數學解題教學的新嘗試—合作解題

葉明達* 柳　賢**

*高雄市立新莊高中

**國立高雄師範大學

摘　要

數學解題是近來數學教育的重點之一，因應教育部所提出學生十大基本能力中對「表達、溝通與分享，尊重、關懷與團隊合作、獨立思考與解決問題」能力的要求，合作解題實爲一可行方案。因此本文旨在從認知發展論闡明合作解題的教育意義，以及合作情境對數學解題的影響。

關鍵字：獨立思考；認知發展；解決問題。

壹、前言

近年來，「解決問題」受到數學教育學者特別的關注，美國數學教師協會（NCTM）在1989 年所出版的「中小學數學課程及評量標準」中，數學解題即爲其中的一項，同年在改進學校數學教育的八項建議中，第一項即爲：「解題活動應視爲學校數學教育的主要課題」，而教育部（民 87）所發布的「國民教育階段九年一貫課程總綱綱要」亦將「獨立思考與解決問題」列爲十大基本能力之一，解題在數學教育的重要性可見一斑。

近來教學模式似乎有從教師導向教學轉向小組合作教學的趨勢，於是便有許多學者建議或嘗試以小組合作來進行解題教學（劉錫麒，民 79；張靜嚳，民 84）。綜觀學者們對小組合作學習的看法：學生能夠在互動過程中澄清彼此的想法，將知識做有系統的組織，分享彼此的發現，以討論的方式來解決困難。Qin, Johnson, & Johnson（1995）亦藉由後設分析（meta analysis）證實合作學習比個別競爭學習在解題教學上更具成效。

建構論認爲學習必須由個體主動去建構，所以最佳的學習方式就是動手去做（learning by doing），亦即讓學生透過數學解題來學習數學，因爲這不僅讓學生真正處在主動學習的地位，也可經由探索，對數學賦予意義（make sense）。再者，數學解題顯然有助於同學間的合作與互動，由認知活動的社會性來看，這也是成功學習的必要條件（鄭毓信，民 87）。基於上述原因，本文旨在探討以合作學習的方式進行數學解題教學的可行性及相關研究對數學解題教學的啓示。

貳、數學解題理論

爲了對數學解題理論有較完整的認識，以下從解題的意義與數學解題歷程兩部分加以探討。

一、解題的意義

Lester（1980）認爲解題是指面臨一種情境，沒有一種保證可以解決的算則，個人必須運用所有可獲得的資源去完成解答。Kilpatrick（1985）認爲解題是一種情境，個人在此情境下，想要達成某一目標，但直接通往此目標的路已經被阻塞，在尋求答案的過程中，需要用到一些數學概念、原理與方法等。綜合以上學者的論點可知，數學解題就是指解題者在面對數學問題時，沒有立即可資利用的算則或方法，必須融會原有的知識與數學概念，並靈活運用策略與方法以求得解答的歷程。

二、數學解題歷程

依關注焦點的不同，主要分爲以下三類：

(一)以策略、解題階段爲研究重點的數學解題歷程

Polya（1945）是第一位將解題歷程以系統化階段加以區隔的學者，Polya 在其所著的「怎樣解題」（How to solve it）中提出四階段解題歷程：1.了解問題；2.擬定計畫；3.執行計畫；4.回顧解答。並在每階段中提出對應的解題策略，稱之爲「啓發式教學法」，而後續的研究者在發展新的解題歷程模式時，多以此四階段爲主軸，加以修訂而成。

(二)以後設認知爲研究重點的數學解題歷程模式

Polya 強調解題策略的教與學，期望藉此增進學生的解題能力，並在書中以許多實例爲啓發式教學法在解題教學上的成效佐證，於是便有許多以此架構爲基礎的教學實驗研究。但Kilpatrick（1985）指出要成功解出一道數學題，解題者必須具備三種要素：

1.與此題相關、豐富而系統化的數學知識。

2.能夠呈現並轉換此問題的過程。

3.能引導解題活動並挑選出有用知識與技能的控制系統。

學生在 Polya 的架構下學習許多解題策略，在前兩部分確實有所增進。然而，教給學生許多解題策略，就如同給了學生許多把鑰匙，一旦遇到問題，學生知道要使用哪一把嗎？要如何嘗試才能節省時間？會不會看鎖孔的形狀去分析呢？凡此種種均需要控制系統的監控與調整，而這正是 Polya 的解題歷程所欠缺的。爲了改進 Polya 解題模式的缺失，許多研究者將後設認知與解題歷程結合，提出認知--後設認知的解題模式，其中最著名有 1.Lester（1985）之數學解題的認知--後設認知模式；2.Schoenfeld（1985）之解題原案巨觀分析架構，分述如下：

1.Lester（1985）之數學解題的認知--後設認知模式

Garofalo & Lester（1985）提出數學解題的認知--後設認知模式，重點在於後設認知決策對解題時認知行為的影響。在此模式中，認知成分共有四類：定位（orientation）、組織、執行及驗證，與 Polya 的解題四階段很類似，但各類活動均受到後設認知決策影響；後設認知成分則可分成三類：個人、工作與策略。

2.Schoenfeld（1985）之解題原案巨觀分析架構

Schoenfeld 認為影響解題成敗的因素有四項：(1)資源--即個人所擁有與解題相關的數學知識；(2)啓發術--即一般的解題技能與策略；(3)控制--如何選擇和執行策略，如何分配資源，如何決定計畫、監控、評估等；(4)信念系統--個人的數學世界觀。此四項因素彼此重疊，相互作用。Schoenfeld 從控制的角度來檢視解題行為，將解題歷程區分成六個階段：(1)讀題；(2)分析；(3)探索；(4)計畫；(5)執行；(6)驗證。

(三)認知心理學取向的數學解題歷程模式

Mayer（1992）從問題表徵的觀點來看解題歷程，其關注的焦點在於解題者如何將問題敘述（語言形式）轉換成數學運算敘述（符號形式）。Mayer 將解題歷程分成以下兩個主要部分，每個部分又可分成兩個步驟。

1.問題表徵：將文字或圖案轉換成心理表徵，又包含兩步驟：

(1) 轉譯：將每一句子或主要詞句轉譯為內在心理表徵，需要良好的語言與語意知識。

(2) 整合：整合要將問題的敘述結合成連貫的表徵，需要良好的基模知識。

2.問題解決：從問題的心理表徵進行到最後答案的過程。可分為：

(1) 計畫與監控：須具備解決問題的策略知識。

(2) 執行：需要程序性知識來有效而正確地執行計算。

上述三種取向的數學解題模式，均強調解題歷程的階段性，並且在書中提出相對應的解題策略，而這些階段分類方式可作為教師在解題教學時，編排教學流程的參考，與教學評量的依據。

參、合作情境對數學解題的影響

以合作學習的方式進行解題教學，需先瞭解合作情境所可能造成的影響為何？以下分別從認知發展論；合作情境對數學解題的影響兩個部分加以探討：

一、認知發展論

(一)Vygotsky 的認知發展論

Vygotsky 主張由專家來引導生手的學習活動，兩者共同承擔解題歷程的運作，生手先

做，當生手有所遲疑時，由專家加以指正與引導，最後專家逐漸退出控制角色，轉而擔任傾聽者（Grisham & Molinelli,1995），這種型態的教導歷程，亦稱之爲鷹架（scaffolding）理論（Wood, Bruner & Ross,1976），因此 Vygotsky 認爲學習是一種責任轉移的歷程，專家在學習歷程中是協助者、支持者；生手透過有效的互動而達成責任的轉移，其互動對象可以是成人或較具能力的同儕。

(二)Piaget 的認知發展論

Piaget 學派指出認知的發展是由於個體與環境互動的過程中，因爲社會認知衝突而產生認知失調，引發一連串的同化和調整，以達到認知平衡，這就產生了認知發展。當兒童不同意他人的觀點，就同時遭遇社會與認知上的衝突，這個經驗包含首先個人必須能察覺有不同於自己的觀點，其次必須開始檢視自己的想法，重新評估想法的有效性，進而學會爲自己的想法辯護，若要他人接受自己的想法，要先能將自己的理念清楚地表達出來。因此 Piaget 認爲兒童在同儕互動的過程中，社會與認知方面均有獲益：在社會性的發展方面，改善了溝通技巧；在認知的發展方面，重新檢視了自己看法的真實性（Grisham & Molinelli,1995）。Piaget 深信運思與合作是同時出現的，而個體內在的運思活動與外在的合作是一體兩面，故在合作學習歷程中，鼓勵思考與討論有助於發展高層次的認知（劉錫麒，民 82）。

從 Vygotsky 與 Piaget 的認知發展論，可歸納出兩種可能的合作學習組合（Kroll,1988），分別探討如下：

1.能力或地位不等的合作學習組合

Vygotsky 的研究焦點主要在成人是如何協助兒童的心智發展，這樣的合作學習組合即是專家與生手，兩者在能力與地位上有很大的差異。Vygotsky 提出近側發展區的概念（zone of proximal development）--問題難度可能是個人無法獨自完成，但在合作情境下可以完成的（Cole,1985）。經過一段時間後，在團體與個人之間能力產生轉移，今天兒童在合作情境下能夠完成的，未來將可獨自完成（Vygotsky,1962）。經由專家的協助，生手發展解題與監控的能力，並逐漸內化成爲自身的能力。

2.能力與地位相等的合作學習組合

Piaget 較關心兒童與兒童之間的互動，這種的合作學習組合就是能力與地位相等的同儕。Piaget 認爲同儕間的互動引發認知衝突，導致認知的再建構，這就是認知發展的根源，因爲衝突，使得個體覺察、精緻化、解釋自己的想法成爲必要。

二、合作情境對數學解題的影響

Schoenfeld（1985）將影響解題表現的因素分成四類：資源（resource）、啓發術、信念

系統與控制，Lester 則增加了情意（affect）與社會文化情境（Lester,1987；Lester & Garofalo,1987）。以下就合作情境與數學解題的關係，分成四方面加以探討：

(一)解題資源方面

Schoenfeld（1985）與 Lester（1987）認爲解題資源包括所有個人擁有可資運用的事實（facts）、定義、演算法、程序及解題策略。Schoenfeld（1983）認爲個人解題時，學生總是執行第一個看似合理的選擇；合作解題時，兩個或三個不同的解題路徑可能會被提出，關於每個方法的優點、何者應該繼續進行、爲什麼應該被進行，學生將會進行討論。換言之，合作時，經由溝通、意見交換，會將個人的解題資源合併成爲小組的解題資源。

(二)情意與信念方面

Schoenfeld（1985）的信念系統是指對自己、對環境、對主題（topics）及對數學的信念，而這些信念將會影響個人在解題時如何分派解題資源。Kroll（1988）認爲在合作情境中，可能會因爲面臨挑戰而增強彼此的態度和信念，對解題造成影響。例如合作時，對方的存在使個人不覺孤單，認爲問題會比一個人做來得容易，對解題較具信心，也強化了解題的耐力與動機。而在解題的過程中，當學生發現自己的夥伴也面臨困難，亦會減低解題時的焦慮。但是 Schoenfeld（1992）指出，關於情意與信念在解題中所扮演的角色仍然所知不多。

(三)社會文化情境方面

Lester（1987）認爲研究人類的行爲應該與其發生的情境結合，因爲學生從學校中學到的數學與日常生活中所應用的數學可能並不相同，有必要將培養解題能力的情境與發生解題行爲的情境結合。社會文化背景因素與合作解題情境也會互相影響，例如習慣討論的學生會表現得較爲自在，而較內向寡言的學生，若認爲夥伴的能力比自己強，可能就會較少表示意見。

(四)控制方面

根據 Schoenfeld（1985）的看法，控制包含對資源的選擇、執行及監控，控制決策包含如何分派時間與精力、評鑑目前的解題狀態、監控過程、對堅持或放棄目前的解題路徑作出抉擇，「控制」與數學解題中的「後設認知」在意義上相近。在合作情境中，夥伴間會相互控制，以協調彼此的解題工作，相互的外在控制會引發個人的內部監控，改變每個成員所採取的解題路徑（Kroll,1988）。劉錫麒（民 82）以爲 Vygotksy 近側發展區的概念，爲合作情境下社會互動的支持轉化爲個體的心理活動提供可能的依據，所以 Vygotksy 的理論暗示著個人的後設認知，事實上從社會互動內化而來。Schoenfeld（1985）指出在合作解題中，個人受到其他人的挑戰，會被迫檢查自己的想法，輪流注意夥伴可能會犯的錯誤，因此合作情

境是一種個人發展良好控制技能，並將其內化的環境。Yackel, Cobb & Wood（1991）主張「解題」、「尋求共識」、「嘗試去溝通」是以合作來學習的全部成分，這種互動的出現，引發從互動中學習的機會，當兒童一起工作而且努力溝通，學習機會自然從他們將思考口語化、解釋或爲答案辯護、尋求澄清的這些過程中出現。再者，試圖去解決衝突也提供將問題重新概念化及建構其他解法的機會，分析錯誤解法也提供一個澄清解釋的機會。

總而言之，合作情境中的討論除了具備相互支持的功能外，當雙方觀點不同時，爲了尋求共識，對於自身觀點的辯護、澄清，將使學生注意事件與結果的關聯，意識到自己的推理歷程。合作情境能營造人際互動的機會，故合作情境本身就是學習的脈絡，而社會互動就是學習數學解題與後設認知能力的良好工具。

肆、相關實徵研究

Gilbert-Macmillan（1983）比較國小五年級解數學文字題，在小組合作與整班教學兩種不同的學習環境下之教學成效，研究的焦點是解題表現是否改善，結果發現沒有明顯差異。

Noddings 以國小四年級學生爲對象，研究小組合作解數學文字題時的合作情形（Noddings,1982；Noddings, Gibert-Macmillan & Leitz,1983），Noddings 發現學生在合作解題中，擔任彼此的監控者，以類似個人解題者自我覺察的方式來討論想法和計畫。

Forman（1989）以兩位國一女生爲研究對象，探討同儕互動的本質，首先要求兩人各自預測影子是由哪一塊幾何圖形板所造成，接下來針對答案不一致的部分，試著以討論與實驗的方式取得共識。此研究中，合作解題被當成一種非正式、隱含在小組中的教學活動，結果發現起點行爲不同的學生，能夠經由互相幫助而使實驗具體化並驗証策略，這個發現意味著，同儕互動也可以是一種學習媒介。

Davidson & Kroll（1991）回顧數學方面的合作學習研究後，發現除了學習成就，受試者在認知與情意方面均有獲益，豐富了學生的技能與知識，增進對概念的了解，改善態度、動機、溝通技能與社會技能。

劉錫麒（民 79）以國小學童爲研究對象，提出合作反省思考的數學解題教學模式，將教學程序分成三個階段：教師以口述思考的方式示範解題歷程；學生仿照教師思考歷程，以兩人或四人小組的方式進行合作解題，教師提供解題作業紙做爲教學鷹架；最後的應用與討論階段係以教學評鑑的角度探討學生是否已獲得相關知識並可應用於獨自解題。研究指出接受「合作－省思」教學的學生在解題能力發展指數、反省思考、以及數學信念的發展上，均較接受「解說－接受」教學的學生爲優，而同儕分組的性質並不影響教學效果。

郝靜明（民 84）以國小五年級學生爲研究對象，依據上學期數學學期成績，隨機分派

成三個異質組與三個高、中、低成就同質組，以探討高、中、低成就學生在同質或異質組中學習成效的差異，及對合作學習的態度。在小組合作解題結束後，以個人解題後測檢驗學生對相關問題的遷移與解題能力；以問卷調查學生對合作學習的態度。研究發現同質組與異質組學習成效並無顯著差異；高、中、低成就群的學生在同質與異質組學習成效未達顯著差異；高成就學生在異質組比在同質組對合作學習有較正向的態度；中、低成就學生在同質與異質組中對合作學習的態度則無顯著差異。

柯登淵（民 85）以小學的一個班級爲研究對象，研究主旨在探討國小接受新數學實驗課程的學生，在數學溝通過程中教師與學生的行爲類型，以及討論過程中，師生共識的發展。因此觀察活動包含全班討論以及小組討論，小組爲包含四名男生與四名女生的異質團體。研究發現藉由溝通討論，學生可將自己心中的解題想法明確的表達出來，和同學分享學習經驗，並接受別人的挑戰與質疑。說明、質疑與辯護的討論過程，可以提供教師機會，去瞭解學生心中隱而不見的解題想法。並有助於學生反省自己或他人的解題方法。

陸正威（民 86）以國小五年級的四個班級，共 154 名學生爲研究樣本，依照班級，隨機分派爲異質編組、同質編組、不編組與控制組的四種情境，以不等組前後測進行爲期十週之實驗，探討「同儕交互指導數學解題方案」對不同程度學生的數學解題表現，數學焦慮，及後設認知所能產生的立即與保留效果是否會隨編組方式而有所不同。研究結果顯示：同質編組與異質編組均能顯著提升受試學生的數學解題表現，且提升的程度明顯高於不編組與控制組；異質編組亦有助於降低高程度學生的數學焦慮，以及增強後設認知能力；同質編組有助於降低低程度學生的數學焦慮，卻未能增強後設認知能力；不編組而進行解題教學能顯著提升受試學生的數學解題表現，且提升的程度明顯高於控制組。然而，不編組情境卻未能降低受試學生的數學焦慮。值得注意的是，不編組情境明顯降低受試學生數學解題的後設認知。

上述各項探討合作解題的研究，大多認同合作解題爲提昇學生數學解題能力與後設認知能力的良好媒介，並可降低數學焦慮，但有些研究指出小組解題與整班解題教學成效上並無差異，能力之提昇與同質、異質編組方式也沒有一致的結論，這可能是由於受試者對象年齡層、教學時間、分組的依據與人數不一，或所採用之問題並不是非例行題所致。因此，關於合作解題之研究，往後可針對特定年齡層，延長教學實驗時間，以非例行題作爲測驗內容，依測驗得分進行分組，如此才能有效地檢驗小組合作解題教學的成效。

伍、結語

在二十一世紀的今天，傳統「被動接受式」教育已經無法符合時代所需，因爲教育不光

是要培養能獨立思考解決問題的人才，更重要是要具有尊重他人、與他人合作、溝通協調的民主素養，如何讓學生從數學解題中活動主動建構解題的策略，充實解題所需的背景知識，因應此一時代要求，「小組合作解題」是一可行方案，在合作中要求學生尊重他人意見、鼓勵學生表達己見，爲個人觀點辯護，嘗試去瞭解別人的想法，能夠使思考相互激盪，經由他人的監控，重新審視自己想法的合理性，有助於學生數學知識的聯結及概念性知識的重整，澄淸個人的數學觀念，提昇學生的運思層次。解題策略可經由實地操作而加深印象，老師適時參與討論，以瞭解學生的解題歷程，避免「教」與「學」之間的落差。合作解題亦增加了學生學習的機會，讓每個學生都是學習的主角，上課自然會專心。

合作解題的實施恰能呼應學生十項基本能力中的「表達、溝通與分享，尊重、關懷與團隊合作、獨立思考與解決問題」，數學教師雖能體認數學解題教學的重要性，但能從教學中實踐的卻不多。以高中爲例，合作解題初期，由於學生並不熟悉程序，因此需要較多的教學時間，並維持秩序，有心的教師往往屈服在進度與成績的雙重壓力下，不敢貿然實施。再者，月考與教科書均有固定範圍，一般學生多將針對特定問題的解題技巧誤認爲解題策略，對這些特殊解法趨之若鶩，反倒無視於 Polya 所提出的解題策略，動機的欠缺使教學成效大打折扣。另外，解題教學猶需配合適當教材與教學程序，先由教師示範，再以解題階段提示表加以輔助，使用團體績效的方式鼓勵小組合作，凡此種種若能經由數學研習社團，先完成初步教學計畫，進行教學實驗，再將其移轉到班級實施，熟悉度增加後，進度等問題便迎刃而解，解題教學也才能真正有落實的一天。

參考書目

1.柯登淵（民 85）：國小四年級新數學實驗課程師生數學解題討論與共識發展之觀察研究。國立政治大學教育研究所碩士論文。

2.教育部（民 87）：國民教育階段九年一貫課程總綱綱要。

3.張靜譽（民 84）：問題中心教學在國中發展之經過、效果及可行性之探討。科學教育學刊，第三卷第二期，139-164。

4.陸正威（民 86）：同儕交互指導數學解題方案對國小學童數學解題表現、數學焦慮及後設認知影響之實驗研究。國立新竹師範學院國民教育研究所碩士論文。

5.郝靜明（民 84）：合作學習中小組性質之研究－以錨式情境教學法教材爲例。私立淡江大學教育資料科學研究所碩士論文。

6.鄭毓信（民 87）：數學教育哲學。台北市：九章出版社。

7.劉錫麒（民 79）：合作反省思考的數學解題教學模式及其實徵研究。國立臺灣師範大學

教育研究所博士論文。

8.劉錫麒（民 80）：數學解題教學的新趨勢。國教園地，35-36 期，45-46。

9.劉錫麒（民 82）：數學思考教學研究。台北市：師大書苑。

10.Cole, M. (1985). The zone of proximal development: Where culture and cognition create each other. In J. V. Wertsch (Ed.), *Culture, communication, and cognition.* New York: Cambridge University Press.

11.Davidson, N., & Kroll, D. L. (1991). An overview of research on cooperative learning related to mathematics. *Journal for Research in Mathematics Education, 22*, 362-365.

12.Forman, E. A. (1989). The role of peer interaction in the social construction of mathematical knowledge. *International Journal of Educational Research ,13*, 55-70.

13.Garofalo, J., & Lester, F. K. (1985). Metacognition, cognitive monitoring, and mathematical performance. *Journal for Research in Mathematics Eduation,16,* 163-176.

14.Gilbert-Macmillan, K. M. (1983). *Mathematical problem solving in cooperative small groups and whole class instruction.* Unpublished doctoral dissertation, Stanford University.

15.Goods, M., & Galbraith, P. (1996). Do It This Way! Metacognition Strategies in Collaborative Mathematical problem solving. *Educational Studies in Mathematics, 30*, 229-260.

16.Grisham, D. L., & Molinelli, P. M., (1995). *Cooperative learning.* Westminster, C. A.: Teacher Created Materials, Inc.

17.Kilpatrick, J. (1985). A retrospective account of the past 25 year of research on teaching Mathematical Problem Solving. In Silver, E. A. (Ed.), *Teaching and Learning Mathematical Problem Solving: Multiple Research Perspectives.*

18.Kroll, D. L. (1988). *Cooperative mathematical problem solving and metacognition: A case study of th e three pairs of woman.* Unpublished doctoral dissertation, Indiana University.

19.Lester, F. K. (1980). Research on mathematical problem solving. In R. J. Shumway (Ed.), *Research in mathematics education.* (pp.286-323). Reston, VA: NCTM.

20.Lester, F. K. (1985). *Methodological Consideration in Research on Mathematical Problem-Solving Instruction.* In E. A. Sliver (Ed.), Teaching and learning mathematical problem solving: Multiple research perspectives. Hillsdale, New Jersey: Erlbaum.

21.Lester, F. K.(1987). Why is problem solving such a problem? *Proceeding of the Eleventh International Conference on the Psychology of Mathematics Education.* (pp.257-266).

Montreal, Canada: PME.

22.Lester, F. K., & Garofalo, J. (1987). *The influence of affects, beliefs, and metacognition on problem-solving behavior: Some tentative speculations*. Paper presented at the annual meeting of American Educational research Association, Washington, D. C.

23.Mayer, R. E. (1992). *Thinking, Problem solving, cognition.* New York: W. H. Freeman and Company.

24.National Council of Teachers of Mathematics. (1989). *Curriculum and evaluation standards for school mathematics.* VA: Author.

25.Nodding, N. (1982). *The use of small group protocols in analysis of children's arithmetical problem solving*. Paper presented at the American Educational Research Association, New York. [ED 215 876]

26.Noddings, N., Gibert-Macmillan, K., and Leitz, S. (1983). *What do individuals gain in small group mathematical problem solving?* Paper presented at the American Educational Research Association, Montreal.

27.Polya, G. (1945). *How to solve it.* Princeton, New Jersey: Princeton University Press.

28.Qin, Z., Johnson, D. W., & Johnson, R. T. (1995). Cooperative versus competitive efforts and problem solving. *Review of Educational Research, 65*, 129-143.

29.Schoenfeld, A. H. (1983). Beyond the pure cognition: Belief system, social cognitions, and metacognition as driving forces in intellectual. *Cognitive Science, 7*, 329-363.

30.Schoenfeld, A. H. (1985). *Mathematical problem solving*. New York: Academic.

31.Schoenfeld, A. H. (1992). Learning to think mathematically: problem solving, Metacognition, and sense making in mathematics. In D. A. Grouws (Ed.), *Handbook of Research on Mathematics Teaching and Learning*. Maxwell Macmillan Canada: Macmillan Publishing Company.

32.Vygotsky, L. S. (1962). *Thought and language*. Cambridge, MA: MIT Press.

33.Wood, D., Bruner, J. S., & Ross, G. (1976). The role of tutoring in problem solving. *Journal of Children Psychology and Psychiatry, 17,* 89-100.

34.Yackel, E., Cobb, P. & Wood, T. (1991). Small group interactions as a source of learning opportunities in second-grade mathematics. *Journal for Research in Mathematics Education, 22*, 390-408.