一個關於計算面積的問題

蘇國樑
國立空中大學　商學系

摘要

本文藉著觀察一個典型的求面積問題，指出不同的數學解題方式不僅代表著不同的數學符號的組合和運算，且可以代表著其背後所隱含之相同概念發展模式或是認知發展模式中的不同發展階段。也就是說，不同的解題方式可能來自不同數學思維模式(patterns)的結果，更可能是相同概念發展模式或是認知發展模式中的不同發展階段所表現出的結果。

關鍵詞：數學思維、數學對象、形象思維、可逆運思、累進性合成運思、部分全體運思。

研讀數學的最大特徵在學習過程中需要計算、證明或求解許多數學問題。因此，從小學階段的數學學習開始就做過許多數學題目，相信許多人都有這些相同的經驗。例如，求算過幾個十分典型的幾何圖形面積的問題。本文就是以其中一個典型的求面積的問題爲背景，針對教材或教學所提供的解法做一次較爲深入的觀察和探討。

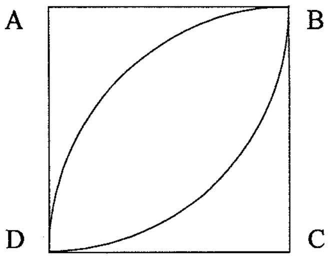
筆者在三十幾年前做過這個題目，沒想到三十幾年後它的影響並沒有消失，因爲兒子蘇達也要面對這個問題。這就形成了不同輩份、不同時代的共同經驗，這個共同經驗正是形成所謂親職數學學習的基礎。然而，如何從這些計算、證明或求解的過程中了解數學的思維模式呢？本文將此一典型的求面積問題的不同求解方式，說明其可以源於背後不同的思維模式，抑或是源於相同概念發展模式的不同階段的運思活動。

一、問題的背景

一般而言，課程設計者或教材設計者爲了達到數學教學的目標，在過渡期之“可能建構區”（註一）中，安排了一些需要利用到“部分全體運思”活動和其“逆運思”活動的問題，然後透過解題活動來達到提升或強化學習主體的思維模式或概念發展模式中的關鍵性概念。因此，在進行佈題或解題活動時，不僅要考慮到提升和強化主體之概念發展的功能，且需要考慮到概念的階段性差異和其合適性。

現在將題目略述如下：

右圖是邊長爲 10 單位的一個正方形□ABCD。現以邊長爲半徑，分別以點 A 和點 C 爲圓心，畫出兩個圓弧如右圖。求兩圓弧所包圍的區域面積。



解答此一問題的方法有好幾種，這裡筆者只列出兩個較爲典型的表述法： 1.直接數字的計算法； 2.具體化的形象操作法。事實上，兩者代表著互爲輔助、相互滲透的思維方式，缺一不可。可惜的是課本或輔助教材無法詳細說明，且一般成人或數學家亦不是非常重視。一是、因爲大多數人重視的是解題方法，甚至是解題技巧，而不是思維方法；二是、因爲對於成人或數學家而言，這是一些再簡單不過的問題；三是、因爲將問題過於簡單化，以至於無法分辨出解法多樣性所隱含的意義。所以，數學思維的問題在一般人或數學家的看法是不成問題的，因爲不容易辨識問題的關鍵所在。具體的說，就是不容易辨識出其中所隱含的思維模式的差異性，抑或是概念發展的階段性的差異。

然而，在求解本問題的背景是主體正處於數學學習過程中“準抽象思維”的關鍵期，也就是說，主體正處於皮亞杰所提出之認知發展模式中的“具體操作期”和“形式運思期”之間的年齡或階段（註二），筆者稱之爲“準形式運思期”。這是將此種類型的數學問題安排在小學五、六年級課程中的原因之一。這也說明了此一時期之主體的數學思維是，處在具體形象思維和抽象符號思維之間的重要轉捩時期。所以，釐清不同解法所隱含的意義在數學教學中是重要的。

二、直接數字的計算

關於教材或教學活動中所提供的直接數字計算，大約可以歸納爲兩種作法：一、直接計算兩圓弧所圍的區域面積。二、間接兩圓弧所圍的區域面積。作法如下。

〔解法一〕直接參照給定的圖示，兩圓弧所包圍的面積等於兩個弓形的面積和。因此，

兩圓弧所包圍的面積＝2｛弓形區域面積｝

＝2｛4 分之 1 圓面積（扇形）－直角三角形面積｝

＝2｛[10× 10× 3.14÷ 4]－[10× 10÷ 2]｝

＝2｛78.5－50｝

＝57（平方單位）#

〔解法二〕另一種作法不是直接求兩弧所圍的區域，而是間接地先求出兩個｛4 分之 1 的圓面積｝，再減去正方形面積，之後再求出兩圓弧所包圍的面積。因此，

兩圓弧所包圍的面積＝2｛4 分之 1 圓的面積（扇形）｝－正方形面積

＝2｛10× 10× 3.14÷ 4｝－[10× 10]

＝2｛78.5｝－[10× 10]

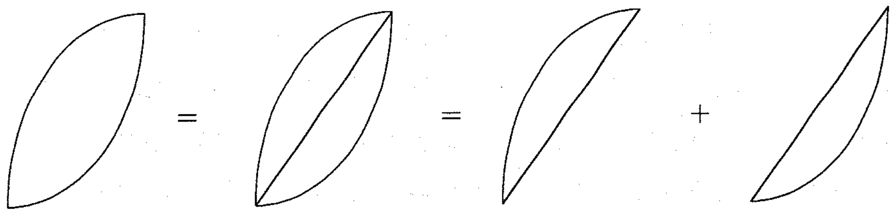
＝57（平方單位）#

如果只從數字的組合和運算過程，雖然可以看出兩種解法的數字組合和運算的敘述性差異，但是卻不容易看出有所謂的形象思維和其操作。但要獲得數字之間的組合和運算很明顯地是無法缺少形象思維和其有關之抽象思維。這就說明了數字操作思維和形象思維是互相輔助和互相滲透的。下一節是將本節的兩種計算法具體化成形象操作。

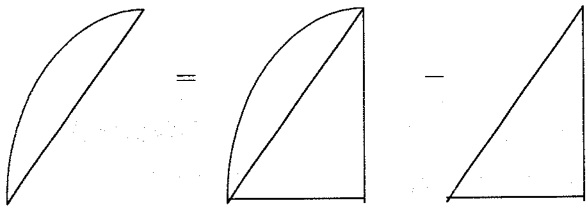
三、具體化的形象操作

本節是希望將第 1 節所提出的直接法和間接法的思維過程具體化和形象化，從而可以更清楚地看出兩種作法的差異性和其中所隱含的思維模式。

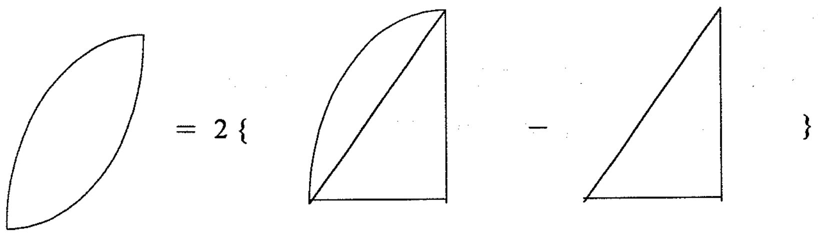
〔解法一〕問題的重點在求出兩弧所圍的區域面積，因此，直接將此一子區域突顯出來。並可沿對角線將其平分成兩個面積相等的弓形區域。即



然而，



因此，會有



#

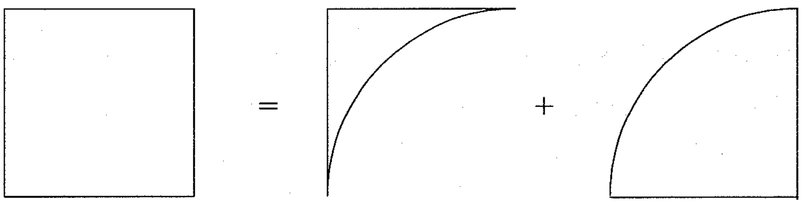
在小學的數學課本或輔助教材中，“解法一”是比較典型的和可行的作法。因爲它採取不考慮「部分和全體」之間的關係（註三），即直接突顯問題所指的「目標區域」；再

構畫出目標區域和其它部分區域的關係，即考慮「部分和部分」之間的關係。也就是說：“解法一”雖然考慮到兩弧所圍之區域是脫嵌出正方形成爲一個聚集單位，正方形即不復存在，或是沒有存在的需要因爲不起作用。從而直接考慮到兩弧所圍之區域是由兩個弓形區域的併置，或者是說兩弧區域可以分割爲兩個弓形區域。所以，只具有「部分和部分」之間的關係和其相應的可逆運思(reversible operation)。

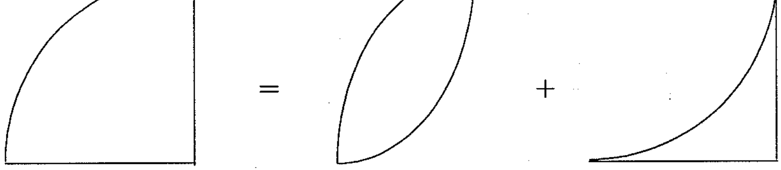
這裡就是將弓形區域看成一個聚集單位，內嵌於一個更大的聚集單位——扇形區域之中。若將扇形區域中的弓形區域分割出來，則可以得到一個新的聚集單位——三角形區域；或者是，將扇形區域的三角形區域分割出來，則可得到目標聚集單位——弓形區域。「內嵌關係是提供主體在加法和減法問題中的往上數或往下數的依據。」（註四）因此，以扇形區域爲一個聚集單位“往下數”去“三角形區域所成的聚集單位”，便可得到“弓形區域所成的聚集單位”。這裡沒有明顯的關於「部分和全體」之間的關係和其相關的可逆運思，即沒考慮到兩弧所圍區域和正方形區域的關係；因爲正方形對兩弧區域便不起作用了，即不復存在。另外，在扇形往下數去三角形而得出弓形後，扇形區域對弓形便不起作用了，即不復存在。

不過，接下來所提的“解法二”則很明顯地，是不僅需求考慮到「部分和部分」之間的關係，而且需要考慮到「部分和全體」之間的關係。

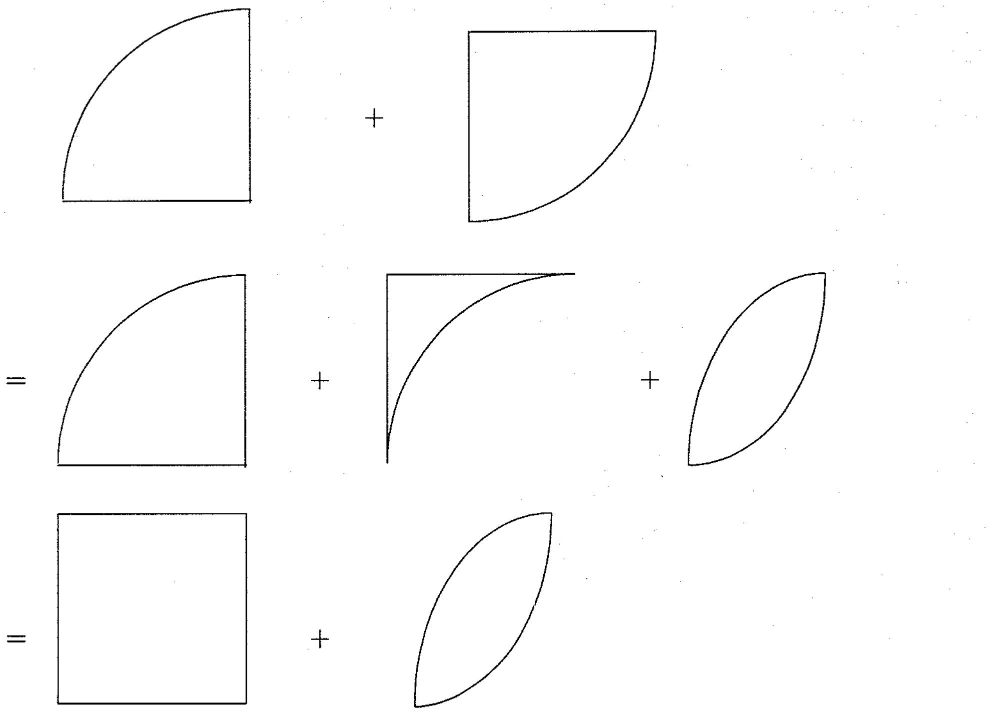
〔解法二〕因爲兩弧所圍的區域包含在正方形區域之內，因此，正方形區域可以藉由其中一弧而分割成兩個子區域。


(3.1)

又，上面圖示中的最右圖（由邊長所成的 4 分之 1 的圓形，即扇形）可以再藉用另一弧分割成兩個子區域。

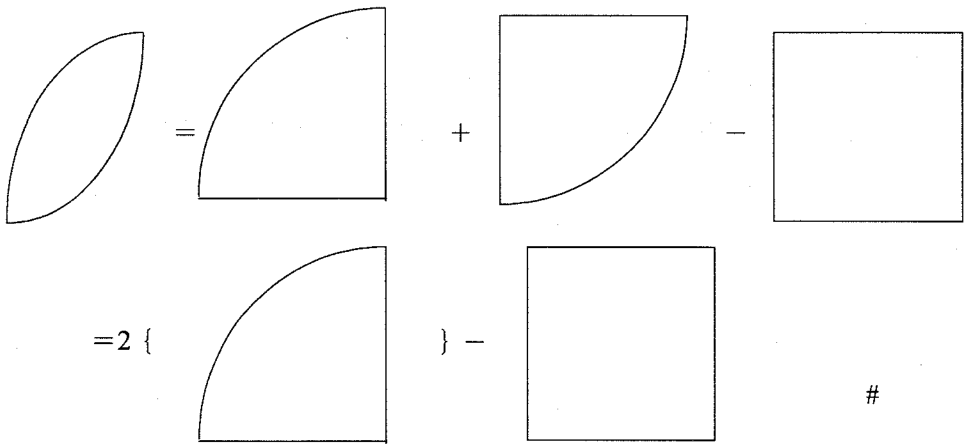

(3.2)

但是，兩個 4 分之 1 圓區域（或扇形）的面積和就不能採用直接併置的方式，因爲直接併置的結果可以是一個半圓區域。這樣就無法看出兩弧區域和正方形之間的關係，即無法獲得部分和全體的關係。這就證明正方形是需要存在的，因爲起著一定的作用；也是需要運用到“部分全體運思”的原因之一。因而利用(3.1)和(3.2)所述的分割和併置的方法，可得出兩個扇形的面積和等於一個原始正方形區域面積加上兩弧所圍區域面積。



(3.3)

因此，兩弧所圍區域面積等於兩個扇形區域的面積減去一個原始正方形區域面積。這就說明了兩弧區域既可內嵌亦可複製而脫嵌出正方形區域，而正方形仍然存在。



(3.4)

#

從“解法二”可以看出幾個對「部分和部分的關係」和其相關的運思，譬如，(3.1)、(3.2)和(3.3)三式所表示出的分割和併置的形象思維和其操作活動。除了這些分割和併置活動是以內嵌關係爲基礎，宛若加法活動中的“往下數”去和“往上累加”的活動。還需要具有對「部分和全體關係」和其相關的運思：第一、兩弧所圍之區域可以被脫嵌出正方形而成爲一個新的聚集單位，但不影響正方形的完整性，即正方形仍然存在。第二、雖然兩弧所圍區域不可能具體地同時內嵌於上下兩個扇形之內，但兩弧之區域可以分別地、抽象地複製而脫嵌出兩個扇形之外，而成爲一個新的聚集單位，且不影響到兩個扇形，即扇形仍然存在。第三、雖然兩個扇形不可能具體地同時內嵌於正方形之內，但兩個扇形可以分別地、抽象地被複製而脫嵌出正方形，而形成兩個獨立的聚集單位，且不影響到正方形區域所成的聚集單位。因此，第四、正方形也可以內嵌和脫嵌於兩個扇形區域所累加成的新聚集單位之內。最後，(3.3)也指出兩弧區域可以脫嵌於正方形成爲一個獨立的聚集單位，而不影響正方形的整體性，且兩弧區域仍是正方形的一部分。所以，“解法二”很明顯地表現出存在著「部分和部分的關係」和其可逆運思及「部分和全體關係」和其可逆運思。

四、進一步的符號化和結論

數學主要是在探討一般化的“量與形”的科學，因此，現在若將邊長改成一般的單位，譬如，邊長=a 單位。則可免於將解題方式限定在某個特殊的事實上，這也是一般化的必經手續。筆者將直接列出符號化的兩種作法。

〔解法一〕兩圓弧所包圍的面積＝2｛4 分之 1 圓面積－直角三角形面積｝

$=2\{[a\times a\times \pi\div 4]-[a\times a\div 2]\}$

$=2a^2[\pi/4-1/2]$

$=a^2[\pi/2-1]$ #

〔解法二〕兩圓弧所包圍的面積＝2｛4 分之 1 圓面積－正方形面積｝

$=2\{a\times a\times \pi\div 4\}-[a\times a]$

$=a^2\pi/2-a^2$

$=a^2[\pi/2-1]$ #

由代數符號解法可以看出，兩種抽象符號的操作是分別地建立在兩種實際數字計算和兩種具體形象操作的基礎上。從某個角度來看，兩種抽象符號的操作和前幾節所提出的作法是類似的，只是出發點和所操作的對象不一樣而已。這也是不容易辨識出差異性的地方。然而，無論是實際數字的計算、具體形象的操作或是抽象符號的操作都需要建立在，數概念發展模式中的“部分和全體運思”（註五）等或認知發展模式的“可逆運思”的基礎上。

因此，雖然數學對象（符號或方程式等）是抽象的，數學操作的過程也是抽象的。但都是可以對應到一個具體化的分析，並解釋出其間的差異性。

根據第三節所說明的形象思維和其操作活動，本文所提出的兩種作法，一方面可以說是兩種不同的思維模式，另一方面也可以說是一種概念發展模式中的兩個不同階段。如果是兩種不同的思維模式，則“解法一”是直接對象的思維方式，“解法二”是間接對象的思維方式。如果是一種概念發展模式中的兩個不同階段，則“解法一”可視同處於數概念模式中的“累進性合成運思”（註六）階段，“解法二”則可視同處於數概念模式中的“部分全體運思”階段。同時這兩個階段也是銜接認知發展模式中的“具體運思期”和“形式運思期”的“前形式運思期“或“準形式運思期”。故“解法一”可視爲處於“具體運思期”；而“解法二”可視爲處於“準形式運思期”。

如果將兩種作法歸納爲兩種思維模式，則第一種（解法一）思維模式的操作結果只能顯示出“累進性合成運思”和剛萌芽的“部分全體運思”。例如，“解法一”（直接法）中：扇形區域=弓形區域與直角三角形區域之累加和，故兩弧所圍的區域=兩弓形區域之和。然而，第二種（解法二）思維模式的操作結果能顯示出，存在著“部分全體運思”和其“逆運思”。例如，“解法二”（間接法）中(3.4)：兩弧區域=上下兩扇形區域之和再減去原正方形區域。這就是以兩扇形區域被複製而脫嵌出正方形成爲新的兩個獨立的聚集單位，求出這兩個獨立聚集單位的累加和，之後再往下數去正方形所成的聚集單位。此時的正方形和扇形都是仍然存在的。

如果將兩種作法歸納爲一種思維模式的兩個階段，則雖然前一階段（解法一）比後一階段（解法二）更有效率，因爲針對直接對象進行求解。例如，“解法一”（直接法）中：兩弧所圍的區域＝兩弓形區域之和＝兩相等弓形區域之和。但第二個階段卻是建立在“部分全體運思”和其“逆運思”的活動基礎上，因而可能進一步地提升主體的思維活動至“形式運思期”，從而達到教學的目的。這就是“可能建構區”的觀念。例如，“解法二”（間接法）中(3.4)：兩弧區域=上下兩扇形區域之和再減去原正方形區域=兩相等扇形區域之和再減去原正方形區域。這裡可以看出“兩弧區域”內嵌於 3 個區域：正方形區域和上下兩扇形區域，也可隨意脫嵌於這 3 個區域而成爲一個獨立的聚集單位，而此 3 個區域都是仍然存在的。

一般將兩種不同的解題或操作方式，歸納爲兩種不同思維模式的操作結果，也就是說，不同的解題方式源自於不同的數學思維模式。然而，根據上述的分析，將此兩種不同的解題方式歸納爲一種概念發展模式的兩個階段，似乎比較合理。

這裡要說的是，指出不同的數學解題方式不僅代表著不同的數學符號組合和運算，且可以代表著其背後所隱含之相同概念發展模式或是認知發展模式中的不同發展階段。也就是說，不同的解題方式可能來自不同數學思維模式(patterns)的結果，更可能是相同概念發展模式或是認知發展模式中的不同發展階段所表現出的結果。而且，釐清一個問題的兩種解法爲兩種模式也好或兩個階段也好，都有助於在數學教學中釐清學生的思維模式和發展程度的多樣性的和多層性。

最後，本文同時說明另一事實，即研讀數學文獻或數學家的作品是可以獲得或歸納出其中數學思維模式或概念發展模式，這對數學教學和進一步的數學發展可以起著一定的指導作用。

註釋

註一：甯自強：〈“建構式教學法”之教學觀——由根本建構主義的觀點來看〉，《國教學報》，第 5 期，1993 年，第 33-39 頁。

註二：Jean Piaget：《發生認識論原理》，王憲鈿等譯，胡世襄校，商務印書館，1989 年 5 印。

註三：蘇國樑：《國小兒童統計概念分析之研究(I)》(NSC83-011-S-180-002N)，1994 年。

註四：甯自強：〈兒童的《整數詞》意義〉，第 8 屆科學教育年會，高雄師大，1992 年。

註五：甯自強：〈兒童的《整數詞》意義〉，第 8 屆科學教育年會，高雄師大，1992 年。

註六：甯自強：〈兒童的《整數詞》意義〉，第 8 屆科學教育年會，高雄師大，1992 年。