

中學生通訊解題第二期參考解答與評析

臺北市立建國高級中學 數學科

問題編號

88201

將 1、2、3、4、...、9 共 9 個數字填入下列空格，每格數字均相異，且必須符合下列的運算式。試問該如何填上這些數字？(作答時，請說明你的思考過程)

參考解答：

$$\begin{array}{r}
 \square \\
 \times \square\square \\
 \hline
 \square\square \\
 +\square\square \\
 \hline
 \square\square
 \end{array}
 \qquad
 \begin{array}{r}
 4 \\
 \times 17 \\
 \hline
 68 \\
 +25 \\
 \hline
 93
 \end{array}$$

解答的思考過程：

依題意可設 $ax \ bc=de$ 再加 $\square\square=\square\square$

當 $a=1 \Rightarrow c=e$ 且 $b=d$ (不合)

當 $a=9$ or $8 \Rightarrow de+\square\square>100$ (不合)

當 $a=7 \Rightarrow$ 當 $b \geq 2$ (不合)

當 $b=1 \Rightarrow$ 當 $c \geq 3$ (不合)

當 $c=2 \Rightarrow 7 \times 12=84$ 再加 $\square\square=\square\square$, 填 1,5,6,9(不合)

當 $a=6 \Rightarrow$ 當 $b \geq 2$ (不合)

當 $b=1 \Rightarrow 6 \times 1c \Rightarrow$ 當 $c=2,4,5,7,8,9$ (不合)

當 $c=3 \Rightarrow 6 \times 13=78$ 再加 $\square\square=\square\square$, 填 2,4,5,9(不合)

當 $a=5 \Rightarrow e=0$ 或 5 (不合)

當 $a=4 \Rightarrow$ 當 $b \geq 3$ (不合)

當 $b=1 \Rightarrow$ 當 $c=2,5,6$ (不合)

當 $c=3 \Rightarrow 4 \times 13=52$ 再加 $\square\square=\square\square$, 填 6,7,8,9(不合)

當 $c=7 \Rightarrow 4 \times 17=68$ 再加 $25=93$ (合)

當 $c=8 \Rightarrow 4 \times 18=72$ 再加 $\square\square=\square\square$, 填 3,5,6,9(不合)

當 $c=9 \Rightarrow 4 \times 19=76$ 再加 $\square\square=\square\square$, 填 2,3,5,8(不合)

當 $b=2 \Rightarrow$ 當 $c=1$ 或 $c \geq 3$ (不合)

當 $a=3 \Rightarrow$ 當 $b \geq 4$ (不合)

當 $b=1 \Rightarrow$ 當 $c=2,4,5,7$ (不合)

當 $c=6 \Rightarrow 3 \times 16=48$ 再加 $\square\square=\square\square$, 填 2,5,7,9(不合)

當 $c=8 \Rightarrow 3 \times 18=54$ 再加 $\square\square=\square\square$, 填 2,6,7,9(不合)

當 $c=9 \Rightarrow 3 \times 19=57$ 再加 $\square\square=\square\square$, 填 2,4,6,8(不合)

當 $b=2 \Rightarrow$ 當 $c=1,4,5,8$ (不合)

當 $c=6 \Rightarrow 3 \times 26=78$ 再加 $\square\square=\square\square$, 填 1,4,5,9(不合)

當 $c=7 \Rightarrow 3 \times 27=81$ 再加 $\square\square=\square\square$, 填 4,5,6,9(不合)

當 $c=9 \Rightarrow 3 \times 29=87$ 再加 $\square\square=\square\square$, 填 1,4,5,6(不合)

當 $a=2 \Rightarrow$ 當 $b=1,5,6,7,8,9$ (不合)

當 $b=3 \Rightarrow$ 當 $c=1,5,6,7$ (不合)

當 $c=4 \Rightarrow 2 \times 34=68$ 再加 $\square\square=\square\square$, 填 1,5,7,9(不合)

當 $c=8 \Rightarrow 2 \times 38=76$ 再加 $\square\square=\square\square$, 填 1,4,5,9(不合)

當 $c=9 \Rightarrow 2 \times 39=78$ 再加 $\square\square=\square\square$, 填 1,4,5,6(不合)

當 $b=4 \Rightarrow$ 當 $c=1,5,6,7,9$ (不合)

當 $c=3 \Rightarrow 2 \times 43=86$ 再加 $\square\square=\square\square$, 填 1,5,7,9(不合)

當 $c=8 \Rightarrow 2 \times 48=96$ 再加 $\square\square=\square\square$, 填 1,3,5,7(不合)

\therefore 本題恰有一解, 即 $4 \times 17=68$ 再加 $25=93$

解題重點：

1. 用窮舉法討論 a 的情形。
2. 再依 $a=2,3,4$ 時，就 b, c 之可能值進行討論。
3. 討論完成之後得唯一解。有些同學從 b 或 c 進行討論，其過程顯得較複雜。

評析：

1. 選答本題的同學只需具備「窮舉法」的概念，再作分段討論即可。而「分段方式」的選定影響著後續的討論過程。
2. 本題參加徵答人數有 258 人，得分率為 69%，答題最好的同學有四位，都得滿分 7 分，此四位同學為台師大附中國一莫立平，北縣中山國中國二廖元銘，北市永吉國中國一黃紹倫，北縣永和國中國三黃俊斌。

問題編號

88202

任取 31 個相異的正整數，對它們作任意的排列。試證明：無論怎麼排列都能找到一種方法，照此方法刪除其中的 25 個數，剩餘的 6 個數在不變次序的條件下，所構成的數列不是依序增大，就是依序減小。

參考解答：

1. 令 x_1, x_2, \dots, x_{31} 為 1、2、3、 \dots 、31 等數字的一組任意順序的排列，稱此數列為 X 。設 $a_1 = x_1$ ，由 x_1 往後搜尋，遇到第一個比 a_1 小的數字叫做 a_2 ，再由 a_2 往後搜尋找到第一個比 a_2 小的數叫做 a_3 ， \dots ，繼續這種搜尋，直到找不到更小的數為止。設最後一個數為 a_n ，這樣由 a_1, a_2, \dots, a_n 所構成的數列命名為 A 數列。
2. 由 x_1, x_2, \dots, x_{31} 中去掉 A 數列中的數，剩下者構成另一個數列，稱為 X_1 。令 b_1 為 X_1 中的第一個數，依步驟 1 中的搜尋方式，又構成一數列 b_1, b_2, \dots, b_m ，稱為 B 數列。
3. 再依步驟 1、2 的方式，找到 C 、 D ... 等數列。
4. 如此可以產生兩種情形：
 - (1) 若這些數列中，有任一數列的數字個數達到 6 個或超過 6 個，那麼在 X 中次序不變地留下這個數列中的 6 個數即為合於題意的數。
 - (2) 若沒有一個數列的數字達到 6 個，則 X 至少可分成 6 個數列，設其中最後一個數列的第一個數為 a ，則在 a 所在數列的前一數列中一定可以找到一數 b ，使得 $a > b$ ，且 b 、 a 在 X 中的順序是 b 在 a 前。在 b 所在數列的前一數列中亦可找到一數 c ，使得 $a > b > c$ ，且在 X 中的順序為 c 、 b 、 a ， \dots ，以這樣的方式，至少可以在 X 中找到 6 個數，使得它們在次序不變的情況下，於刪去其餘的數後，形成一個依序增大的數列，而符合題意之所求。

解題重點：

1. 可由較小的數目先作作看，在逐漸放大，經由實作找出規則。

評析：

1. 如解題重點所提，找出規則之後，最好能以較大的數字驗證，最後再以形式化的證明確認結果。
2. 本題在證明的過程中，許多同學的敘述方式或許限於數學知識的有限，大多不能嚴謹，但其中以北市永吉國中的黃紹倫及北市敦化國中的劉峻豪同學的證法比較完備，且方法各異，劉同學的方法與編者所提供的方法相同，黃同學則用了反證法，也是一種非常特殊的構想，兩位都值得嘉許。此外靜心國中的趙心宇同學如果將其「想法」以更數學的方法敘

述，也是不錯的解答。

3.本題共有 10 人作答，得分率為 43%。

問題編號

88203

港警所接到一個檢舉電話，有一艘將要啓航的貨輪上承載一批貨櫃，其中有一個貨櫃，裝有違禁物品，並給了一個數" $50\frac{9}{11}$ "。根據警方人員的調查，這艘船上的所有貨物都裝在編號為 1、2、3、...之連續自然數的貨櫃中。檢警人員研判，這個數字" $50\frac{9}{11}$ "應是剔除藏有違禁物品的那一個貨櫃外，其他所有貨櫃編號的算術平均數。根據這些研判，辦案人員藉由準確的計算找到了這個藏有違禁物品貨櫃箱的編號。你知道他們是怎樣計算出來的嗎？參考解答：

設各貨箱編號依次為 1、2、3、4、...、 n 。如果去掉的貨箱是 1 號，則其餘所有貨箱編號的平均數為 $\frac{2+3+\dots+n}{n-1} = \frac{(2+n)(n-1)}{2(n-1)} = \frac{n}{2} + 1$ ，如果去掉的貨箱是 n 號，則其餘所有貨箱編號的平均數為 $\frac{1+2+\dots+(n-1)}{n-1} = \frac{(n-1)n}{2(n-1)} = \frac{n}{2}$ ，於是 $\frac{n}{2} \leq 50\frac{9}{11} \leq \frac{n}{2} + 1$ ，即 $99\frac{11}{7} \leq n \leq 101\frac{7}{11}$ ， $\therefore n=100$ 或 $n=101$ ，由於 $50\frac{9}{11}$ 是 $n-1$ 個正整數的平均數，因此 $50\frac{9}{11} \times (n-1)$ 應是正整數，所以 $n=100$ 。而 $1+2+\dots+100=5050$ ，設去掉的貨箱號數為 x ，則 $\frac{5050-x}{99} = 50\frac{9}{11} \Rightarrow x=19$ 。故，違禁物品藏在第 19 號貨箱內。

解題重點：

1.樹立應用意識，提高應用能力。

評析：

- 1.本題屬於不等式的應用題，參加答題人數共有 109 人，得分率為 69%。
- 2.這麼高的答對率，真讓人高興。大多數同學都能從特殊到一般，經由試驗、歸納、猜測得到答案，卻未述及解題的道理，如貨櫃總數 n 的範圍未具體列出，都僅止於猜測得到。
- 3.所謂解數學題，實質上，就是依據題目的條件與要求，有步驟地運用數學的原理，進行一系列推理，直到求出題目的答案為止，如果能做到正確、合理、簡潔、清楚、完滿，更是我們所最期待的。本題在答對的 103 人中，有 24 人是合於這樣的要求的，如北市中正國中謝卓叡、李中川，北市民生國中黃彥豪、江家瑋，北市敦化國中劉峻豪，北市介壽國中王貫寧，北市百齡國中蔡欣純，北縣福和國中周佩祺、陳思佑，北市蘭雅國中許皓淳，台師大附中朱勇鑫等同學。

問題編號

88204

一個凸四邊形 PQRS 內接於一個邊長為 L 的正方形 ABCD，求證：四邊形 PQRS 必有一個邊大於或等於 $\frac{\sqrt{2}}{2}L$ 。

參考解答：

證法一：如圖，作正方形 ABCD 關於 BC 的軸對稱圖形 A_1BCD_1 ；相應地得 PQRS 關於 BC 的軸對稱圖形 $P_1QR_1S_1$ 。再作 A_1BCD_1 關於 CD_1 的軸對稱圖形 $A_2B_2CD_1$ ，以及 $A_2B_2CD_1$ 關於 D_1A_2 的軸對稱圖形 $A_2B_2C_3D_1$ ；相應地得兩四邊形 $P_2Q_2R_1S_2$ ， $P_3Q_3R_3S_2$ ，連結 PP_3 、 AA_2 ，

由 $AA_2=2\sqrt{2}L$ ， $AP=A_2P_3$ ，得

$$PP_3=AA_2=2\sqrt{2}L，$$

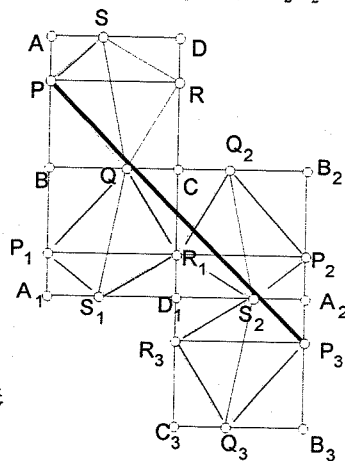
$$\therefore PQ+QR+RS+SP$$

$$=PQ+QR_1+R_1S_2+S_2P_3 \geq PP_3=AA_2=2\sqrt{2}L，$$

$\therefore PQ、QR、RS、SP$ 四邊中必有一條大於或

等於 $\frac{\sqrt{2}}{2}L$ 。

註：著眼於整體，反復運用對稱變換，考慮四邊形 PQRS 周長的最小值。



證法二：(反證法)

假設四邊形 PQRS 四邊都小於 $\frac{\sqrt{2}}{2}L$ ， \therefore 四邊形 PQRS 的內角和為 360° ， \therefore 它的四個內角中必有一個不大於 90° 。(不妨假設 $\angle SPQ \leq 90^\circ$) 於是， $SQ^2 \leq SP^2 + PQ^2 < (\frac{\sqrt{2}}{2}L)^2 + (\frac{\sqrt{2}}{2}L)^2 = L^2$ 。即， $SQ < L$ ，這與 $SQ \geq AB=L$ 的事實矛盾。

故，四邊形 PQRS 必有一邊大於或等於 $\frac{\sqrt{2}}{2}L$ 。

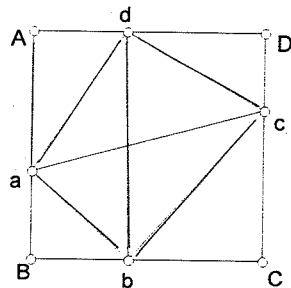
證法三：(本證法由北縣福和國中張中宜同學提供)

分別在正方形 ABCD 四個邊上任取四點 $a、b、c、d$ ，連 \overline{ab} 、 \overline{bc} 、 \overline{cd} 、 \overline{da} 、 \overline{ac} 、 \overline{bd} ，則 \overline{ac} 、 \overline{bd} 一定會大於或等於 L (等於時 \overline{ac} 、 \overline{bd} 平行於正方形的邊)

根據托勒密定理， $\overline{ab} \times \overline{cd} + \overline{bc} \times \overline{ad} \geq \overline{bd} \times \overline{ac}$ ，因為 $\overline{bd} \times \overline{ac} \geq L^2$ ，所以 $\overline{ab} \times \overline{cd} + \overline{bc} \times \overline{ad} \geq L^2$ 則 $\overline{ab} \times \overline{cd}$ 或 $\overline{bc} \times \overline{ad}$ 中必有一個大於或等於 $\frac{L^2}{2}$ 不妨設 $\overline{ab} \times \overline{cd} \geq \frac{L^2}{2}$ ，

則在 \overline{ab} 或 \overline{cd} 中，一定有 \overline{ab} 或 \overline{cd} 大於或等於

$\sqrt{\frac{L^2}{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}L$ ，故此內接四邊形一定有一邊大於或等於 $\frac{\sqrt{2}}{2}L$



解題重點：

1. 反證法。
2. 利用對稱變換方法，考慮四邊形 PQRS 周長的最小值。
3. 利用廣義托勒密定理與鴿籠原理。

評析：

1. 本題參與徵答人數，共計 62 人，得分率為 59%。
2. 採用反證法作答且答題品質較佳者共計有北市南門國中呂明道，北市介壽國中簡民惠等共 15 人。
3. 採用對稱變換法作答者較少，只有北市永吉國中黃紹倫，北市中正國中謝卓叡 2 人，特別是黃紹倫同學才國中一年級，實在難得。
4. 採用廣義托勒密定理作答者計有北縣福和國中張中宜等 3 人。
5. 部分作答者思考解題方式有創意，答題品質頗佳者計有北市介壽國中王貴寧，中市衛道中學廖祿堃，北市敦化國中劉峻豪，北市民生國中古君陽，北市南門國中黃彥翔等 5 人。

問題編號
88205

n 個客人圍坐一圓桌，按逆時針方向依次編號 1, 2, 3, ..., n 。服務員先給 1 號座位的客人斟酒，然後再按照逆時針的方向斟酒，但每次都要跳過兩個未被斟酒的客人(已斟過酒的客人自然也要跳過)，才給下一位客人斟酒，但最後一位客人不受此限制。試問：最後一位斟到酒的客人座位編號是多少？

參考解答：本解答由建國中學 109 班 42 號蕭俊宏同學提供

先將 n 以 1, 2, 3, ... 代入，動手操作，得表一：

表一 n 與最後一位斟到酒的客人的座位編號 a_n 關係表

n	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	...
a_n	1	2	3	3	2	5	2	5	8	2	5	8	11	14	3	6	9	12	15	18	21	3	...

(註： a_n 表 n 個客人時最後一位斟到酒的客人的座位編號)

觀察 a_n 的規則，發現 a_n 序列中，斷斷續續出現一些公差為 3 的等差數列，例如 $a_{10}, a_{11}, a_{12}, a_{13}, a_{14}$ 即為一組。但若按此規則， $n=15$ 時 a_n 應該是 $a_{14}+3=17$ ，但 $17>15$ 顯然是錯誤的。

如果我們將按照等差數列規則猜測的 $a_n = a_{14}+3=17$ 減去正確的 $a_{15}=3$ ，得差 14，似乎正

是 $n-1$ 。而 a_{15} 又是另一等差數列的首項，因此這個規則可能存在於兩相鄰等差數列之間。按此規則觀察其他相鄰等差數列，發現也符合此規則（例如 a_9 和 a_{10} 、 a_{21} 和 a_{22} 等等），把這個規則敘述的具體一點，即為：

若 $a_m, \dots, a_{n-2}, a_{n-1}$ 為一公差 3 的等差數列，且 a_m, a_{n+1}, \dots, a_r 為另一公差 3 的等差數列，且 a_{n-1} 和 a_n 的差不等於 3，則：

$$\text{後一數列的首項 } a_n = \text{前一數列的末項 } a_{n-1} + 3 - (n-1)$$

歸納上述結果，猜測：

當 $n \geq 3$ 時，

$$a_n = a_{n-1} + 3 \quad (\text{當 } a_{n-1} + 3 \leq n),$$

$$a_n = a_{n-1} + 3 - (n-1) \quad (\text{當 } a_{n-1} + 3 > n).$$

【猜測的證明】 1° $n=3$ 時， $a_3=3=a_2+3-2$ ， \therefore 猜測是正確的。

2° 假設 $n \leq k$ ($k \geq 3$) 時，猜測是正確的。

$\therefore a_k$ 可經由 a_2 推出。

當 $n=k+1$ 時，

1 號斟過酒後，剩下 k 個人尚未被斟酒，將剩餘的 k 人重新加以編號，

\therefore 下一個被斟酒的編號是跳過兩號，即為 4 號，

\therefore 將原來的 4 號編為 1 號，之後按逆時針依序編號如表二：

表二：原編號與新編號對應表

原編號	4	5	6	...	k	$k+1$	2	3
新編號	1	2	3	...	$k-3$	$k-2$	$k-1$	k

$\therefore k$ 個人時，最後斟到酒的客人新編號為 a_k ，

若 $a_k \leq k-2$ ，即 $a_k+3 \leq k+1 \Rightarrow a_{k+1} = a_k+3$ ；

若 $a_k > k-2$ ，即 $a_k+3 > k+1 \Rightarrow a_{k+1} = a_k - (k-3) = a_k+3-k$ 。

\therefore 猜測也是正確的。

3° 綜合上述證得猜測是正確的

Q.E.D.

所以，對於給定的 n ，我們可以由 $a_2=2$ ，依此規則推出 a_n 。

解題重點：

1. 可先測試幾個 n 值，以求得最後一位斟到酒客人的座位編號 a_n ，並進而猜測歸納出 a_n 的關係式。

2. 利用數學歸納法證明所得之結果正確。

(下轉第 47 頁)