

「濃縮歷史」的數學課程 vs 建構主義教學

謝新傳
臺北市五常國民中學

數學史上，數學專家花了好幾千年的時間，把實數體系建築完成，然而，國中數學教科書(註一)卻已在第二冊發展到了根號數，這樣的教學是「建構」還是「灌輸」？

皮亞傑(Piaget)在 50 年代就提出了關於認知學習的建構主義的觀點，由於傳統教育的束綁，在那年代並沒有普遍受到數學教育界的重視，直到 80 年代之後，隨著認知心理學學者不斷的深入探討才受到普遍的支持。建構式教學法是革命性的教學理念，它把教學活動的重心由傳統的施教者身上移到受教者。建構式教學的內涵主要包含有三個：

- (一)學習的行為是學習者主動地一點一滴將認知的體系架構起來，而不是被動接受老師知識的灌輸。學習的過程(尤其是數學科)是一種心智的活動，心靈圖像的重畫，教與學並不是買賣商品，更不屬於速食文化。
- (二)認知的建構過程是建立在既有的知識和經驗的基礎上，並從多次經驗中求取共通性，並不只是對外在刺激作簡單的反應。如果學習只是簡單的刺激—反應，那麼學校的教學和馬戲團馴獸師訓練動物有何不同？
- (三)建構主義數學學習觀，就是要把新的認知「整合」到已有的知識中。而所謂「整合」就是將新舊之間的經驗、概念、認知作合理的、邏輯的連結。

在數學發展史上，有些概念在我們現在看起來都是理所當然的，可是在過去，因為觀念太過抽象而受到無理排斥的例子很多，比如說「負數」，有好幾百年，人類認為它是荒謬的，並稱它為「荒謬數」，為什麼呢？理由是人類直觀的認為數是用來數($\rho \times \vee$)東西的，怎麼會有負的？物體的長度、重量、體積有負的嗎？(順便一提：歷史上有一段很長時間，甚至於「0」也不被看成是一個數)，有很多「數學家」在計算時都儘量避免碰到負數，經過了好幾個世紀，它才「慢慢地」被「數學家」接受。

無理數也是如此，即使是古希臘偉大數學家畢達哥拉斯(B.C560~480)對於「不可公度量的數」的發現，也極力封殺，畢達哥拉斯甚至於對於其學派成員希伯斯(Hippasus, BC470)進行迫害，理由是他的發現動搖了畢氏的數學哲學—凡任意兩量都可公度。

國中的數學課程發展是起始於自然數，沒錯，數($\rho \times \setminus$)的開始是數($\rho \times \vee$)東西的，人有十根手指頭，數學採用十進位制，也很容易接受。問題是要國一的學生理解「負數」，有那麼容易嗎？

底下簡單敘述「負數」在歷史上的建構過程：依據《九章算術》(註二)記載，在解線性方程組時，常會碰到小的數減去大的數時候，當時爲了運算能繼續進行下去，就在數字上作記號，這就是負數的開始。在國外，印度數學家婆羅門笈多(Brahma Gupta)，(公元七世紀)對「負數」的解釋是負債或損失，而在歐洲一直到 16 世紀之前，數學家對於負數都還爭論不休。

我們現在來看國中一年級的數學教科書(註三)，它是如何說明負數的概念：它把負數解釋爲數線上原點左邊的點所代表的數。如果老師也和教科書一般說法，我認爲也只能說是在給學習者「灌輸」知識而已，爲什麼呢？因爲「負數」的存在性還沒感覺出來，「負數」最重要的概念是那個抽象的「存在」，爲什麼數線要有兩個方向？這等於是先預設負數的存在及負向的數線，我的意思是，這樣的學習不是建構教學。

「負數概念」的教學，我認爲應該是要從實體出發建構抽象的過程：財務有「負債」的時候，在帳簿裏要怎麼記？用顏色區分？還是用附加記號來區分？例如負債 70 元，可記爲[70]或〈70〉；教學者不必急於告訴學習者這就是「負數」，又例如零下 200 度，也可記爲#200 或*200；找出這些符號的共通性，然後類化到原有的舊經驗中(正數的性質)，這是建構的第一步。簡單的說，要建構「負數」概念，關鍵就在於能不能把「負數」看成如同正數一般自在。「負數」既然也能說是「數」，那麼它也一樣能作加減法運算。

「負數」的加減法運算或許容易在舊經驗中整合，但是乘法運算呢？

負數 \times 負數何以會等於正數？教科書(註四)是利用《水庫水位下降》的例子來說明：

某水庫的水位每日下降 5 公分，3 天前水位與現在相比了高 15 公分。

所以 $(-5)\times(-3)=+15$

我覺得教科書再次「灌輸」現成知識，爲什麼 (-5) 可以乘以 (-3) ？乘法在國小學生的認知裏只是被乘數的倍數關係，國中學生很難感覺出「負數可以乘以負數」的「合理性」，即使是數學專家也不容易拿它和正數作邏輯的結合。

在畢達哥拉斯之前，古希臘人不認爲會有一個數無法寫成兩個整數的比，可是畢達哥拉斯學派卻發現：『邊長爲一的正方形，可以證明其對角線的長無法寫成兩個整數的比』，無理數是如此的「真實」又如此的難以理解，兩個有理數之間有無限多個無理數，而兩個無理數之間也有無限多個有理數，這樣抽象的數字，國中學生能在這麼短時間之內建構「心靈圖象」嗎？

其次我們再看「根號數」的國中教學課程，教科書先是介紹近似值的概念，再說明：面積是 2 的正方形，其邊長爲 $\sqrt{2}$ ，這樣的課程發展程序基本上是沒錯，但是犯了兩個錯誤：

一、速度太快了，連畢達哥拉斯都會惱羞成怒。二、我敢保證，用功的學生上完課之後，他對根號數的認知就只是「正方形的邊長」。

教科書可以引導學習者建構數學概念，但是我們發現教學者往往是大大地縮短了歷史、縮短了形成概念的時間、空間和過程，尤其是像一些建構發展的終端產物如「負數」、「無理數」、「函數」等等，教學者常常先下定義(名詞)，大大的折損學習旅程的內化手續；往往老師一上課就說『今天我為各位同學講解「無理數」，無理數就是.....』，這樣的教學方式，打個比喻，就好像是對一個天生就失聰的人講說「鋼琴」的音色有多美妙，有一天醫學讓他的聽力恢復重生，他開始去接觸音樂，當他真的聽到鋼琴的聲音時，他可就不一定就知道那個樂器叫鋼琴。

註一：國立編譯館 87 年 1 月版 167 頁

註二：《九章算術》是中國東漢時期數學名著，共分九章詳細介紹數學理論。

註三：國立編譯館 86 年 8 月版

註四：國立編譯館 86 年 8 月版第 47 頁

世紀之約·從心出發——希望之鐘

編輯室

為了迎接公元二〇〇〇年的到來及展現「新世紀、新城市、新態度、新觀念」的願景，臺北市政府特於去年的十二月二十七日晚上七點起到今年一月三十一日止，在臺北市的仁愛路圓環（敦化南路及仁愛路間）裝設象徵希望、夢想的「希望公園」（見封底左上角照片）及「希望之鐘」（見封面照片）；另外，在臺北市的仁愛路（從逸仙路至復興南路段）也裝置成精彩璀璨的「燈海隧道」以及搭設代表新希望的兩個大型「世紀拱門」（仁愛路與復興南路口、仁愛路與逸仙路口），讓臺北人及全世界都能以「世紀之約·從心出發」的心情迎接千禧年，邁向新世紀。

臺北市政府新聞處強調，自去年十一月到今年年底一整年，市政府所舉辦「迎接千禧年，推動跨世紀」的系列活動，其活動的精神主軸，從『心』出發，是希望讓大家遠離過去的災難及傷痛。為此，特別把仁愛路圓環規劃為「希望公園」，以象徵臺北市的精神市標，並設計成充滿希望、夢想及未來的樂園。而在星光圍繞的希望公園內，矗立著一個高達廿四公尺、約八層樓高的「希望之鐘」，期望大家能以迎向光明及對未來充滿希望的心情一起迎接千禧年的到來。這座以「2」的形狀搭配金屬質材設計成具有流線感及未來感鐘座，鐘的形狀是傳統古典鐘的鐘形，整個鐘座以霓虹燈管勾勒出形狀，四周並以五彩燈光照射。市政府於去年十二月卅一日晚上七時至今年一月一日凌晨一時舉行「希望之鐘」燈光音響秀。

（資料來源：臺北市政府新聞處第二科）