。$$

所以 $h(x)=0$, $\forall x\in Q$，即 $f(x)=x-x^2$, $\forall x\in Q$。

因此，$f(50)=-2450$, $f(\frac{1}{50})=\frac{49}{2500}$。

（解法二）：由(2)可知

$$f(2x)=f(x)+f(x)-2x^2$$
$$f(3x)=f(x)+f(2x)-2(2x^2)$$
$$\vdots$$
$$f(kx)=f(x)+f((k-1)x)-2(k-1)x^2$$

將其相加可得

$$f(kx)=kf(x)-k(k-1)x^2,\ \forall k\geq 2,\ k\in N,\ x\in R， \tag{5}$$

取 $k=50$, $x=\frac{1}{50}$ 代入上式可得

$$0=f(50\cdot\tfrac{1}{50})=50f(\tfrac{1}{50})-(\tfrac{1}{50})^2\cdot 50\cdot 49$$

所以 $f(\frac{1}{50})=\frac{49}{2500}$。取 $k=2$, $x=25$ 代入(5)我們可得 $f(50)=2f(25)-2(25)^2$。此外，對任意的實數 x，由(2)亦可得

$$f(5x)=f(3x)+f(2x)-12x^2$$

然而，

$$f(2x)=2f(x)-2x^2,$$

$$f(3x)=f(2x)+f(x)-4x^2=3f(x)-6x^2。$$

所以，對任意的實數 x

$$f(5x)=5f(x)-20x^2$$

取 $x=1$, 再由(1)我們可得

$$f(5)=5f(1)-20=-20。$$

因此，$f(25)=5f(5)-20(5^2)=-600$；因而，$f(50)=2(-600)-2(25)^2=-2450$。

（解法三）：

利用（解法一）之(4)式，求得 $f(50)=-2450$。

利用（解法二）之(5)式，求得 $f(\frac{1}{50})=\frac{49}{2500}$。

問題四：設 n 爲正整數。在 3×3 方格子的九個小格中，分別填入非負的整數，使得每一行、

每一列的和都是 n。 試求滿足上述條件的填法共有幾種。

【參考解答】：如圖所示，

a	b	c
d	e	f
g	h	i

我們若首先在九個格子的上面兩列中填非負整數 $a,\ b,\ c,\ d,\ e,\ f$ 使得 $a+b+c=r=d+e+f$，則有

$$\binom{r+2}{2}^2$$

種填法。因爲 $g+d+a+g+h+i=b+e+h+c+f+i$，所以 $g+r=b+e+c+f$。同理可得 $h+r=a+d+c+f,\ \ i+r=a+b+d+e$，因而 $g+h+i=r$；故 g, h, i 可唯一由 a, b, c, d, e, f 所確定。

如果在上述的填法中，$g,\ h,\ i$ 任一個數是取負數（即 $a+d>r,\ \ b+e>r$ 或 $c+f>r$），則不符題意必須扣除。

如果 $g<0$，則 $r>b+e+c+f$，因而 $r>b+e$ 且 $r>c+f$；所以 $h,i>0$。同理可推得 $g,\ h,\ i$ 中至多只有一個數是負數。若 $g<0$，因爲 $g+r=b+e+c+f\geq 0$，所以 $g\geq -r$。令 $g=-i,\ \ i=1,2,\cdots,r$，則 $r-i=b+e+c+f$；由於 b, c, e, f 均爲非負，這表示對每一個 $i=1,2,\cdots,r$，b, c, e, f 有

$$\binom{r-i+3}{3}$$

種填法，因此共有

$$\sum_{i=1}^{r}\binom{r-i+3}{3}=\binom{r+3}{4}$$

種填法。同理，當 $h<0$ 或 $i<0$ 也各有 $\binom{r+3}{4}$ 種填法；所以共有 $\binom{r+2}{2}^2-3\binom{r+3}{4}$ 種填法。

問題五：給定一正實數 p 及一正整數 $r\geq 2$， 令 $S=\{pr^m \mid m爲非負整數\}$。 若數列 $a_1,a_2,\cdots,a_n$ 滿足：$a_i\in S$，$i=1,2,\cdots,n$ 且 $a_1\leq a_2\leq\cdots\leq a_n$，則稱數列 $a_1,a_2,\cdots,a_n$ 爲一 (p,r) 數列。

試求最小的正整數 k，使得有兩個 (p,r) 數列 $a_1,a_2,\cdots,a_k$ 及 $b_1,b_2,\cdots,b_k$ 滿足下列兩個條件：

(1) $a_i \neq b_i$ ， $i=1,2,\cdots,k$ ；

(2) $a_1+a_2+\cdots+a_k=b_1+b_2+\cdots+b_k$ 。

【參考解答】：設 $a_1,a_2,\cdots,a_k$ 及 $b_1,b_2,\cdots,b_k$ 是滿足條件(1), (2)的兩個 (p,r) 數列，而 $k\le r$ 。因爲 $a_1\neq b_1$，可令 $a_1<b_1$，則 $a_1=pr^m$，$b_1=pr^n$，其中 $0\le m<n$，$r\ge 2$。因爲 $b_k\ge b_{k-1}\ge \cdots\ge b_1$，故對每一個 i，$\frac{b_i}{p}$ 都是 r^n 的倍數，當然亦爲 r^{m+1} 的倍數。因此，

$$\frac{1}{p}(b_1+b_2+\cdots+b_k)\equiv 0 \pmod{r^{m+1}} 。$$

令 t 表示下標 j 滿足 $a_j=a_1$ 的個數，即

$$a_k\ge a_{k-1}\ge\cdots\ge a_{t+1}>a_t=a_{t-1}=\cdots=a_1=pr^m ；$$

則有

$$tr^m\equiv\frac{1}{p}\sum_{i=1}^{t}a_i\equiv\frac{1}{p}\sum_{i=1}^{k}a_i\equiv\frac{1}{p}\left(\sum_{i=1}^{k}a_i-\sum_{i=1}^{k}b_i\right)\equiv 0 \pmod{r^{m+1}} 。$$

由此可知 r 是 t 的因數，故 $r\le t$ 。但因 $t\le k\le r$ ，所以 $t=k=r$，而 $a_i=pr^m$，$\forall\, i=1,2,\cdots,k$ 。因此，

$$pr^{m+1}=k\cdot pr^m=\sum_{i=1}^{k}a_i=\sum_{i=1}^{k}b_i\ge\sum_{i=1}^{k}b_1=pr^{n+1} 。$$

於是 $m\ge n$，矛盾！故最小的正整數 $k\ge r+1$。以下的例子告訴我們所求的最小的正整數 $k=r+1$。

$$a_1=a_2=\cdots=a_r=p,\quad a_{r+1}=pr^2,\quad b_1=b_2=\cdots=b_{r+1}=pr 。$$

（上接第29頁）

解題重點：本題的解題關鍵是在假設老師所說的話是對的情況下，逐步推演出與老師的話互相矛盾的結果，進而否定了老師所說的『所得到的 12 整數乘積之和永遠是個負數。』

評析：1.本題參與徵答人數計有 52 位，幾乎全部學生都能判斷老師的話是錯誤的。但大部分都是直觀的判斷，或舉出特例說明其錯誤。

2.在52位徵答人數中能以反證的觀念論證者有18位，但其中能說理清晰者只有7位，這顯示學生對於反證法的認識仍然不足。

3.本題答題品質較佳的有北市敦化國中劉峻豪、郭玹銘，北市永吉國中黃國僑、黃紹倫，北市民生國中林桓立，花蓮縣花蓮國中黃鑑萱，新竹光華國中賴俊儒。