

1999 年第 30 屆國際物理奧林匹亞競賽

理論競賽試題

林明瑞* 齊正中** 余健治* 蔡尚芳*** 陳永芳***

*國立臺灣師範大學 物理系

**國立清華大學 物理系

***國立臺灣大學 物理系

1999 年 7 月 22 日

請先讀下文：

1. 本理論題共三題，考試時間五小時。
2. 只能用所提供的筆書寫。
3. 只能在答題紙的正面作答。
4. 除了在試題本文中，每一題含有其特定的數據之外，另有一頁列有一些一般性的物理常數，在解題時可能需要用到。
5. 每一大題開始作答時，必須另起新頁。
6. 除了在「空白頁」(blank sheet)上你可以自由書寫外，每一題都有一張「答案紙」，你必須將該題的結果摘要寫在上面。數值結果必須取用最多且適當的有效數字位數；不要忘了單位。
7. 請在「空白頁」(blank sheet)上寫出任何你認為是答案的重要構成部分，希望被評閱以爭取得分。無論如何，你必須多多使用方程式、數字、符號、圖形、數據圖。盡可能少用文字說明。
8. 你絕對必須在每一張你用過的紙的上方，"NAME"欄寫上你的姓名、"TEAM"欄寫上你的國名、"CODE"欄寫上你的學生編號(你的識別證上的編號)。另外，在「空白頁」(blank sheet)紙上，在"Problem"欄寫上問題號碼，"Page n."欄寫上頁碼(從 1 至 N，"第 n 頁")，在"Page total"欄寫上總頁數 N。回答每一小題時，在起始處寫上該小題的編號。在你不希望被評分的答案紙上，畫上一個大「X」符號，且不要編頁碼。
9. 當你作答完畢時，按下列次序繳交所有的作答紙：答案紙居先，然後是用過的紙，未使用的紙、最後是試題卷。將這些紙全部裝入封袋內，並將所有的東西留在桌子上。任何東西不准拿出室外。

物理常數和一般數據

除了在哪一個單獨問題中所給予的數據外，下表所列的一般性的數據和物理常數也可能有用。這些是現在可能得到的最精確數據，所以它們有相當多的有效數字位數。無論如何，你必須在答案中，寫出每個問題最合適而足夠的有效數字位數。

真空中的光速： $c = 299792458 \text{ m}\cdot\text{s}^{-1}$

真空的磁導率： $\mu_0 = 4\pi\cdot 10^{-7} \text{ H}\cdot\text{m}^{-1}$

真空的介電常數： $\epsilon_0 = 8.8541878 \text{ pF}\cdot\text{m}^{-1}$

萬有引力常數： $G = 6.67259\cdot 10^{-11} \text{ m}^3/(\text{kg}\cdot\text{s}^2)$

氣體常數： $R = 8.314510 \text{ J}/(\text{mol}\cdot\text{K})$

波茲曼常數： $\kappa = 1.380658\cdot 10^{-23} \text{ J}\cdot\text{K}^{-1}$

史特凡常數： $\sigma = 56.703 \text{ nW}/(\text{m}^2\cdot\text{K}^4)$

質子電荷： $e = 1.60217733\cdot 10^{-19} \text{ C}$

電子質量： $m_e = 9.1093897\cdot 10^{-31} \text{ kg}$

卜朗克常數： $h = 6.6260755\cdot 10^{-34} \text{ J}\cdot\text{s}$

攝氏溫標基準值： $T_K = 273.15 \text{ K}$

太陽質量： $M_S = 1.991\cdot 10^{30} \text{ kg}$

地球質量： $M_E = 5.979\cdot 10^{24} \text{ kg}$

地球平均半徑： $r_E = 6.373 \text{ Mm}$

地球軌道半長軸： $R_E = 1.4957\cdot 10^{11} \text{ m}$

恆星日： $d_S = 86.16406 \text{ ks}$

年： $y = 31.558150 \text{ Ms}$

地表重力場標準值： $g = 9.80665 \text{ m}\cdot\text{s}^{-2}$

海平面大氣壓力標準值： $p_0 = 101325 \text{ Pa}$

在標準大氣壓和 15°C 下，空氣對可見光的折射率： $n_{\text{air}} = 1.000277$

太陽輻射常數： $S = 1355 \text{ W}\cdot\text{m}^{-2}$

木星質量： $M = 1.901\cdot 10^{27} \text{ kg}$

木星赤道半徑： $R_B = 69.8 \text{ Mm}$

木星軌道平均半徑： $R = 7.783\cdot 10^{11} \text{ m}$

木星日： $d_J = 35.6 \text{ ks}$

木星年： $y_J = 374.32 \text{ Ms}$

圓週率 π : 3.14159265

理論第一題：氣體分子對電磁輻射的吸收

一個主軸鉛直向上的圓柱容器，內含處於熱平衡狀態的分子氣體，圓柱體的上部以玻璃製成的圓板封住，但能上下自由移動。假設該圓柱容器不會漏氣，且玻璃板與圓柱器壁間的摩擦剛好足以阻滯振盪，但是相對於其它所涉及的能量而言，它又小到不致於造成任何有意義的能量損失。起始時圓柱內氣體的溫度和周圍環境的溫度相等。在良好的近似情況下，氣體可視為理想氣體。假設圓柱體器壁（包括上底和下底）的熱導率和熱容量皆很小，因此氣體和周圍環境之間的熱量交換非常緩慢，在解題時可以忽略。

經由玻璃板，我們將一具有穩定功率的雷射光射入圓柱容器內。這個電磁輻射能很容易地穿過空氣和玻璃，而被容器內的氣體所完全吸收。藉由吸收輻射能，氣體分子被提升到激發態，之後經由迅速放射出紅外線，而逐級躍遷回到基態。然而這些紅外線會再被其它氣體分子吸收，也會被容器器壁和玻璃板所反射。因此從雷射光所吸收的能量將在很短的時間內轉換成熱運動（分子擾動）的能量，而且留存在氣體內一段足夠長的時間。

經用雷射照射此圓筒一段時間後，關掉雷射光，我們觀測到玻璃板往上移動，並測量此位移。

1. 利用下列的數據，以及另一頁所提供的物理常數，計算照射後氣體的壓力和溫度。(2 分)
2. 計算因吸收輻射能後，氣體所作的功。(1 分)
3. 計算照射過程中，總共被吸收的輻射能。(2 分)
4. 計算被氣體所吸收的雷射光功率，以及所對應每單位時間的光子數目。(1.5 分)
5. 計算在這個過程中，光能轉換成玻璃板的力學位能的效率。(1 分)

在此之後，將圓柱軸很慢地旋轉 90° ，使之轉成水平方向，氣體與容器之間的熱交換仍然可以被忽略不計。

6. 由於這個旋轉過程，氣體的壓力和溫度是否會改變？如果會改變，那麼在旋轉後的壓力和溫度各為何？(2.5 分)

數據

室內壓力： $p_0 = 101.3 \text{ kPa}$

室溫： $T_0 = 20.0^\circ\text{C}$

圓柱體的內直徑： $2r = 100\text{mm}$

玻璃板的質量： $m = 800\text{g}$

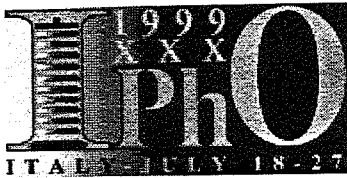
容器內的氣體含量： $n = 0.100\text{mol}$

氣體的定容莫耳熱容： $c_v = 20.8\text{ J}/(\text{mol}\cdot\text{K})$

雷射光波長： $\lambda = 514\text{ nm}$

照射時間： $\Delta t = 10.0\text{ s}$

照射後玻璃板的位移： $\Delta s = 30.0\text{mm}$



NAME _____
 TEAM _____
 CODE _____

Problem	1
Page n.	A
Page total	

答案卷

在本題中，你應先寫出數學解析式，然後再寫出數值結果及單位(例如 $A=bc=1.23\text{ m}^2$)。

1. 照射後氣體的壓力..... °
 照射後氣體的溫渡..... °
2. 氣體所作的功..... °
3. 總共被氣體所吸收的光能..... °
4. 被氣體所收吸收的雷射光功率..... °
 光子吸收率(每單位時間被吸收的光子數目)..... °
5. 玻璃板將光能轉換為力學位能的效率..... °
6. 由於圓柱的旋轉，氣體溫度是否改變？ 是 否
 若答「是」，則新的溫度為何？..... °
 由於圓柱的旋轉，氣體壓力是否改變？ 是 否
 若答「是」，則新的壓力為何？..... °

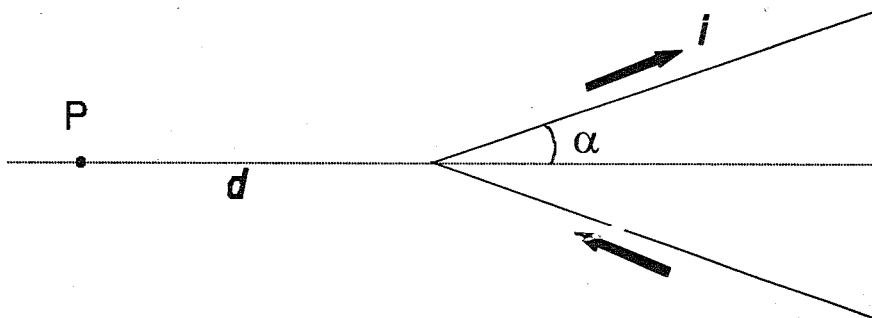
理論第二題：V形導的磁場

安培對磁現象的解釋，其最初被認為成功的例子之一，就是他計算出載流導線所產生的磁場 \vec{B} 。他的結果與必歐-沙伐稍早對 \vec{B} 所作的假設不同。

一個蠻有趣的例子，就是一條長度很長的細導線，載有穩定電流 i ，但被折成有兩個直線部分的 V 字形，其半角為 α (註一)，如下圖所示。根據安培的計算，若 P 點在 V 的軸線上，

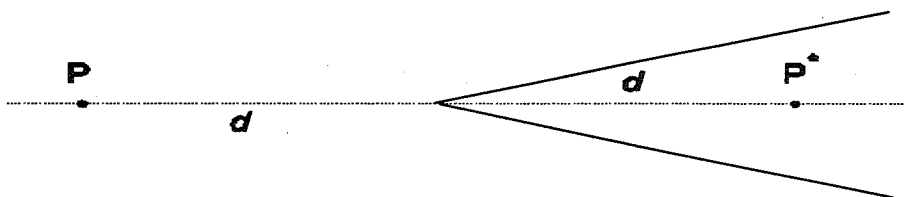
但在 V 的外面，和 V 的頂點之間的距離為 d ，則此 V 字形載流導線在 P 點所產生的磁場，其大小與 $\tan\left(\frac{\alpha}{2}\right)$ 成正比。

安培的結果後來被包括在馬克士威的電磁理論中，被普遍接受。



利用我們現在的電磁學知識：

1. 試求在 P 點的磁場 \vec{B} 的方向。(1 分)
2. 已知這磁場與 $\tan\left(\frac{\alpha}{2}\right)$ 成正比，即 $|\vec{B}(P)| = k \tan\left(\frac{\alpha}{2}\right)$ ，試求出比例常數 k 。(1.5 分)
3. 如下圖所示，就 V 之頂點而言， P 為 P^* 的對稱點，亦即 P 也在 V 的軸線上，且和 V 的頂點之間的距離亦為 d ，但在 V 的內部，試求在 P 的磁場 \vec{B} 。(2 分)



【註一】：本題之 α 以弧度為單位。

4. 為了測量磁場，我們在 P 點放置一很小的磁針。若此磁針的轉動慣量為 I ，磁偶極矩為 μ ，且此磁針在一包含磁場 \vec{B} 方向的平面內繞一固定點振盪，試求此磁針的振盪週期和磁場 B 間的函數關係。(2.5 分)

在相同的條件下，必歐和沙伐卻認為在 P 點的磁場(以現代的符號表示時為 $B(P) = \frac{i\mu_0\alpha}{\pi^2 d}$ ，

式中 μ_0 為真空的磁導率。事實上，他們嘗試就這兩種關於磁場的公式(安培的與必歐和沙伐的)，用一個實驗來加以判定，此實驗所測量的是小磁針的振盪週期隨 V 形導線的半張

角變化的函數。但對一些 α 值而言，兩種磁場公式間的差異太小，而很難將之量測出來。

5. 如果想要藉由實驗，以分辨出這兩種關於磁針在 P 點振盪週期 T 的理論預測，我們需要至少 10% 的差異，即 $T_1 > 1.10 T_2$ (T_1 是安培的預測，而 T_2 則為必歐和沙伐的預測)。試指出我們所選有關 V 的半張角 α 必須在什麼範圍內，才足以分辨這兩種不同的理論預測。(3 分)

提示：

看你用什麼方式解題，下列的三角函數關係式可能會有些用處：

$$\tan\left(\frac{\alpha}{2}\right) = \frac{\sin \alpha}{1 + \cos \alpha}$$

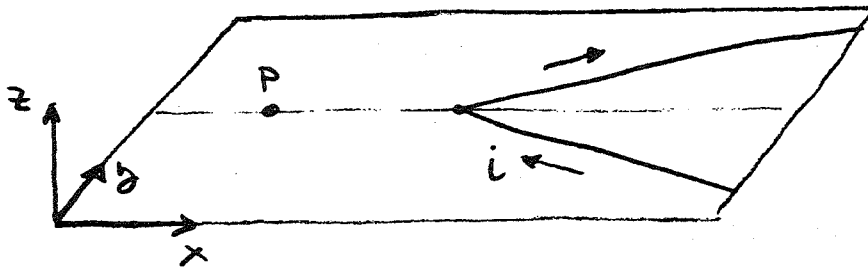


Problem	2
Page n.	A
Page total	

答案卷

在本題中，除了明確指須給出數值者外，必須以解析式子表示，而非以數值與單位作答。

1. 利用下列的簡圖，標出磁場 \vec{B} 的方向(向量的長度不重要)。這簡圖是以立體透視的觀點畫出。



- 比例常數 k 為
- 在 P* 點 (如題文所述) 的磁場強度的絕對值為.....，並在上面簡圖中，畫出此點的磁場 \vec{B} 的方向。
- 磁針作小角度振盪的週期為.....。
- 寫出 α 值須在什麼範圍內(此處必須用數值表示出所給範圍的上、下限)，才能使安培與必歐—沙伐所預測的振盪週期比值大於 1.10.....。

理論第三題：航向木星的太空探測器

在本題中我們考慮一種常用的方法，使太空探測器得以加速飛往預定的方向。當太空探測器從行星旁邊飛過時，可從行星的公轉運動中取得少量的能量，使其飛行速率有效地增加，且可相當幅度地改變其航向。我們將在本題中分析太空探測器從木星旁邊飛過時的效應。

木星沿著橢圓軌道繞太陽公轉，但此軌道可近似為平均半徑為 R 的圓；為了進行分析本題的物理狀況，首先我們必須：

1. 求出木星環繞太陽的速率 V 。(1.5 分)
2. 當此探測器位於太陽和木星之間，且三者成一直線時，求太空探測器到木星中心的距離為何值時，可使太陽對它的萬有引力恰為木星的萬有引力所平衡。(1 分)

一質量為 $m = 825 \text{ kg}$ 的太空探測器從木星旁飛過。為了簡單起見，假設此探測器的軌道是完全位在木星的軌道面上，這樣可使我們不須考慮太空探測器脫出木星軌道面的情況。

我們只考慮在木星的吸引力遠大於其他引力的區域內所發生的現象。

在以太陽的質心為原點的參考坐標系中，太空探測器的初速率為 $v_0 = 1.00 \times 10^4 \text{ m/s}$ (沿 y 軸的正方向)，此時木星的速度是沿 x 軸的負方向(見圖 1)；此處所謂的“初速率”係指當太空探測器仍然遠離木星時的速率，但是在它所在的區域內，太陽對它的引力對比木星的引力已經小到可以忽略。我們假設太空探測器和木星相遇的時間相當短，因此在這段時間內木星繞太陽運行的速度，其方向的變化可以忽略。我們也假設太空探測器從木星的後方飛越而過，亦即當 y 坐標相同時，探測器的 x 坐標大於木星的 x 坐標。

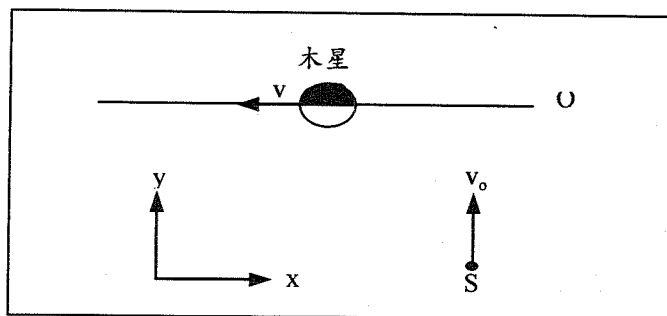


圖 1 從太陽的質心坐標系來觀察木星和太空探測器的運動。O 代表木星的軌跡，S 代表太空探測器的軌跡。

3. 當太空探測器仍然遠離木星時，從木星的參考坐標系來觀察，求探測器的運動方向(以其

速度和正 x 軸之間的夾角 ϕ 表示之)和它的速率 v' 。(2 分)

4. 在木星的參考坐標系中，求太空探測器的總力學能。按一般的習慣，令在很遠距離處的位能值為零。在本題中當探測器距木星夠遠時，因為所有的萬有引力均很小，所以它幾乎以等速度飛行。(1 分)

在木星的參考坐標系中，太空探測器的軌跡是一雙曲線，其極坐標方程式可表為

$$\frac{1}{r} = \frac{GM}{v'^2 b^2} \left(1 + \sqrt{1 + \frac{2Ev'^2 b^2}{G^2 M^2 m}} \cos \theta \right) \quad (1)$$

式中 b 是雙曲線的一條漸近線和木星中心之間的垂直距離(即所謂的碰撞參數)、 E 為此探測器在木星參考坐標系中的總力學能， G 為萬有引力常數， M 為木星的質量， r 和 θ 為極坐標(即徑向距離和極角)。

圖 2 顯示方程式(1)所定出雙曲線的兩股，兩條漸近線和極坐標也都標明在圖中。注意方程式(1)的坐標原點位在雙曲線的”吸引焦點”。太空探測器的軌道是”吸引軌道”(即圖中的粗實線軌跡)。

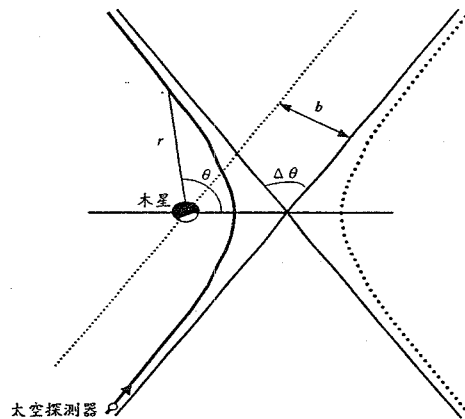


圖 2

5. 利用方程式(1)所定出的太空探測器軌道，求在木星參考坐標系中此探測器的總偏向角 $\Delta\theta$ (如圖 2 所示)，並以初速率 v' 和碰撞參數 b 的函數關係表示之。(2 分)
6. 假設當探測器從木星旁飛過時，它到木星中心的距離，不能小於 3 倍的木星半徑，求碰撞參數的可能最小值，以及總偏向角的可能最大值。(1 分)
7. 在太陽的參考坐標系中，只以木星的速率 V ，探測器的初速率 v_0 ，和總偏向角 $\Delta\theta$ 為參數，寫出一方程式來表示此探測器的最後速率 v'' 。(1 分)
8. 利用前小題的結果，當總偏向角是其可能的最大值時，計算太空探測器在太陽坐標系中最

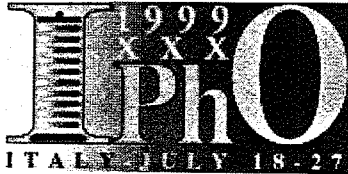
後速率 v'' 的數值。(0.5 分)

提示

看你用什麼方式解題，下列的三角公式也許有用：

$$\sin(\alpha + \beta) = \sin \alpha \cos \beta + \cos \alpha \sin \beta$$

$$\cos(\alpha + \beta) = \cos \alpha \cos \beta - \sin \alpha \sin \beta$$



NAME _____

TEAM _____

CODE _____

Problem	3
Page n.	A
Page total	

答案卷

除非明確註明者外，你應先寫出數學解析式，然後再寫出數值結果及單位(例如 $A=bc=1.23 \text{ m}^2$)。

- 木星在軌道上的運轉速率 V 為.....。
- 當兩個萬有引力互相平衡時，探測器到木星中心的距離為
.....。
- 在木星坐標系中，此探測器的初速率 v' 為.....，
其速度方向和 x 軸(見圖 1)的正方向之間的夾角 φ 為.....。
- 太空探測器在木星參考坐標系中的總力學能 E 為.....。
- 寫出一公式用於表明在木星參考坐標系中，此探測器的總偏向角度 $\Delta\theta$ ，和碰撞參數 b 、
初速率 v' 、以及其他已知或已計算過的物理量之間的關係
.....。
- 當探測器至木星中心的距離不能小於 3 倍的木星半徑時，寫出碰撞參數的可能的最小值：
 $b = \dots\dots\dots$ ；以及總偏向角 $\Delta\theta$ 的可能的最大值：
 $\Delta\theta = \dots\dots\dots$ 。
- 在太陽參考坐標系中，將此探測器的最終速率 v'' 以 V 、 v_0 ，和 $\Delta\theta$ 的函數表示.....。
- 當總偏向角 $\Delta\theta$ 是第 6 小題中的可能的最大值時，探測器在太陽坐標系中的最終速率之數
值為.....。