

1999 年第 30 屆國際物理奧林匹亞競賽

實驗競賽試題

林明瑞* 齊正中** 余健治* 蔡尚芳*** 陳永芳***

*國立臺灣師範大學 物理系

**國立清華大學 物理系

***國立臺灣大學 物理系

1999 年 7 月 20 日

在你嘗試組合實驗設備之前，請先將試題全文看完！

請先讀下文：

1. 本實驗題僅一題，考試時間五小時。
2. 只能用所提供的筆書寫。
3. 只能在答題紙的正面作答。
4. 除了在「blank sheet」的紙上，你可以自由書寫外，你必須在「答案紙」上摘要寫出你所得到的實驗結果。數值結果必須取用最多且適當的有效數字位數；不要忘了單位。可要可能，就盡估算實驗收據的不準量。
5. 請在「blank sheet」上寫出所有的測量結果，以及任何其它你認為是答案的重要構成部分，希望被評閱以爭取得分。無論如何，你必須多多使用方程式、數字、符號、圖形、數據圖。盡可能少用文字說明。
6. 你絕對必須在每一張你用過的紙的上方，“NAME”欄寫上你的姓名、“TEAM”欄寫上你的國家、“CODE”欄寫上你的學生編號（你的識別證上的編號）。另外，在「blank sheet」紙上，在“Page n.”欄寫上頁碼（從 1 至 N，“第 n 頁”），在“Page total”欄寫上總頁數 N，在“Problem”。回答每一小題時，在起始處寫上該小題的編號。在你不希望被評分的答案紙上，畫上一個大「X」符號，且不要編頁碼。
7. 當你作答完畢時，按下列次序繳交所有的作答紙：答案紙居先，然後是用過的紙，未使用的紙、最後是試題卷。將這些紙全部裝入封袋內，並將所有的東西留在桌子上。任何東西不准拿出室外。

扭擺

在此實驗中，我們將探討一個相當複雜的力學系統——扭擺，並且設法得出它的主要參數。當它的轉軸呈水平時，此扭擺會顯示它是分叉現象的一個簡單例子。

提供的實驗器材：

1. 扭擺（由一中空的圓筒（在軸向上並不均勻）和一可旋入圓筒內部的長螺桿所組成）。
2. 一條附有拉環的鋼線（拉環可用於調整鋼線的鬆緊程度）。
3. 一個長的六角形螺帽，可鎖入長螺桿（只在最後一題時才需要使用）。
4. 一把直尺和一具直角三角板。
5. 計時器一個。
6. 六角扳手三支。
7. 毫米間隔的 A3 方格紙若干張。
8. 可調整的 C 形夾一個。
9. 膠帶。
10. 一個截面呈 T 型的金屬桿。

實驗裝置如圖 1 所示，它是一具扭擺，可繞水平或鉛直的轉軸振動，其轉軸為拉緊的一小段鋼線。扭擺的內部有一可旋入或旋出的長螺桿，其位置可用一六角形的小螺帽加以鎖定。此長螺桿無法從扭擺本體內部旋出。

在下述步驟五中，組裝實驗裝置時，鋼線必須穿過兩塊銅製夾板的中間，並且穿過扭擺上的小洞，然後再依照下列方式拉緊鋼線，將其位置鎖定：先夾住鋼線的一端，然後利用鋼線上的拉環，把鋼線拉緊時，再將其另一端鎖住。

警告：鋼線拉緊的程度，只需可以確保扭擺振動的穩定性即可，不可過度用力拉，拉力不可超過 30 牛頓。當拉緊鋼線時，不可以使其抵住底座邊緣而致彎曲，否則鋼線可能會斷裂。

用於描述扭擺振動特性的變數有：

- 扭擺的角位置 θ ，定義為扭擺偏離底座平面（如圖 1 的水平面）之法線方向的角度。
- 從長螺桿的頂端到扭擺轉軸的距離 x 。
- 扭擺的振動週期 T 。

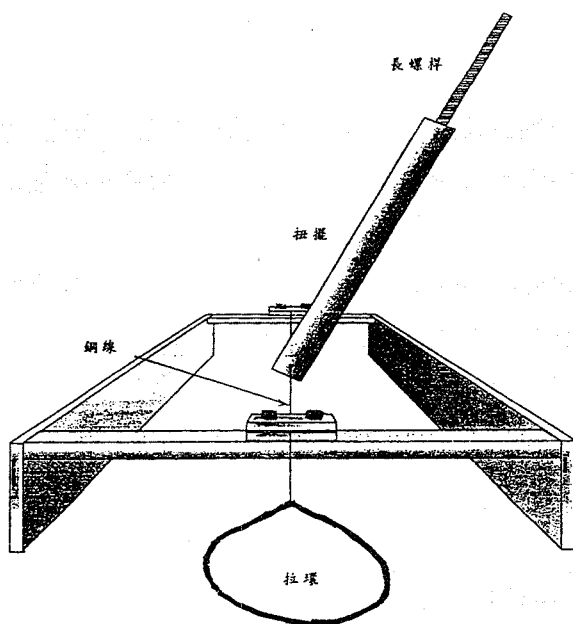


圖 1 當轉軸為水平時的實驗裝置示意圖。

用於描述扭擺系統特性的參數有：

- 鋼線的扭力常數 κ (力矩 = $\kappa \cdot$ 角度)。
- 組成扭擺的兩個部分的質量分別為 M_1 和 M_2 。(下標 1 代表外部圓筒(註一)；下標 2 代表長螺桿)。

【註一】： M_1 包括鎖定用的小六角形螺帽的質量(未在圖 1 中畫出)。

- 扭擺兩個組成部分的質心到轉軸的距離分別為 R_1 和 R_2 (下標 1 代表外部圓筒；下標 2 代表長螺桿)。在此情況中依據長螺桿的質量、長度 l 、及距離 x ，來計算 R_2 時，扭擺內可移動的部分(即長螺桿)可視為充分均勻。因此 R_2 是上述參數的簡單函數。
- 扭擺兩個組成部分繞轉軸的轉動慣量分別為 I_1 和 I_2 (下標 1 代表外部圓筒，下標 2 代表長螺桿)。在此情況中依據長螺桿的質量、長度 l 、及距離 x ，來計算 I_2 時，扭擺內可移動的部分(長螺桿)也可視為充分均勻。因此 I_2 也是上述參數的簡單函數。
- 當扭力矩為零時，扭擺的角位置 θ_0 。(即扭擺和底座平面之法線方向之間的夾角)。扭擺是用一個面向長螺桿的六角螺絲鎖定在轉軸上，因此每次組裝儀器時， θ_0 會有變動。

總言之，此扭擺系統是用七個參數來描述，即 κ 、 M_1 、 M_2 、 R_1 、 I_1 、 l 、和 θ_0 。但每次組裝後所得的 θ_0 會有變動。因此系統參數中只有六個是真正的常數，而本實驗的目的就是要從實驗中定出這六個參數，即 κ 、 M_1 、 M_2 、 R_1 、 I_1 和 l 。請注意扭擺內部的長螺桿

無法拉出到扭擺的本體外，且起始時只給予總質量 M_1+M_2 的量值（標示在每一個扭擺上）。

在本實驗中有數個物理量均為一個變數的線性函數，你必須估計這些線性函數中的參數。你可以用線性吻合方法求之，但是也可以使用其它的方法。各參數的實驗誤差可從線性吻合中求得，或是從實驗數據相對於吻合直線的分布來估計。

本實驗的分析也需要一個簡單公式來計算扭擺內部物件（即長螺桿）的轉動慣量（我們假設其橫向的尺寸，相對於其縱長而言，可予以忽略，參看圖 2）：

$$I_2(x) = \int_{x-\ell}^x \lambda s^2 ds = \frac{\lambda}{3} (x^3 - (x-\ell)^3) = \frac{\lambda}{3} (3\ell x^2 - 3\ell^2 x + \ell^3) \quad (1)$$

式中 $\lambda = M_2/\ell$ 為長螺桿的線性質量密度，因此

$$I_2(x) = M_2 x^2 - M_2 \ell x + \frac{M_2}{3} \ell^2 \quad (2)$$

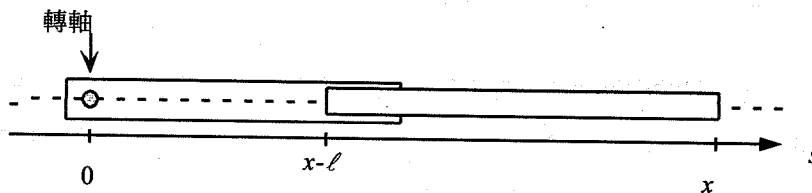


圖 2 在本實驗的分析中，我們可利用方程式(2)來計算一長桿的轉動慣量，此長桿的的橫向尺寸遠小於其縱長。轉動慣量必須對其轉軸來計算，圖中的轉軸位在 $s=0$ 之處，垂直穿過 s 軸。

現在依照下列步驟來找出這六個參數： M_1 、 M_2 、 κ 、 R_1 、 ℓ 、和 I_1 。

1. M_1+M_2 的總質量為已知（該質量已標示在扭擺上）。你可藉由測量轉軸和扭擺質心之間的距離 $R(x)$ ，而得知 M_1 與 M_2 。要完成此事，首先寫出質心位置隨 x 、 M_1 、 M_2 、 R_1 、 ℓ 變化的函數關係式。(0.5 分)
2. 現在測量數個不同 x 值所對應的 $R(x)$ （至少用 3 個不同的 x ）（註二）。很明顯地，在扭擺未附著到鋼線之前，這個測量就必須進行。利用這些測量數據及前面的結果，計算出 M_1 與 M_2 。(3 分)

【註二】：每次移動長螺桿後，都必須用六角形小螺帽將之固定住，小螺帽之質量包含在 M_1 內。每次你移動長螺桿後都必須重複操作此鎖定動作。

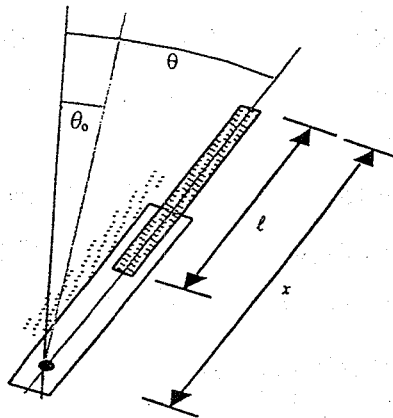


圖 3 變數 θ 與 x ，以及參數 θ_0 與 l ，都標示在此圖中。

3. 寫出一方程式，將扭擺的轉動慣量 I 表示為 x ，及參數 M_2 、 I_1 、和 l 的函數。(0.5 分)
4. 寫出當轉軸為水平時，扭擺的運動方程式，以 θ 、 x 、 κ 、 θ_0 、 M_1 、 M_2 ，總轉動慣量 I 、及質心位置 $R(x)$ 的函數關係式表示之。(1 分)
5. 爲了求出 κ ，現在將扭擺組裝起來，並使其轉動軸沿水平方向擺放。起始時長螺桿必須儘量旋入扭擺內部。利用六角螺絲，將扭擺鎖定在鋼線上，約位在兩鋼線夾之間的中點。在鎖定後，扭擺的平衡位置（在其重量和彈性回復力的共同作用下）須與鉛垂線有相當幅度的偏離。量出在數個（至少 5 個） x 值時所對應的平衡角 θ_0 。(4 分)

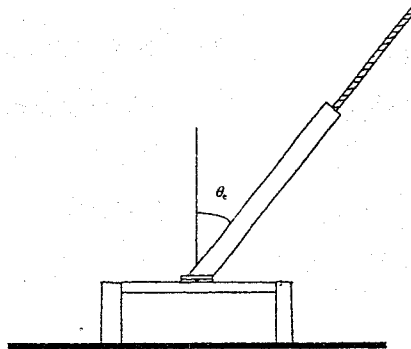


圖 4 在本實驗測量中，使扭擺的平衡位置偏離鉛垂線。

6. 利用前一小題中所作的測量結果，求出 κ 。(4.5 分)

7. 現在改置扭擺使其轉軸沿著鉛垂方向(註三)，並測量扭擺在數個 x 值(至少 5 個)的振動週期。利用這些測量結果，求出 I_1 和 l 。(4 分)

【註三】：爲了在此位置上穩住扭擺，你也許需要重置底座的托架。

至此階段，在找到此系統的參數後，將實驗裝置擺放如下：

- 扭擺的轉軸呈水平
- 儘可能深地將長螺桿旋入扭擺內部
- 使扭擺的平衡位置儘量地接近鉛垂方向
- 現在將一長筒的六角螺帽加裝到長螺桿的尾端，轉入幾圈就可(它無法再多轉些)。

在這種情形下，扭擺的平衡位置也許會有兩個，此情況隨長螺桿的位置而變。這點你可以由如圖 5 所示的曲線族，即位能隨 θ 角變化的函數曲線看出。

圖 5 所示位能具有兩個最小值的現象，在數學上稱爲分叉，這也與粒子物理和統計力學中所探討的多種對稱破壞現象有關。

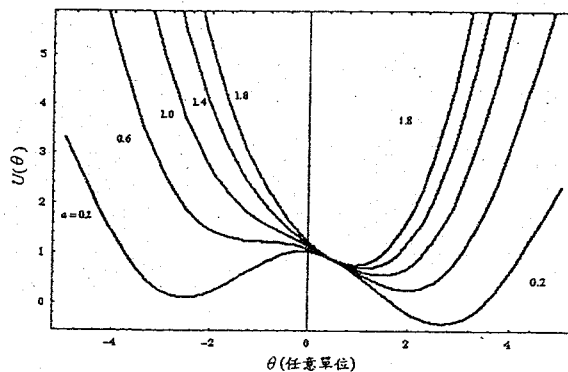


圖 5 當 $\theta_0 \neq 0$ 時，根據 θ 的函數 $U(\theta) = \frac{a}{2}(\theta - \theta_0)^2 + \cos\theta$ (此函數與本題中的位能成正比) 作出的曲線圖。各曲線分別對應於不同的 a 值(已標示於圖上)；其中較小的 a 值 ($a < 1$)，對應出現分叉現象。在我們的問題中參數 a 與長螺桿的位置 x 有關。

現在我們可以經由測量扭擺在其平衡位置附近的微幅振動週期，來探討分叉現象。

8. 畫出週期 T (註四)對 x 的函數關係圖。它是何種函數？是遞增、遞減、或較複雜的函數？(2.5 分)

【註四】：你有可能觀測到兩個平衡位置，但其中之一較爲穩定(參見圖 5)。只需將較爲穩定者的週期值列表及作圖。

答案卷

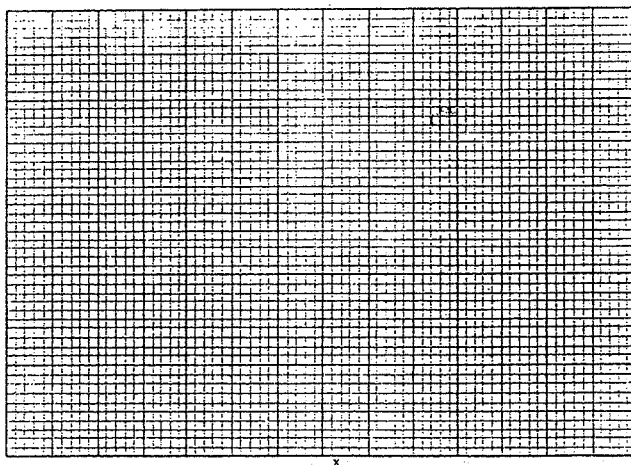
1. 質心位置 $R(x)$ 的數學關係式.....。

2. 將你的 $R(x)$ 測量結果填入下表：

X	$R(x)$

繪出 $R(x)$ 對 x 關係圖線

$R(x)$ vs. x



設 $R(x) = ax + b$ ，由你的測量數據中，計算 a 與 b ，寫出它們的數值（含單位及實驗誤差）：

$a = \dots\dots\dots$ 和 $b = \dots\dots\dots$ 。由你的 a 和 b 值，寫出 M_1 和 M_2 的數值（含單位及實驗誤差）： $M_1 = \dots\dots\dots$ 和 $M_2 = \dots\dots\dots$ 。

3. 總轉動慣量的函數關係式.....。

4. 當轉軸呈水平時，扭擺的運動方程式為.....。

5. 針對數個 x 值，於下表中列出相對應的平衡角度 θ_0 。由於提供的器材中，沒有量角器，你必須藉由長度的測量，來求得角度。將你用以決定 θ_0 的原始數據，寫在一空白紙上。

x	θ_e

6. 寫出 κ 的數值(含單位及實驗誤差)

7. 當轉軸呈鉛直時，於下表中列出振動週期 T 和對應的 x 值。如果這些數值是幾次測量的平均值，將原始的測量數據寫在一張空白紙上。

x	T

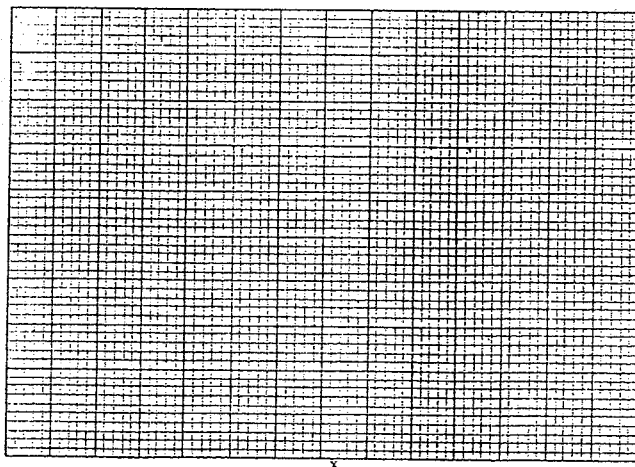
寫出 l 和 I_1 的數值 (含單位及實驗誤差) : l 和 I_1

8. 當轉軸呈水平時，於下表中列出振動週期 T 和對應的 x 值。如果這些數值是幾次測量的平均值，將原始的測量數據寫在一張空白紙上。

x	T

繪出 T 對 x 的關係圖線，標出坐標軸的刻度和單位。

T vs. x



所繪出的週期 T 對 x 的關係圖線形狀

1. 是 x 的遞增函數
2. 是 x 的遞減函數
3. 有一個極小值
4. 有一個極大值
5. 有多於一個的極小值
6. 有多於一個的極大值
7. 剛好只有一個極大值和一個極小值

正確的答案是 _____ (寫出正確的選項)。

(上接第 71 頁)

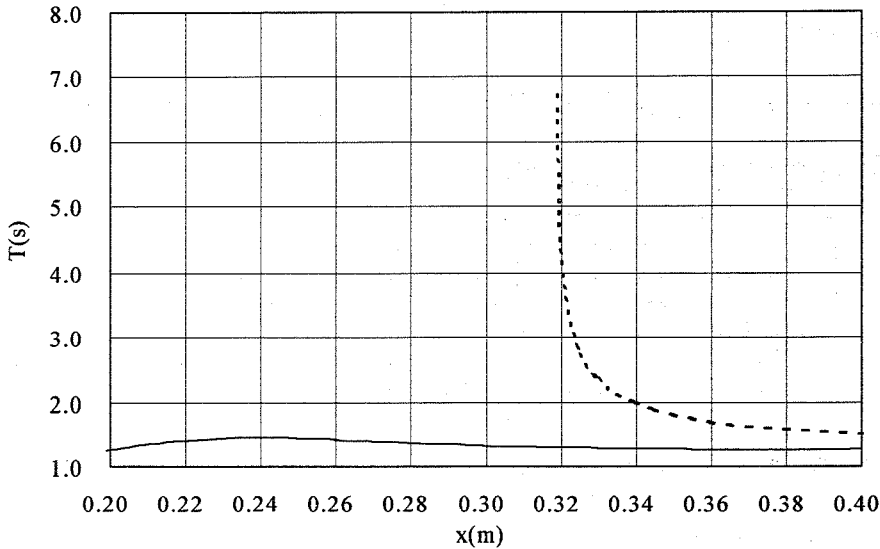


圖 9 當扭擺的轉軸在水平面上，且 $\theta_0 = 0.1\text{rad} \approx 5.7^\circ$ 時，扭擺振動週期 T 和螺桿位置坐標 x 之間的理論關係曲線。分叉點位在 $x_b = 0.319\text{m}$ ，實線代表平衡角度為正值時的週期曲線；虛線則代表平衡角度為負值的週期曲線。實線所代表的週期曲線形狀已經變得相當平緩。