中學生通訊解題第一期參考解答與評析

臺北市立建國高級中學　數學科

問題編號
88101

阿龍帶了一大群同學上山摘梨子。摘到 n 粒梨子($0 \le n \le 10$)的人數如下 表：

n (粒)	0	1	2	3	…	8	9	10
摘 n 粒人數	6	4	0	4	…	5	2	1

已知　(a)摘到 3 粒或多於 3 粒的同學，平均每人摘到 6 粒。

(b)摘到 7 粒或少於 7 粒的同學，平均每人摘到 4 粒。

問：所有上山摘梨子的同學有多少人？他們總計摘到多少粒梨子？

參考解答：

〈解法一〉

設上山摘梨子的同學有 x 人，他們總計摘到 y 粒梨子，

由已知條件(a)知

$$6 \cdot (x-6-4-0) = y-(6\times 0+1\times 4+2\times 0)$$

$$\Rightarrow 6x - y = 56 \cdots\cdots\cdots ①$$

由已知條件(b)知

$$4 \cdot (x-5-2-1) = y-(8\times 5+9\times 2+10\times 1)$$

$$\Rightarrow 4x - y = -36 \cdots\cdots\cdots ②$$

解①②得　$x=46$(人)，$y=220$(粒)。

〈解法二〉

設共有 x 位同學上山採梨子，

由(a)知：摘到 3 粒或多於 3 粒的同學有 $(x-10)$ 位，共摘到 $6(x-10)$ 粒梨子

由(b)知：摘到 7 粒或少於 7 粒的同學有 $(x-8)$ 位，共摘到 $4(x-8)$ 粒梨子

因爲梨子總數不變，所以

$$6(x-10)+(0\times 6+1\times 4+2\times 0)=4(x-8)+(8\times 5+9\times 2+10\times 1)$$

$$6x-60+4=4x-32+68$$

得 $x=46$　（人）　，梨子總數 $=6\times 46-60+4=220$　（個）

解題重點：

1.此題可設兩個未知數，利用二元一次聯立方程組求解。也可設一個未知 數，利用一元一次方程式求解。

2.一般而言，用二元一次聯立方程組求解，列方程式較容易，解題過程較繁雜。用一元一次方程式求解，列方程式較不易，解題過程較簡易。

評析：

1.本題屬於較爲簡單的代數題目，參答人數共有 234 人，有 203 人答對，答對率約爲 87 %。

2.有將近 30 位同學，假設摘到 4 粒、5 粒、6 粒、7 粒人數分別爲 x,y,z,u，利用四元一次聯立方程組求解。

3.解答簡潔清晰者，計有桃園縣平鎮國中莊子由，北市民生國中黃彥豪、陳官暉，中正國中林翊庭，螢橋國中丁奕理，麗山國中李永庭，北縣中正國中吳致寬、吳致宏，民生國中何志威，蘆洲國中許竣凱，海山國中柯俊賢，苗栗建台國中劉翊如、藺次凡，基隆銘傳國中吳誌恩等同學，其中莊子由同學一人採用三種不同解法都簡單扼要，實爲難得。

問題編號
88102

有一水果商，買進了一批橘子。當橘子分裝成 11 簍時，各簍的橘子數目正好是連續自然數。同樣，當橘子分別裝成 12 簍、13 簍時，各簍的橘子數目也都是連續自然數。問這一批橘子最少有多少個？

參考解答：

〈解法一〉設橘子數爲 x ，則 x 可以表示成

<i>11 個連續自然數的和，此時 x 爲第 6 項的 11 倍。

<ii> 12 個連續自然數的和，此時 x 爲(第 6 項＋第 7 項)的 6 倍。

<iii>13 個連續自然數的和，此時 x 爲第 7 項的 13 倍。

故 $x=(11\times 6\times 13)\cdot n$,n 爲正整數

取 n=1 時， x 有最小値 858，所以橘子最少有 858 個。

〈解法二〉設裝 11 簍時最少一簍裝 a 個，

裝 12 簍時最少一簍裝 b 個，

裝 13 簍時最少一簍裝 c 個

全部共有 x 個橘子

則 $x=a+(a+1)+\cdots\cdots+(a+10)$

$=b+(b+1)+\cdots\cdots+(b+11)$

$=c+(c+1)+\cdots\cdots+(c+12)$

$$x=\frac{11(a+a+10)}{2}=\frac{12(b+b+11)}{2}=\frac{13(c+c+12)}{2}$$

$$x=11(a+5)=6(2b+11)=13(c+6)$$

所以 x 為 11,6 和 13 的公倍數，　$x=11\times6\times13\times n$, n 為正整數

取 $n=1$ ，x 有最小值 858，所以橘子最少有 858 個。

解題重點：

1.說明橘子數是 11,6 和 13 的公倍數。

2.利用「公倍數是最小公倍數的倍數」得解。

評析：

1.本題答題人數共有 206 人，答對率約為 86%。

2.少數同學沒有考慮「最小解」。

3.答對同學中，計有嘉義市北興國中蔡盈盈，台中市五權國中廖翊傑，基隆銘傳國中吳誌恩，北縣中正國中吳致寬，永和國中周朕、蔡岳均，北市金華國中蔡怡娜，北投國中許凱迪，景美國中高汶宰，民生國中古君揚、許逸欣，中正國中楊若平、李中川，介壽國中簡民惠，敦化國中施皓瀚、林捷予，新民國中魏士傑等人解題扼要清晰，答題品質甚佳。其中廖翊傑同學現為國一學生，就有如此能力，實為難得。

問題編號 88103

某棟房子中，共有排成一直線的 7 個房間。每相鄰兩房間都有一個開關，可同時控制相鄰兩房間的燈。每一開關都只有兩個方向，改變開關方向會使這兩房間的燈，原先亮的變暗，原先暗的變亮。

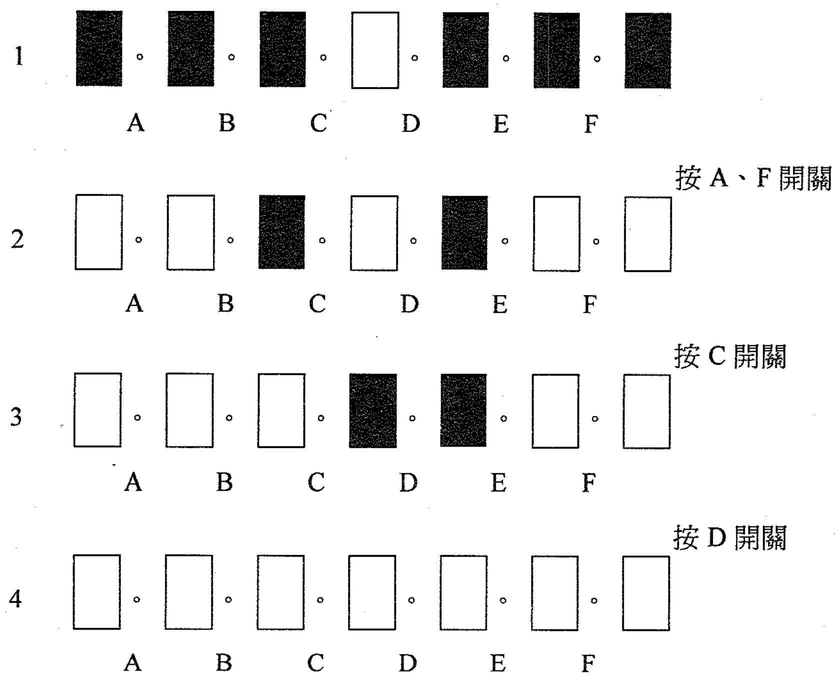
❶如果原先只有第 4 間（正中央）房間的燈是亮的，試問：如何操作這 6 個開關，使得這 7 個房間的燈全部變亮？

❷如果原先各房間的燈都是暗的，是否有方法操作這 6 個開關，讓全部房間的燈變亮，請說明你的理由？

參考解答：

(圖中的 □ 代表燈亮的房間，■ 代表燈不亮的房間，。代表控制相鄰兩房間燈的開關。)

❶



❷若原先每間房間都是暗的，則亮燈數是 0(為偶數)。

每按一次開關，左右兩邊相鄰房間，亮燈情況有下列四種情況的轉變，

即(亮，亮)⇒(暗，暗)　　(亮，暗) ⇒(暗，亮)

(暗，暗) ⇒(亮，亮)　　(暗，亮) ⇒(亮，暗)

亦即每按下一個開關，只改變兩個房間的亮燈情形。

如此一來，亮燈房間的奇偶數仍維持不變，即，若原有奇數個房間亮燈，

則在按下一個開關後，仍維持奇數個房間亮燈；如原有偶數個房間亮燈，

則在按下一個開關後，仍維持偶數個房間亮燈。

因此，因為原亮燈數 0 為偶數，故永遠不可能將亮燈數變為 7(奇數)之情形。

解題重點：

1.第 1 小題，操作開關將亮的房間向左或向右移，使得連續暗的房間數均為偶數，即可辦到。

2.第 2 小題的解題想法大致有兩個方向：

(a)第一個是考慮開關打開前後，房間亮（或暗）的奇偶數不變，能將 7 個全暗的房間全變成亮的。

(b)第二個方向是考慮房間由暗到亮改變亮暗的次數必為奇數，故 7 個房間亮暗改變的

總數必為奇數，另一方面，每次開關操作前後改變房間亮暗數是偶數，故不能辦到。

評析：

1.本題是希望學生透過第 1 小題實際的操作能導出操作開關對於房間亮暗數奇偶性的影響，而得知能將房間由全暗變成全亮的規律。186 位徵答的學生中，幾乎都能經由實際操作回答第 1 小題，答對率是 98%，能得知可將房間由全暗變成全亮的規律，並完整回答第 2 小題者有 70 位，答對率是 38%。有許多徵答者，都回答了 7 個全暗的房間不能變成全亮，但或許是平常甚少有將想法寫出來的機會，因此不能將自己的想法充分表達出來。

2.優良的徵答中，採用開關打開前後，房間亮（或暗）的奇偶數不變的有：敦化國中黃彥鈞、林倢予、林信淳，銘傳國中吳柏緯、袁育凱，介壽國中簡民惠，高師大附中何思賢，台師大附中呂康豪，永吉國中黃郘倫，明德國中王琨傑，薇閣中學歐陽奕，花蓮女中黃籃萱，板橋高中何宸志，建國中學陳宗毅等 14 位同學；採用考慮房間亮暗改變總數的有：北興國中蔡盈盈，金華國中羅謀聖等 2 位同學；另外螢橋國中陳玉潔，中正國中羅卓吾 2 位同學則是採用反證法。

問題編號
88104

一個有蓋子的長方體木盒，其內部的底面是邊長 40 公分的正方形，深 35 公分。試問：這個木盒是否能裝入 5 個「直徑都是 20 公分」的木球，並且蓋子能完全蓋好？請說明你的理由。

參考解答：

分析：底面放進四個木球，並在底面四球上方再放一個球，放置的位置必須使得所有相鄰的球皆兩兩外切，如圖 1 所示。五球疊好後計算它們的總高度是否超出 35 公分即可。

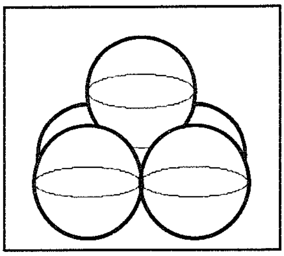


圖 1

參考解答：

底面放進四個木球，並在底面四球上方再放一個球，使得所有相鄰的球皆兩兩外切，如圖 1，所示。五球疊好後，計算它們的高度。疊好後的五個球的球心正好是正四角錐（金字塔）的五個頂點，如圖 2 所示。

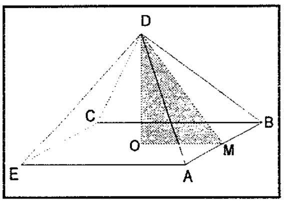


圖 2

在圖 2 中，M 為 $\overline{AB}$ 中點，O 是正四角錐底部正方形的中心，ΔABD 為邊長 20 公分之正三角形。

由畢氏定理，得

$$\overline{DM}=10\sqrt{3}\text{ (公分)},$$
$$\overline{OD}=\sqrt{\overline{MD}^2-\overline{OM}^2}=\sqrt{300-10^2}=10\sqrt{2}$$

故五個球疊好後的高度為

$$10+10\sqrt{2}+10\approx 34.14\text{ 公分}<35\text{ 公分}$$

所以，此木盒可以裝進五個「直徑 20 公分」的木球。

解題重點：

1 先算出「以五個球心為頂點」之正四角錐的高度 $h=10\sqrt{2}$。

2.正四角錐的高度 h，加上"頂球"的半徑及"底球"的半徑，就是五個球疊好後的總高度 $20+10\sqrt{2}<35$（木盒的深度）。

3 畢氏定理的應用：直角三角形中，斜邊的平方等於兩條直角邊的平方和。

4.能估算 $\sqrt{2}$ 約等於 1.414……。

評析：

1.本題旨在評量學生的「空間想像能力」，以及是否能活用「商高定理」去解決問題。

2.本題答對者有 84 人，其中有不少學生圖示清晰，說理簡明。如：竹市光華國中國一賴俊儒；永和國中國一許銘麟、鄭宇翔；福和國中國一李駿廷；民生國中國一黃彥豪；永吉國中國一黃紹倫；台北師大附中國一莫立平；敦化國中國二邱奕峰；基市銘傳國中國一李曼鈺、國三李穎楨；永和國中國三學生周朕，用座標幾何解答，別具心思。

3.本題答對率約 56%。

4.亦有部份學生"誤解"如下：如圖 2，

$$\overline{DM}=\sqrt{\overline{AD}^2-\overline{AM}^2}=\sqrt{20^2-10^2}=10\sqrt{3}$$

故五個球之高度為

$$10+10\sqrt{3}+10=20+10\sqrt{3}=20+17.32....=37.32....>35$$

所以木盒裝不進五個木球。

問題編號
88105

有互相垂直的兩組平行線，每組各有 12 條，我們把這兩組平行線的 144 個交點中的每一點都染成紅、黃、綠三色之一。試證明：可以找到一個矩形，它的頂點是 144 個交點中

同色 4 點，並且它的邊都在這兩組平行線上。

（解答這條題目要用到一個淺顯的原理：把 12 隻鴿子放入 5 個籠子裏，必有一個籠子至少有 3 隻鴿子。）

參考解答：

在開始說明之前，我們不妨先假設有兩組平行直線：一組為水平直線；另一組為垂直直線。我們稱水平直線為列;垂直直線為行。

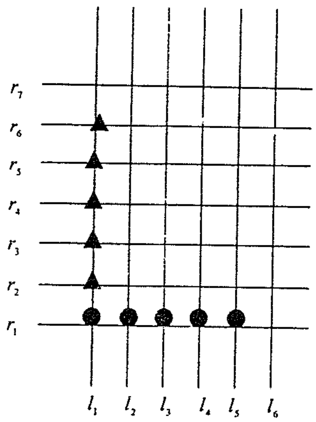
(1)因每一列、每一行上都恰有 12 個點，而共有 3 種顏色，所以每一列、每一行上的 12 個點染色情形可分成兩種可能：

①每一列及每一行上都恰有紅、黃、綠點各 4 點;

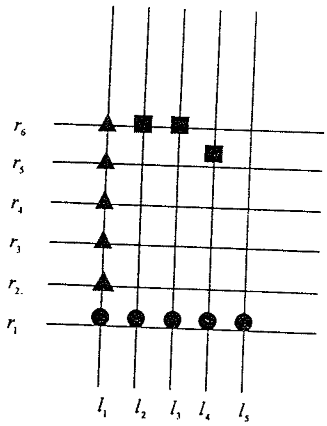
②存在一列或一行，其上有5個或5個以上同色點。

(2)先考慮①的情形。這時，不妨設第1列上的4個紅點落在第 l_1、l_2、l_3、l_4 行的位置上。則在第 l_1、l_2、l_3、l_4 行上都恰剩下 3 個紅點，而且它們落在第2列至第12列之間，於是共有12個紅點落在這 11 列之上。所以至少有2個紅點落在同一列上。不妨設它們落在第 r_k 列上且在第 l_1、l_2 行上，於是在第1列且在第 l_1、l_2 行上的兩個紅點與在第 r_k 列上且在第 l_1、l_2 行上的2個紅點便是滿足要求的 4 點。

(3)考慮②的情形。不妨設第 r_1 列上有 5 個紅點，且他們分別在第 l_1、l_2、l_3、l_4、l_5 行上。若 r_1 上的紅點數超過 5，我們只需取其中 5 個紅點討論即可。假設結論不成立。於是像情況①中那樣可證得 l_1、l_2、l_3、l_4、l_5 上，除了第 r_1 列上的 5 個紅點外，至多還有 11 個紅點。因而其中的黃點與綠點至少有 $5\times12-(5+11)=44$ 個。不妨假設黃點數不少於 22 個，因此 l_1 到 l_5 的 5 條鉛直線中必有一直線，其中至少有 5 個黃點，不妨設其中 5 個黃點是 l_1 與 r_2、r_3、r_4、r_5、r_6 五列的交點。



圖(一)



圖(二)

考慮上圖(一)中介於 r_1 與 r_7 之間且介於 l_1 與 l_6 之間的交點（共 $4\times5=20$ 個），由反證假設知其中至多有 5 個紅點、4 個黃點，所以至少有 $20-(5+4)=11$ 個綠點，從而 r_2 、 r_3 、 r_4 、 r_5 、 r_6 五條線中必有一條線中其上至少有 3 個綠點。不妨設 r_6 上有 3 個綠點，且他們分別在 l_2 、 l_3 、 l_4 上。

考慮圖(二)中介於 r_1 與 r_6 之間且介於 l_1 與 l_5 之間的交點（共 $3\times4=12$ 個），由反證假設知其中至多有 4 個紅點、3 個黃點、4 個綠點，所以最多可得 $4+3+4=11$ 個點，此與這區域裡共有 12 個點矛盾。故結論錯誤的假設不成立，也就是必定存在一個四頂點同色之矩形。

解題重點：

由鴿籠原理知，在 144 個交點中，塗上 3 色必至少有同色點 48 個，且在同列（或同行）的 12 個點中塗上 3 色也必有同色點至少 4 個，再針對下列情況作討論：

(1)考慮每一列與每一行同色點皆為 4 個的情況。

(2)考慮同一列（或行）的同色點個數大於四個的情況。

評析：

1.本題參與徵答人數計有 42 位，答對人數 1 位，答對率為 2.4%

2.本題有提示鴿籠原理，但大部分同學掌握不住〝要點〞討論。其中能由此原理知，所有交點中同色點至少 48 個的同學有 16 位，知一列 12 個交點中同色點至少 4 個的有 23 位；而能證明出上述情況（1）的人數只有 11 位。

3.有些徵答者的證明表達不清楚，或稍嫌雜亂，若能多配合圖形討論，就可更有條理的解說清楚。

4.本題答題品質較佳者有台北市永吉國中一年 17 班黃紹倫同學。