

1999 年第 30 屆國際物理奧林匹亞競賽 實驗競賽試題參考解答

林明瑞
國立臺灣師範大學 物理系

1.和 2.

從扭擺質心到轉軸的距離的關係式為

$$R(x) = \frac{M_1 R_1 + M_2 (x - \ell/2)}{M_1 + M_2} \quad (1)$$

因此如果我們測得質心位置隨 x 變化的函數關係(註一)，利用(1)式的線性吻合，可求得其斜率 $M_2/(M_1 + M_2)$ ，再利用已知的總質量 $M_1 + M_2 = (41.0 \pm 0.1)g$ ，便可計算出 M_1 和 M_2 。

測得的數據列在下表：

n	x(mm)	R(x)(mm)
1	204± 1	76± 1
2	220± 1	83± 1
3	236± 1	89± 1
4	254± 1	95± 1
5	269± 1	101± 1
6	287± 1	107± 1
7	302± 1	113± 1
8	321± 1	119± 1

【註一】將扭擺平衡地置放在所提供的 T 形桿上，即可測出其質心位置。

圖 1 所示為上表中的數據分布和最佳吻合直線。長度測量的不準量為 1mm，我們將之視為高斯分布(或稱為常規分布)。注意應變數 $R(x)$ 和自變數 x 都受到實驗誤差的影響，但是由於 x 的不準量皆小於 1%，和 $R(x)$ 相較，可予忽略，在圖上未畫出。

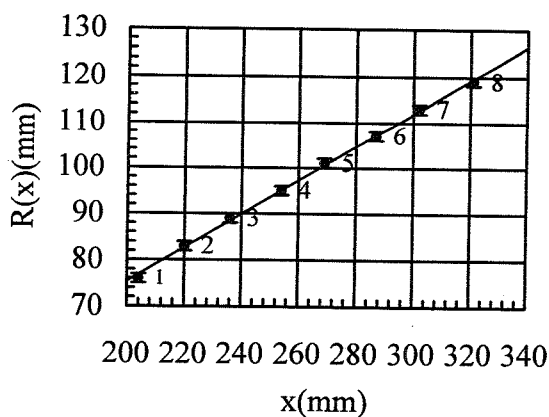


圖 1

利用線性迴歸或其他誤差分析方法(請見附註)，可求得圖 1 中的最佳直線方程式 $R(x) = ax + b$ 的係數值。 a 和 b 的數值如下：

$$a = 0.366 \pm 0.009, \quad b = 2 \pm 2 \text{ mm}$$

由 a 值及扭擺的總質量可計算得

$$M_1 = 26.1 \pm 0.4 \text{ g}, \quad M_2 = 15.0 \pm 0.4 \text{ g} \quad (2)$$

【附註】： a 和 b 的求法。

(1) 利用線性迴歸公式(亦可直接利用掌上型計算機的內建程式求得)：

由於 y 的不準量皆相同，故可使用不須加權的線性迴歸公式。

n	x(mm)	y(=R(x))(mm)	x ² (mm ²)	xy(mm ²)
1	204	76	41616	15504
2	220	83	48400	18260
3	236	89	55696	21004
4	254	95	64516	24130
5	269	101	72361	27169
6	287	107	82369	30709
7	302	113	91204	34126
8	321	119	103041	38199
N=8	$\Sigma x = 2093$	$\Sigma y = 783$	$\Sigma x^2 = 559203$	$\Sigma xy = 209101$

$$\Delta = N \Sigma x^2 - (\Sigma x)^2 = 92975$$

$$a = \frac{1}{\Delta} (N \Sigma xy - \Sigma x \Sigma y) = 0.366$$

$$b = \frac{1}{\Delta} (\Sigma x^2 \Sigma y - \Sigma x \Sigma xy) = 2.23 \text{ mm} \quad (3)$$

$$\sigma_a = \sqrt{\frac{N \sigma^2}{\Delta}} = 0.009$$

$$\sigma_b = \sqrt{\frac{\sigma^2}{\Delta} \Sigma x^2} = 2.45 \text{ mm}$$

$$\text{式中 } \sigma = \sqrt{(\sigma_y)^2 + \left(\frac{dy}{dx} \sigma_x\right)^2} = \sqrt{1^2 + (0.366 \times 1)^2} = 1.06 \text{ mm} \approx 1 \text{ mm}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} a \pm \sigma_a = 0.366 \pm 0.009 \\ b \pm \sigma_b = 2 \pm 2 \text{ mm} \end{cases}$$

上列的計算式僅適用於 y 的測量值皆有同大不準量的情況(在本題中 $\sigma_y = 1 \text{ mm}$)。

(2) 計算數對數據點的斜率，再求平均值：

設某一對數據點的坐標分別為 $(x_1 \pm \Delta x_1, y_1 \pm \Delta y_1)$ 和 $(x_2 \pm \Delta x_2, y_2 \pm \Delta y_2)$ ，則由這兩點所決定的直線方程式 $y = ax + b$ ，其係數值分別為

$$a \pm \Delta a = \frac{(y_2 \pm \Delta y_2) - (y_1 \pm \Delta y_1)}{(x_2 \pm \Delta x_2) - (x_1 \pm \Delta x_1)} \quad (4)$$

$$b \pm \Delta b = (y_2 \pm \Delta y_2) - (a \pm \Delta a)(x_2 \pm \Delta x_2)$$

利用誤差傳遞公式，可得

$$a \pm \Delta a = \frac{(y_2 - y_1) \pm \sqrt{(\Delta y_2)^2 + (\Delta y_1)^2}}{(x_2 - x_1) \pm \sqrt{(\Delta x_2)^2 + (\Delta x_1)^2}} \quad (5)$$

$$\Rightarrow \begin{cases} a = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} \\ \Delta a = a \sqrt{\frac{(\Delta y_2)^2 + (\Delta y_1)^2}{(y_2 - y_1)^2} + \frac{(\Delta x_2)^2 + (\Delta x_1)^2}{(x_2 - x_1)^2}} \end{cases} \quad (6)$$

$$b \pm \Delta b = (y_2 + \Delta y_2) - \left(ax_2 \pm ax_2 \sqrt{\frac{(\Delta a)^2}{a^2} + \frac{(\Delta x_2)^2}{x_2^2}} \right) \quad (7)$$

$$\Rightarrow \begin{cases} b = y_2 - ax_2 \\ \Delta b = \sqrt{(\Delta y_2)^2 + a^2 x_2^2 \left(\frac{(\Delta a)^2}{a^2} + \frac{(\Delta x_2)^2}{x_2^2} \right)} \end{cases} \quad (8)$$

爲了減小誤差，數據對可選擇「遠點」和「近點」的搭配，例如圖 1 中所標示的 {1,5}、{2,6}、{3,7}、{4,8}。各數據對利用(6)和(8)兩式計算的結果列在下表：

數據對	$a \pm \Delta a$	$b \pm \Delta b$
{1,5}	0.385 ± 0.023	-3 ± 6
{2,6}	0.358 ± 0.022	4 ± 6
{3,7}	0.364 ± 0.023	3 ± 7
{4,8}	0.358 ± 0.022	4 ± 7

$$\bar{a} \pm \Delta \bar{a} = \frac{\sum (a \pm \Delta a)}{N}$$

$$= \frac{(0.385 + 0.358 + 0.364 + 0.358) \pm \sqrt{(0.023)^2 + (0.022)^2 + (0.023)^2 + (0.022)^2}}{4}$$

$$= 0.366 \pm 0.011$$

$$\bar{b} \pm \Delta \bar{b} = \frac{\sum (b \pm \Delta b)}{N}$$

$$= \frac{(-3 + 4 + 3 + 4) \pm \sqrt{(6)^2 + (6)^2 + (7)^2 + (7)^2}}{4}$$

$$= 2 \pm 3 \text{ mm}$$

3. 扭擺的總轉動慣量等於其組成部分的轉動慣量之和，即

$$I(x) = I_1 + I_2(x) = M_2 x^2 - M_2 \ell x + \left(I_1 + \frac{1}{3} M_2 \ell^2 \right) \quad (9)$$

4. 當扭擺的轉軸呈鉛直時，其運動方程式爲

$$I(x) \frac{d^2\theta}{dt^2} = -\kappa(\theta - \theta_0) \quad (10)$$

當扭擺的轉軸呈水平時，其運動方程式為

$$I(x) \frac{d^2\theta}{dt^2} = -\kappa(\theta - \theta_0) + (M_1 + M_2)gR(x)\sin\theta \quad (11)$$

5.和 6.

當扭擺的轉軸呈水平，且處於平衡狀態時，則其所受的合力矩為零。由(11)式可解得扭擺在平衡位置時的角度 θ_e 。

$$-\kappa(\theta_e - \theta_0) + (M_1 + M_2)gR(x)\sin\theta_e = 0 \quad (12)$$

設 $y = (M_1 + M_2)gR(x)\sin\theta_e$ ，則(11)式可寫為

$$y = \kappa\theta_e - \kappa\theta_0 \quad (13)$$

從圖 2 的幾何關係可得 $\sin\theta_e = h/x$ ，由 h 和 x 的測量值，可計算出 y 和 θ_e 。(13)式顯示 y 和 θ_e 有線性關係，故從下表的數據中，由其最佳吻合直線可求出 κ 和 $\kappa\theta_0$ 。

n	$x(\text{mm})$	$h(\text{mm})$	$\sin\theta_e = h/x$	θ_e	$y(\text{N}\cdot\text{mm})$
1	204± 1	40± 1	0.196± 0.005	0.197± 0.005	6.1± 0.3
2	220± 1	62± 1	0.282± 0.005	0.286± 0.005	9.4± 0.4
3	236± 1	75± 1	0.315± 0.004	0.321± 0.004	11.3± 0.5
4	254± 1	89± 1	0.349± 0.004	0.357± 0.004	13.4± 0.5
5	269± 1	109± 1	0.404± 0.004	0.416± 0.004	16.4± 0.6
6	287± 1	131± 1	0.458± 0.004	0.476± 0.004	19.7± 0.7
7	302± 1	162± 1	0.528± 0.004	0.556± 0.004	24.3± 0.8
8	321± 1	188± 1	0.586± 0.004	0.626± 0.004	28.2± 0.9

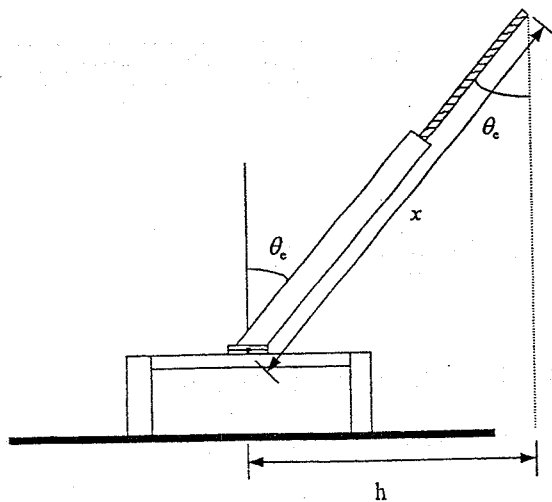


圖 2

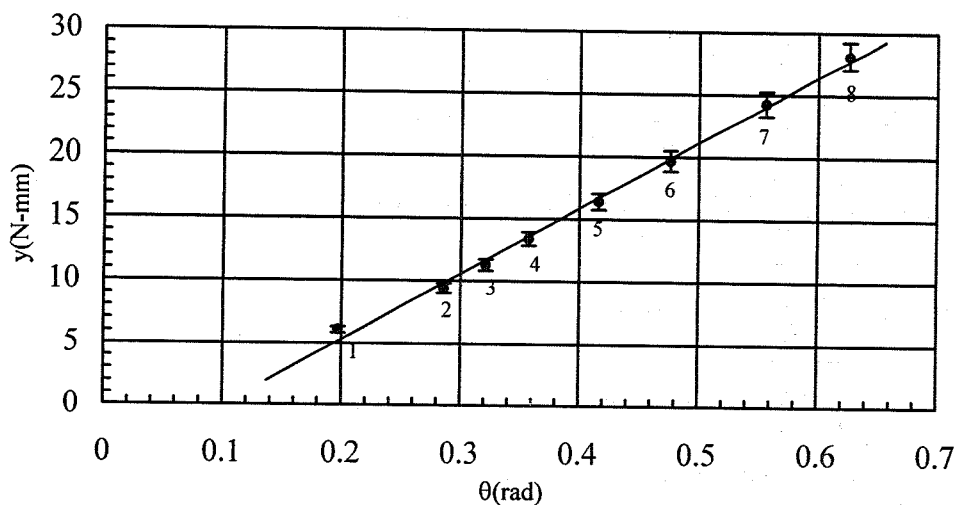


圖3

圖 3 所示為 y 和 θ_e 的數據關係圖線，由於最下面的一點偏離圖上的最佳吻合直線，略去此點不計，可求得該直線的斜率和截距如下：

$$\kappa = 0.055 \pm 0.002 \text{ N} \cdot \text{m} \cdot \text{rad}^{-1}$$

$$\kappa\theta_0 = 0.0063 \pm 0.0008 \text{ N} \cdot \text{m} \quad (14)$$

【附註】： κ 和 $\kappa\theta_0$ 的求法如下：

(1) 利用線性迴歸公式：

從 $y-\theta$ 的數據中，可看出 y 的不準量有變化，並非一致，所以必須使用有加權的線性迴歸公式。由於 θ 的不準量小於 2.5%，遠小於 y 的誤差百分比，在誤差分析時可予忽略，即 $\sigma_i^2 = \sigma_{y_i}^2 + \left(\frac{dy}{dx}\sigma_{x_i}\right)^2 \approx \sigma_{y_i}^2$ 。為方便起見，表中的 x 代表 θ 。

n	$x(\text{rad})$	$\sigma_x(\text{rad})$	$y(\text{N}\cdot\text{mm})$	$\sigma_y(\text{N}\cdot\text{mm})$	$1/\sigma^2$	x^2/σ^2	x/σ^2	y/σ^2	xy/σ^2
2	0.286	0.005	9.4	0.4	6.25	0.511	1.788	58.8	16.8
3	0.321	0.004	11.3	0.5	4.00	0.412	1.284	45.2	14.5
4	0.357	0.004	13.4	0.5	4.00	0.510	1.428	53.6	19.1
5	0.416	0.004	16.4	0.6	2.78	0.481	1.156	45.6	19.0
6	0.476	0.004	19.7	0.7	2.04	0.462	0.971	40.2	19.1
7	0.556	0.004	24.3	0.8	1.56	0.483	0.869	38.0	21.1
8	0.626	0.004	28.2	0.9	1.23	0.484	0.773	34.8	21.8
					$\Sigma \frac{1}{\sigma_i^2}$ = 33.0	$\Sigma \frac{x_i^2}{\sigma_i^2}$ = 0.484	$\Sigma \frac{x_i}{\sigma_i^2}$ = 0.773	$\Sigma \frac{y_i}{\sigma_i^2}$ = 384	$\Sigma \frac{x_i y_i}{\sigma_i^2}$ = 145

(數據點 $(y, \theta) = (6.1 \pm 0.3, 0.197 \pm 0.005)$ 未列入表中計算。)

$$\Delta = \Sigma \frac{1}{\sigma_i^2} \Sigma \frac{x_i^2}{\sigma_i^2} - \left(\Sigma \frac{x_i}{\sigma_i^2} \right)^2 = 4.74 N^{-2} \cdot mm^{-2} \cdot rad^2$$

$$\kappa = \frac{1}{\Delta} \left(\Sigma \frac{1}{\sigma_i^2} \Sigma \frac{x_i y_i}{\sigma_i^2} - \Sigma \frac{x_i}{\sigma_i^2} \Sigma \frac{y_i}{\sigma_i^2} \right) = 55 N \cdot mm \cdot rad^{-1}$$

$$-\kappa \theta_0 = \frac{1}{\Delta} \left(\Sigma \frac{x_i^2}{\sigma_i^2} \Sigma \frac{y_i}{\sigma_i^2} - \Sigma \frac{x_i}{\sigma_i^2} \Sigma \frac{x_i y_i}{\sigma_i^2} \right) = -6.3 N \cdot mm \quad (15)$$

$$\sigma_\kappa = \sqrt{\frac{1}{\Delta} \left(\Sigma \frac{1}{\sigma_i^2} \right)} = 2 N \cdot mm \cdot rad^{-1}$$

$$\sigma_{\kappa \theta_0} = \sqrt{\frac{1}{\Delta} \left(\Sigma \frac{x_i^2}{\sigma_i^2} \right)} = 0.8 N \cdot mm$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \kappa \pm \sigma_\kappa = 0.055 \pm 0.002 N \cdot m \cdot rad^{-1} \\ \kappa \theta_0 \pm \sigma_{\kappa \theta_0} = 0.0063 \pm 0.0008 N \cdot m \end{cases} \quad (16)$$

(2)計算數對數據點的斜率，再求平均值：

利用(6)和(8)兩式，將表中的數據點選擇 {2,5}，{3,6}，{4,7}，{5,8} 分別配對，計算斜率和截距，其結果列成下表：

數據對	$\kappa \pm \Delta\kappa$ ($N \cdot mm \cdot rad^{-1}$)	$\kappa\theta_0 \pm \Delta\kappa\theta_0$ ($N \cdot mm$)
{2,5}	53.8 ± 5.9	6.4 ± 1.3
{3,6}	54.2 ± 5.9	6.4 ± 1.5
{4,7}	54.8 ± 5.0	6.2 ± 1.8
{5,8}	56.2 ± 5.4	6.1 ± 2.0

$$\overline{\kappa \pm \Delta\kappa} = \frac{\Sigma(\kappa \pm \Delta\kappa)}{N}$$

$$= \frac{(53.8 + 54.2 + 54.8 + 56.2) \pm \sqrt{(5.9)^2 + (5.9)^2 + (5.0)^2 + (5.4)^2}}{4}$$

$$= 54.8 \pm 2.8 N \cdot mm \cdot rad^{-1}$$

$$= 0.055 \pm 0.003 N \cdot m \cdot rad^{-1}$$

$$\overline{\kappa\theta_0 \pm \Delta\kappa\theta_0} = \frac{\Sigma(\kappa\theta_0 \pm \Delta\kappa\theta_0)}{N}$$

$$= \frac{(6.4 + 6.4 + 6.2 + 6.1) \pm \sqrt{(1.3)^2 + (1.5)^2 + (1.8)^2 + (2.0)^2}}{4}$$

$$= 6.3 \pm 0.8 N \cdot mm$$

$$= 0.0063 \pm 0.0008 N \cdot m$$

7.當扭擺的轉軸成鉛直時，由(10)式可知其振動週期為

$$T = \frac{2\pi}{\omega} = 2\pi \sqrt{\frac{I(x)}{\kappa}}$$

$$\Rightarrow I(x) = \frac{\kappa T^2(x)}{4\pi^2} \quad (17)$$

利用(9)式，可得

$$\frac{\kappa}{4\pi^2} T^2(x) - M_2 x^2 = -M_2 \ell x + \left(I_1 + \frac{M_2}{3} \ell^2 \right) \quad (18)$$

設 $y = \frac{\kappa}{4\pi^2} T^2(x) - M_2 x^2$ ，則上式可寫為

$$y = -M_2 \ell x + \left(I_1 + \frac{M_2}{3} \ell^2 \right) \quad (19)$$

上式顯示 y 和 x 之間有線性關係，因此從其直線方程式的斜率和截距，可求得 $-M_2 \ell$ 和 $I_1 + \frac{M_2}{3} \ell^2$ 。測量在不同的 x 值時，扭擺作 50 次完整振動所需的時間，得 x 、 T 、和 y 的實驗數據如下：

n	$x(\text{mm})$	$T(\text{s})$	$y = \frac{\kappa}{4\pi^2} T^2 - M_2 x^2 \text{ (kg}\cdot\text{m}^2)$
1	204 ± 1	0.502 ± 0.002	$(-2.7 \pm 0.2) \times 10^{-4}$
2	215 ± 1	0.528 ± 0.002	$(-3.1 \pm 0.2) \times 10^{-4}$
3	231 ± 1	0.562 ± 0.002	$(-3.6 \pm 0.3) \times 10^{-4}$
4	258 ± 1	0.628 ± 0.002	$(-4.5 \pm 0.3) \times 10^{-4}$
5	290 ± 1	0.708 ± 0.002	$(-5.6 \pm 0.4) \times 10^{-4}$
6	321 ± 1	0.790 ± 0.002	$(-6.8 \pm 0.5) \times 10^{-4}$

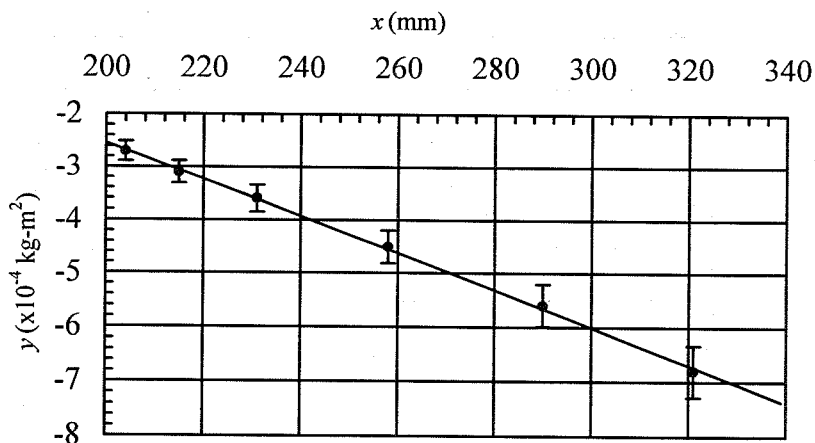


圖 4

應用加權的線性迴歸公式，即(15)式，可計算得圖 4 中最佳吻合直線的斜率和截距，其值分別為

$$\begin{aligned}
 -M_2\ell &= (-3.4 \pm 0.3) \times 10^{-3} \text{ kg} \cdot \text{m} \\
 I_1 + \frac{1}{3}M_2\ell^2 &= (4.3 \pm 0.8) \times 10^{-4} \text{ kg} \cdot \text{m}^2
 \end{aligned}
 \tag{20}$$

代入(2)式之 M_2 值，可解得

$$\begin{aligned}
 \ell &= 0.23 \pm 0.02 \text{ m} \\
 I_1 &= (1.7 \pm 0.8) \times 10^{-4} \text{ kg} \cdot \text{m}^2
 \end{aligned}
 \tag{21}$$

8. 當扭擺的轉軸呈水平時，測得 x 和其對應的振動週期 T 如下表：

$x(\text{mm})$	$T(\text{s})$
198 ± 1	1.342 ± 0.002
212 ± 1	1.534 ± 0.002
236 ± 1	2.210 ± 0.002
242 ± 1	2.504 ± 0.002
268 ± 1	4.542 ± 0.002
276 ± 1	2.188 ± 0.002
298 ± 1	1.720 ± 0.002
318 ± 1	1.482 ± 0.002

T 對 x 的數據關係圖線如下圖所示，顯示僅有一個極大值。

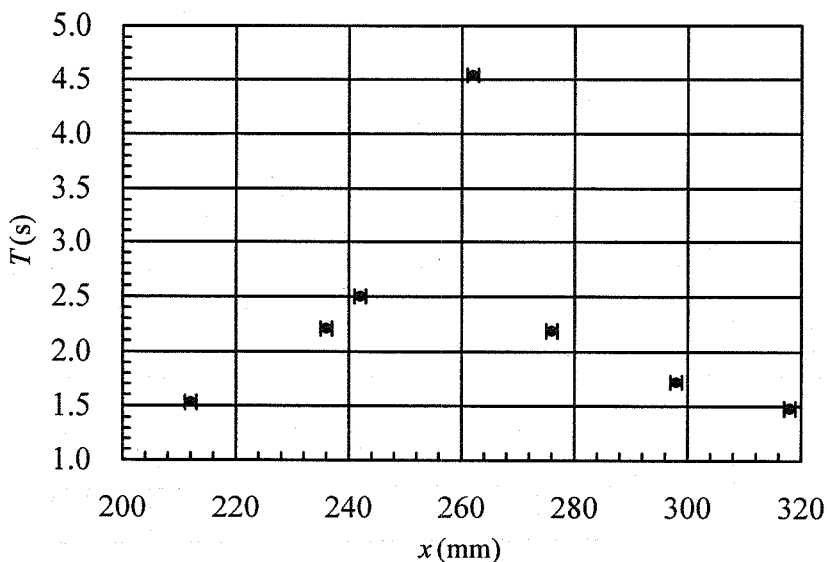


圖5

實驗題評分標準

題號	配分	答題情況	得分	備註
1	0.5	寫出正確的質心位置方程式。	0.5	
2	3.0	完整的實驗數據，及正確的不準量估計。	1.0	
		由數據中計算 a 和 b 。	0.4+0.3	
		由 a 計算 M_1 和 M_2 。	0.1+0.2	
		a 和 b 的不準量估計正確。	0.3+0.3	
		M_1 和 M_2 的不準量估計正確。	0.1+0.3	
3	0.5	寫出正確的轉動慣量方程式。	0.5	
4	1.0	寫出正確的扭擺運動方程式。	1.0	
5	4.0	使用合宜的角度測量方法。	2.0	
		θ 的不準量估計正確。	2.0	
6	4.5	寫出正確的平衡方程式。	0.5	
		將平衡方程式線性化。	1.0	
		正確估計線性化變量 y 的不準量。	1.5	
		由數據中求出 κ 。	0.5	
		κ 的不準量估計正確。	1.0	
7	4.0	寫出振動週期和轉動慣量的正確關係式。	0.5	
		將上項的關係式線性化。	1.0	
		數據列表。	0.5	
		由數據中求出 $I(x)$ 。	0.5	
		數據的不準量估計正確。	1.5	
8	2.5	每一個數據點給 0.1 分，最高至 1.0 分。	1.0	
		至少有三個數據點以襯托出峰值(超出峰值一半的高度)。	1.0	
		對應峰值的週期須大於 2.5s。	0.3	
		認出曲線的形狀僅有一極大值，或如果數據點夠多，可認出有一極大值和一極小值。	0.2	
合計	20.0			

附錄 扭擺運動的理論分析

在實驗試題的文字敘述中，曾提到扭擺的平衡位置也許會有兩個，此情況隨長螺桿旋出的位置而變。這可從試題中圖 5 所示的曲線族，即位能隨 θ 角變化的函數曲線，看出。圖中所示位能具有兩個最小值的現象，在數學上稱為分叉，這也與粒子物理和統計力學中所探討的多種對稱破壞的現象有關。本文從理論的觀點來分析扭擺的轉動，文中各種物理量的定義皆和試題中所述者一致。

如果扭擺的轉軸是沿鉛直方向，則扭擺的轉動方程式為

$$I(x) \frac{d^2\theta}{dt^2} = -\kappa(\theta - \theta_0) \tag{1}$$

式中 $I(x)$ 為當螺桿尾端至轉軸的距離為 x 時，扭擺繞轉軸的轉動慣量， θ_0 為扭擺所受的合力矩為零時的角度坐標。設上式等號右邊的力矩所對應的位能函數為 $U(\theta, x)$ ，即

$$\Gamma = -\kappa(\theta - \theta_0) = -\frac{\partial U(\theta, x)}{\partial \theta}, \text{ 故}$$

$$U(\theta, x) = \frac{1}{2} \kappa (\theta - \theta_0)^2 \tag{2}$$

此位能曲線為一拋物線，僅有一個極小值，故在此情況下，扭擺的平衡位置只有一個，沒有所謂的分叉現象。

如果扭擺的轉軸是在水平面上，則扭擺的轉動方程式為

$$I(x) \frac{d^2\theta}{dt^2} = -\kappa(\theta - \theta_0) + (M_1 + M_2)gR(x)\sin\theta \tag{3}$$

上式等號右邊的合力矩所對應的位能函數為

$$U(\theta, x) = \frac{1}{2} \kappa (\theta - \theta_0)^2 + (M_1 + M_2)gR(x)\cos\theta \tag{4}$$

式中 $R(x)$ 為扭擺的質心至轉軸的距離。(4)式所代表的曲線族如實驗試題中的圖 5 所示。從圖中可看出當 x 很小時，位能的極小值僅有一個。當 x 增大時， $R(x)$ 隨之變大，因此(4)式的第二項變得較為重要，位能極小值的出現位置往兩旁移動，逐漸分開成為兩個極小值，也就是扭擺會有兩個平衡位置。純就數學而言，位能的極小值不止兩個，可能有更多個，但就實際的力學系統來考慮，很難超過兩個。

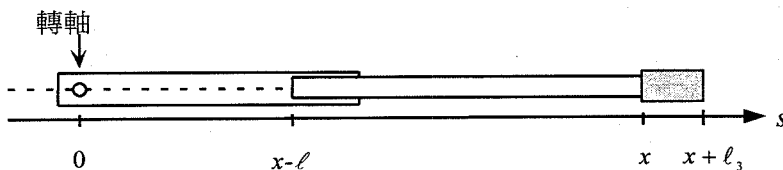


圖 1 扭擺由中空圓筒、螺桿、和螺帽三個部分所組成。

如果在螺桿的尾端旋入一長螺帽（在實驗操作時，此螺帽僅能旋入幾圈，故螺帽和螺桿可視為頭尾相連），如圖 1 所示，設其長度為 ℓ_3 ，質量為 M_3 ，質心至轉軸的距離為 $x_3 = x + \frac{\ell_3}{2}$ ，則(4)式須改寫為

$$U(\theta, x) = \frac{1}{2} \kappa (\theta - \theta_0)^2 + [(M_1 + M_2)R(x) + M_3 x_3] g \cos \theta \quad (5)$$

為方便起見，定義 $\alpha(x) \equiv g[(M_1 + M_2)R(x) + M_3 x_3]$ ，則上式可寫為

$$U(\theta, x) = \frac{1}{2} \kappa (\theta - \theta_0)^2 + \alpha(x) \cos \theta \quad (6)$$

在此情況下，扭擺的轉動方程式變為

$$I'(x) \frac{d^2 \theta}{dt^2} = - \frac{\partial U(\theta, x)}{\partial \theta} \quad (7)$$

式中

$$\begin{aligned} I'(x) &= I_1(\text{圓筒}) + I_2(\text{螺桿}) + I_3(\text{螺帽}) \\ &= I_1 + \int_{x-\ell}^x \left(\frac{M_2}{\ell} \right) s^2 ds + \int_x^{x+\ell_3} \left(\frac{M_3}{\ell_3} \right) s^2 ds \\ &= I_1 + M_2 \left(x^2 - \ell x + \frac{\ell^2}{3} \right) + \frac{M_3}{3\ell_3} [(x + \ell_3)^3 - x^3] \end{aligned} \quad (8)$$

假設扭擺在平衡位置附近作小幅度的振動，其平衡位置的角坐標為 θ_e ，將(6)式對 θ_e 作泰勒級數展開，可得

$$U(\theta, x) = U(\theta_e, x) + \left(\frac{\partial U}{\partial \theta} \right)_{\theta_e} (\theta - \theta_e) + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial^2 U}{\partial \theta^2} \right)_{\theta_e} (\theta - \theta_e)^2 + \dots \quad (9)$$

式中

$$\left(\frac{\partial U}{\partial \theta} \right)_{\theta_e} = \kappa (\theta_e - \theta_0) - \alpha(x) \sin \theta_e \quad (10)$$

$$\left(\frac{\partial^2 U}{\partial \theta^2} \right)_{\theta_e} = \kappa - \alpha(x) \cos \theta_e \quad (11)$$

當扭擺平衡時，其所受的合力矩為零，即 $\left(\frac{\partial U}{\partial \theta} \right)_{\theta_e} = 0$ ，故

$$\kappa (\theta_e - \theta_0) - \alpha(x) \sin \theta_e = 0 \quad (12)$$

從上式可解出 θ_e 和 (x, θ_0) 的函數關係，此式無確實解，因此只能求其數值解，其結果顯示分叉現象，將在後列的數種情況中說明。

將(9)至(12)式代入(7)式可得

$$I'(x) \frac{d^2 \theta}{dt^2} = - \left(\frac{\partial^2 U}{\partial \theta^2} \right)_{\theta_e} (\theta - \theta_e) \quad (13)$$

$$\Rightarrow \frac{d^2\theta}{dt^2} + \left[\frac{\kappa - \alpha(x)\cos\theta_e}{I'(x)} \right] (\theta - \theta_e) = 0 \quad (14)$$

故扭擺的振動週期為

$$T(x) = \frac{2\pi}{\omega} = 2\pi \sqrt{\frac{I'(x)}{\kappa - \alpha(x)\cos\theta_e}} \quad (15)$$

將(12)式所解出的 θ_e 代入上式，可解出週期 T 和 (x, θ_0) 的函數關係，此式無確實解，也只能求出數值解。

(12)和(15)兩式的數值解，皆以下表的數據進行計算，所得的函數曲線分別列在圖 2 至圖 9。

表一

g	$9.81m/s^2$	I_1	$1.7 \times 10^{-4} kg \cdot m^2$
κ	$0.056N \cdot m/rad$	ℓ	$0.23m$
M_1	$0.0261kg$	ℓ_3	$0.025m$
M_2	$0.0150kg$	a	0.365
M_3	$0.00664kg$	b	$0.0022m$
$R(x) = ax + b$			

以下分就 $\theta_0(rad) = 0, 0.003, 0.005, \text{和 } 0.1$ 四種情況來討論：

(1) $\theta_0 = 0$

扭擺平衡位置的角度坐標 θ_e 對 x 的關係曲線如圖 2 所示。分叉點的位置坐標 $x_b = 0.256m$ 。

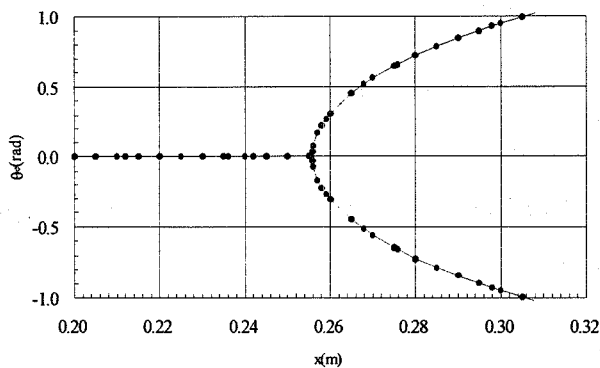


圖 2 當 $\theta_0 = 0$ 時，扭擺平衡位置的分叉現象，分叉點位在 $x_b = 0.256m$ 。

以圖 2 中不同位置坐標 x 的 θ_0 值代入(15)式計算，所得的 $T(x)$ 函數曲線如圖 3 所示。

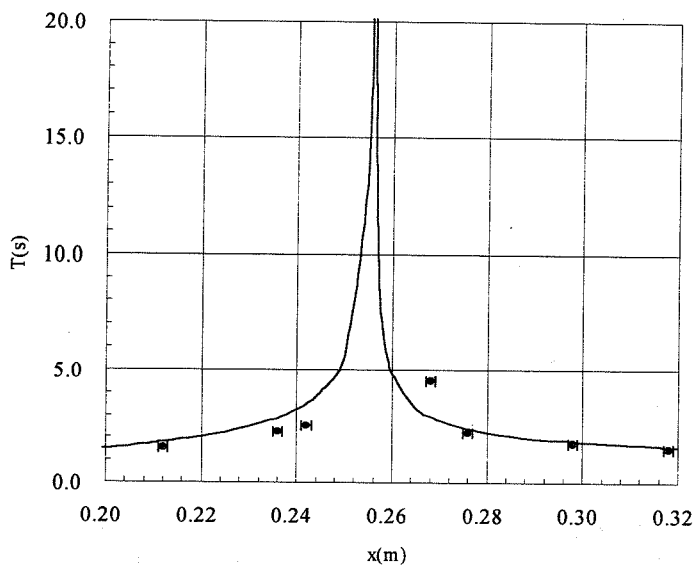


圖 3 當扭擺的轉軸在水平面上，且 $\omega_0 = 0$ 時，扭擺振動週期 T 和螺桿位置坐標 x 之間的理論關係曲線。分叉點位在 $x_b = 0.256\text{m}$ 。圖上亦標記有實驗數據點，和理論曲線相當吻合。

(2) $\theta_0 = 0.003\text{rad} \approx 0.17^\circ$

$\theta_e(x)$ 和 $T(x)$ 的函數曲線分別如圖 4 和圖 5 所示。

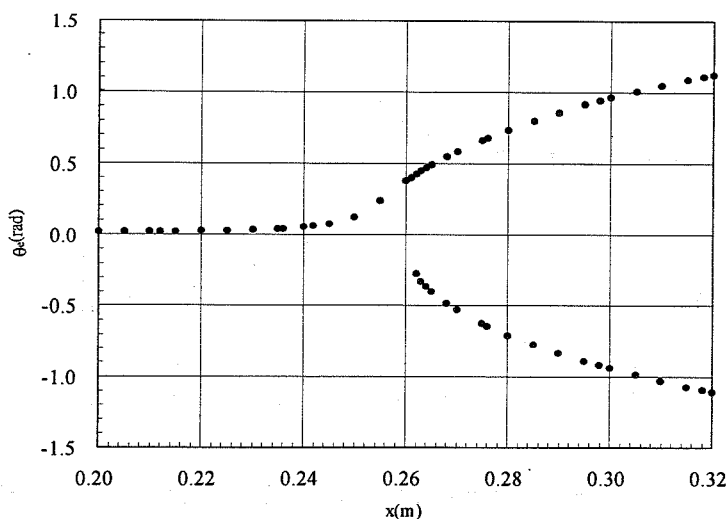


圖 4 當 $\theta_0 = 0.003\text{rad}$ 時，扭擺平衡位置的分叉現象，分叉點位在 $x_b = 0.261\text{m}$ 。

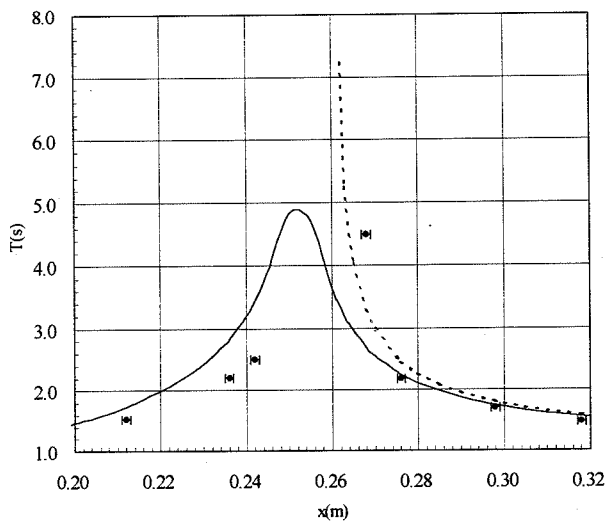


圖 5 當扭擺的轉軸在水平面上，且 $\theta_0 = 0.003\text{rad} \approx 0.17^\circ$ 時，扭擺振動週期 T 和螺桿位置坐標 x 之間的理論關係曲線。分叉點位在 $x_b = 0.261\text{m}$ ，實線代表平衡角度為正值時的週期曲線；虛線則代表平衡角度為負值的週期曲線。圖上亦標記有實驗數據點。對照圖 3 的曲線，可看出當

(3) $\theta_0 = 0.005\text{rad} \approx 0.29^\circ$

$\theta_e(x)$ 和 $T(x)$ 函數曲線分別如圖 6 和圖 7 所示：

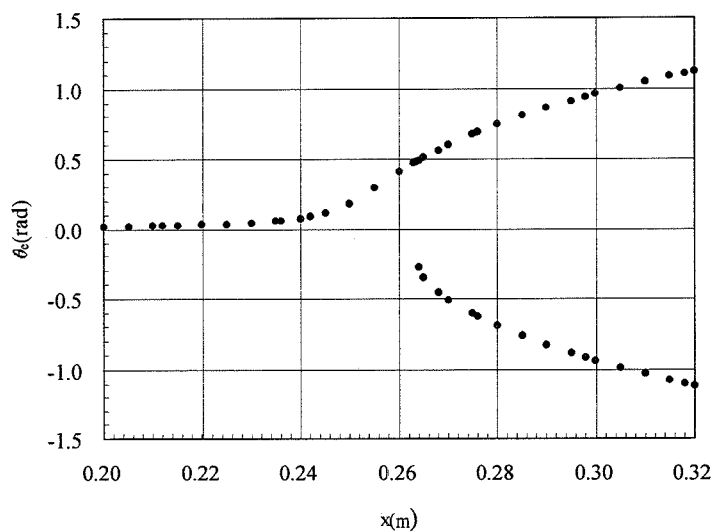


圖 6 當 $\theta_0 = 0.005\text{rad}$ 時，扭擺平衡位置的分叉現象，分叉點位在 $x_b = 0.263\text{m}$ 。

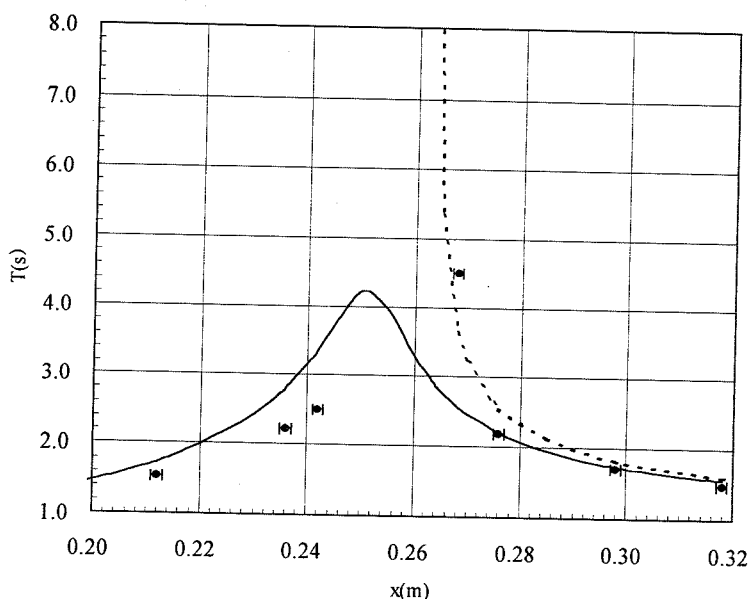


圖 7 當扭擺的轉軸在水平面上，且 $\theta_0 = 0.005 \text{ rad} \approx 0.29^\circ$ 時，扭擺振動週期 T 和螺桿位置坐標 x 之間的理論關係曲線。分叉點位在 $x_b = 0.263 \text{ m}$ ，實線代表平衡角度為正值時的週期曲線；虛線則代表平衡角度為負值的週期曲線。圖上亦標記有實驗數據點。和圖 5 的曲線相比，其中之一的曲線形狀較寬，峰值較為下降，但另一曲線則較陡。

(3) $\theta_0 = 0.1 \text{ rad} \approx 5.7^\circ$

$\theta_e(x)$ 和 $T(x)$ 函數曲線分別如圖 8 和圖 9 所示：

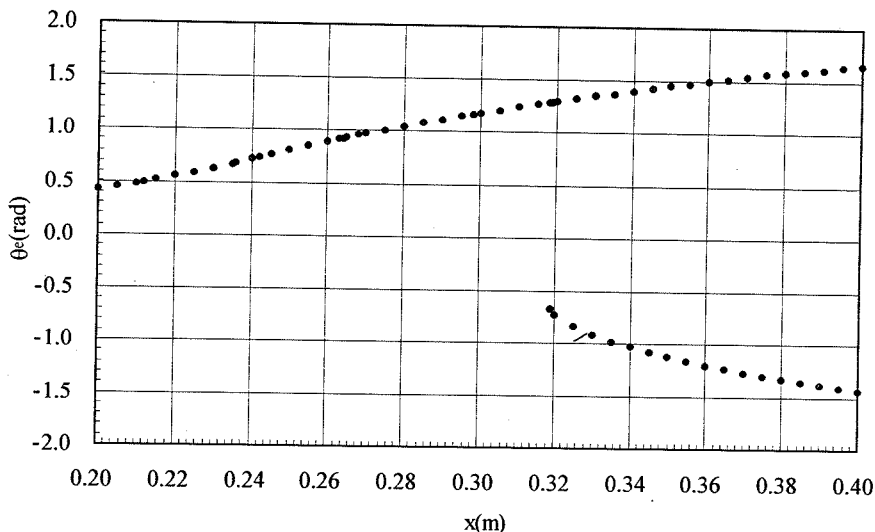


圖 8 當 $\theta_0 = 0.1 \text{ rad}$ 時，扭擺平衡位置的分叉現象，分叉點位在 $x_b = 0.319 \text{ m}$ 。

(下轉第 56 頁)