碎形簡介

蔡宗龍
臺南女中

前言：

碎形幾何學是近幾年新興的一門數學分支，其在渾沌動態系統（chaotic dynamical system）中佔有很重要的地位。筆者希望利用此文將最簡單的碎形介紹給高中生，使之認識及欣賞碎形之美，並激發其學習數學的興趣。（本文內容大多原爲筆者於今年爲”台南女中高一暑期數學營“ 學生上課講義）

何謂碎形：

在 1960 至 1970 年代間，一位 IBM Thomas J. Watson 研究中心的研究員 Benoie Mandelbrot 發展了一套新的幾何學，他稱之爲碎形幾何學（fractal geometry）。這套幾何學與傳統的幾何學有許多不同的地方，其中之一爲定義了一個形狀的碎形維度（fractal dimension）可以非整數，有別於傳統幾何的整數維度。他描述碎形爲”其組成部份以某種方式與整體相似的形體”。

Mandelbrot 所取的”碎形”（fractal）這個名詞，是由法文動詞 frangere（破壞）的形容詞”fractus”來的，其意義即爲”破碎的”、”分裂的”、”不平坦的”。下圖 1.1 即爲有名的碎形圖形 Mandelbrot Set, 這個圖形有很細緻的結構，類似的形狀無窮的重複出現，而且不管你如何把圖形放大，你所看到的形狀，跟原圖形幾乎是一樣或類似（如圖 1.2 爲圖 1.1 的局部放大圖），而這就是碎形的基本特性。（碎形的數學定義並非由外形來判別，而各種碎形之特性也各有不同，並非所有碎形都有本文之特性）

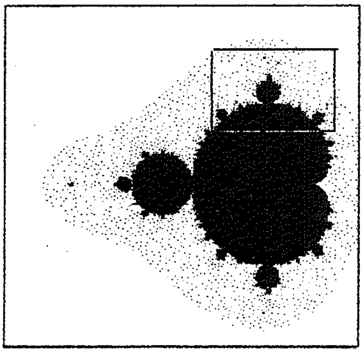

圖 1.1 Mandelbrot set

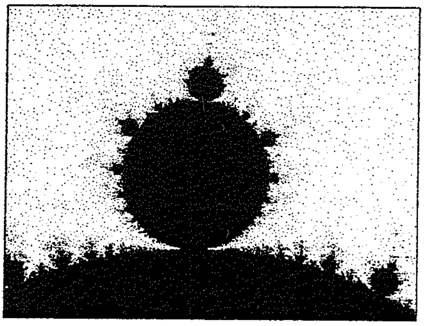

圖 1.2 圖 1.1 的局部放大圖

哪裡有碎形：

自然界中的碎形處處可見，如天空中的雲、閃電、星星、雪花、海浪、山的形狀、岩石、樹木的枝葉、掉落的樹葉，土地的龜裂、地殼的斷層、衛星空照圖、海岸線、我們所吃的花椰菜、甚至於一大群人的聚會所成的圖形，都可以碎形描述這些自然界的結構本質。事實上，傳統歐氏幾何學（Euclidean geometry）所研究的，可以說幾乎都是人類思維的物件，如：直線、平面、多邊形等等。碎形幾何學則更能細膩的描述出自然界物體的外形！

幾個有趣的碎形：

筆者希望透過本文，介紹幾個高中生可理解的碎形，及在它們美麗的外形背後所隱含的有趣的、令人驚喜的數學性質。這些碎形的共同特性是自相似：假設我們有一個可以無窮地將圖形放大的顯微鏡，則不管放大的倍率有多少，在鏡頭中所看到的圖形，都是相同或相似的。

(1)Cantor Set：Cantor Set 在拓樸學中是一個非常有名的例子。其製作的方式如圖 2 所示，首先給定 $[0,1]$ 閉區間，挖掉其三分之一等份的中間段開區間 $(\frac{1}{3},\frac{2}{3})$，再將現有的兩個閉區間 $[0,\frac{1}{3}],[\frac{2}{3},1]$，各挖掉其三分之一等份的中間段開區間 $(\frac{1}{9},\frac{2}{9}),(\frac{7}{9},\frac{8}{9})$，無窮的依此步驟將現有的每一線段的三分之一等份的中間段開區間挖掉，最後所成的集合即為 Cantor Set, 其圖形為碎形。

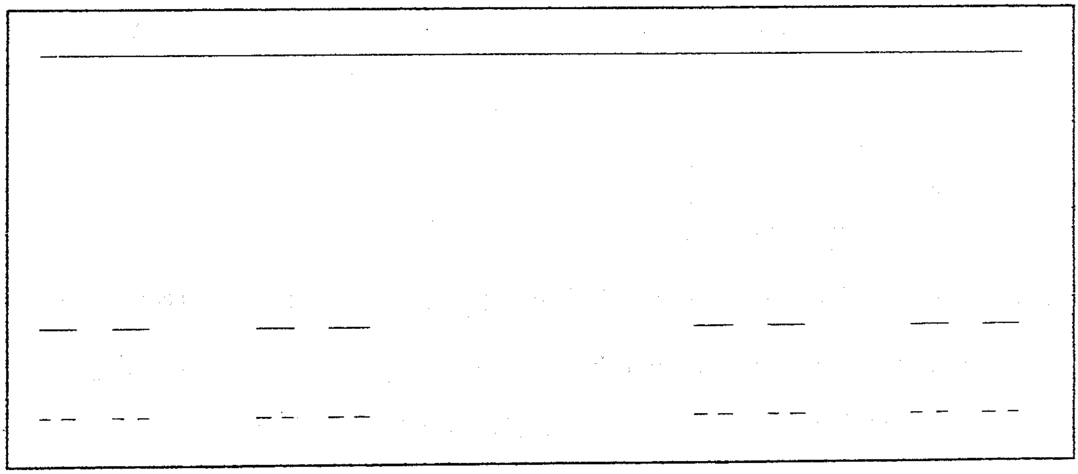

圖 2　製作 Cantor Set 過程的前幾個階段

Cantor Set 有一些很有趣的性質，它的總長度為 0，但它的元素的個數，卻跟整條數線上點的個數是一樣多的。

在製作 Cantor Set 的過程中，每次都挖掉原有的$\frac{1}{3}$，而剩下現有的$\frac{2}{3}$，所以當我們做了 n 個步驟後，剩下的長度爲$(\frac{2}{3})^n$，而下一步驟將挖掉$(\frac{2}{3})^n\cdot\frac{1}{3}$，所以完成 Cantor Set 共挖掉$\frac{1}{3}+\frac{2}{3}\cdot\frac{1}{3}+(\frac{2}{3})^2\cdot\frac{1}{3}+(\frac{2}{3})^3\cdot\frac{1}{3}+\cdots\cdots$，這是一個無窮等比級數，其和爲 1。

至於如何證明它的元素與整條數線的點的個數一樣多呢？首先我們可以觀察出，在挖除中間三分之一開區間 n 次後，產生了 2^n 個小線段，而這些線段的端點並不會被挖除，所以 Cantor Set 至少有 $\lim_{n\to\infty}2^{n+1}=\infty$ 個點。

其次，我們知道，0, 1 之間的數若以三進位制來表示皆形如

$$\frac{a_1}{3}+\frac{a_2}{3^2}+\frac{a_3}{3^3}+\cdots+\frac{a_n}{3^n}+\cdots\text{，其中，}a_i\in\{0,1,2\},\forall i\in N$$

而在製作 Cantor Set 的過程中，很明顯的可以看出，那些含有某些 $i\in N$ 使得 $a_i=1$ 的數皆被挖掉，因此 Cantor Set 的元素之所有的 a_i 不是 0 就是 2。若令 F 爲 Cantor Set，且定義一函數 $f:F\to[0,1]$，

$$f(x)=\frac{b_1}{2}+\frac{b_2}{2^2}+\frac{b_3}{2^3}+\cdots,$$

其中 $x=\frac{a_1}{3}+\frac{a_2}{3^2}+\frac{a_3}{3^3}+\cdots+\frac{a_n}{3^n}+\cdots\in F,\ b_i=\frac{a_i}{2},\forall i\in N$。則 f 把 F 中的所有元素跟 0,1 閉區間的數（用二進位制來表示）做了一個一對一且映成的對應，因此這兩個集合的元素數量是一樣多的。這給了我們一個有趣的現象，我們盡可能的把〔0,1〕的點挖除，且挖掉的總長度與〔0,1〕的長度一樣，但剩餘的點竟然跟沒挖除之前的點的個數一樣多。

而欲證明 0,1 閉區間的點與整個數線的點是一樣多，可定義一個函數 $g:[0,1)\setminus\{\frac{1}{2}\}\to R$，

$$g(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{2x-1}-1, & x>\dfrac{1}{2}\\[2mm] \dfrac{1}{2x-1}+1, & x<\dfrac{1}{2}\end{cases},$$

則 g 爲一對一且映成的函數，由此可看出 $[0,1)\setminus\{\frac{1}{2}\}$ 與 R 的元素數量是一樣多的，而因爲它們的數量都是不可數無窮多，因此 $[0,1]$ 只比 $[0,1)\setminus\{\frac{1}{2}\}$ 多兩個點，其元素個數也應一樣多。這也給我們一個有趣的現象，一條無窮長的直線上的點，竟然可以把它壓縮到 $[0,1]$ 中，並讓它的長度爲 0。

想一想：(1)Cantor Set 每次挖掉中間$\frac{1}{3}$段開區間，如果我們每次挖掉的不是$\frac{1}{3}$段，而是其他固定比率的開區間（如$\frac{2}{3}$，$\frac{1}{4}$等），其圖形又如何？是不是碎形呢？有沒有如

Cantor Set 類似的結果呢？(2)而我們一開始以[0,1]爲出發，開始挖除，可不可以用其他的閉區間爲出發來做同樣的步驟呢？其圖形是不是還是碎形？(3)若我們一開始以(0,1)爲出發，每次挖掉$\frac{1}{3}$的閉區間，那最後的圖形爲何？

(2)Koch Snowflake：給定一正三角形，切掉每邊的三等份的中間段，並以此段爲底邊向外做一正三角形，此爲一次製作步驟。對現有的圖形的每一邊做一次製作步驟的處理，且無窮的作下去，最後得到的圖形即爲有名的 Koch Snowflake，這是一個碎形。如圖 3.，依序爲其製作過程的前幾個階段。

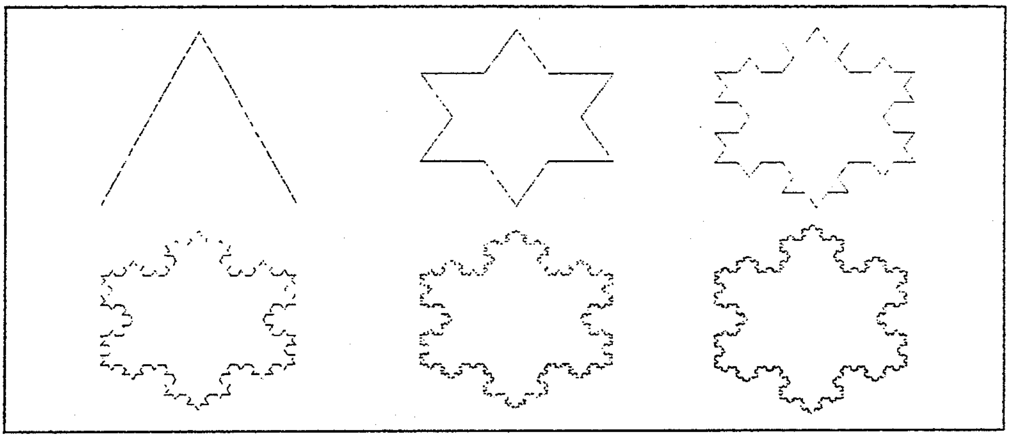

圖 3. 製作 Koch Snowflake 的前幾個過程

此碎形有其特別的性質，如周長爲無限大，但所圍面積卻爲有限。周長無限大的性質可很快的看出來。因爲我們對正三角形每邊所做的步驟均一樣，因此只須考慮其中一邊的情況即可。若此正三角形的邊長爲 1，則經過一個製作步驟後，此邊的邊長變成$\frac{4}{3}$，且原來的線段變成四段小線段，再對現有的四個小線段作一次製作步驟，則每一個新的邊皆原來邊的$\frac{4}{3}$倍長，也因此其總長爲$(\frac{4}{3})^2$，持續不斷的作下去，可推出，當我們做了 n 個步驟後，其邊長爲$(\frac{4}{3})^n$，（詳細的證明可很簡單的利用數學歸納法來證得），當 n 趨近到無窮大時，邊長也會趨近無窮大。

對於其所圍面積的值，我們可觀察圖 4 變化的情形。設一開始的三角形邊長爲 1，則在完成第一次製作步驟後，增加了一個正三角形，其邊長爲$\frac{1}{3}$，面積爲$\frac{\sqrt{3}}{4}\cdot(\frac{1}{3})^2$。完成第二次製作步驟後，增加了四個正三角形，每個邊長爲$(\frac{1}{3})^2$，總面積爲$4\cdot\frac{\sqrt{3}}{4}\cdot[(\frac{1}{3})^2]^2$。

完成第三次製作步驟後，增加了 4^2 個正三角形，每個邊長爲 $(\frac{1}{3})^3$，總面積爲 $4^2\cdot\frac{\sqrt{3}}{4}\cdot[(\frac{1}{3})^3]^2$。依此，利用數學歸納法可簡單的證得：當我們完成第 n 次製作步驟後，可再增加的三角形面積爲 $4^{n-1}\cdot\frac{\sqrt{3}}{4}\cdot[(\frac{1}{3})^n]^2$。因此可得，Koch Snowflake 圖形所圍的面積爲

$$\frac{\sqrt{3}}{4}\cdot 1^2+3\cdot\sum_{n=1}^{\infty}4^{n-1}\cdot\frac{\sqrt{3}}{4}\cdot[(\frac{1}{3})^n]^2=\frac{2\sqrt{3}}{5},$$

這是一個有限值，而且爲原三角形面積的 $\frac{8}{5}$ 倍。

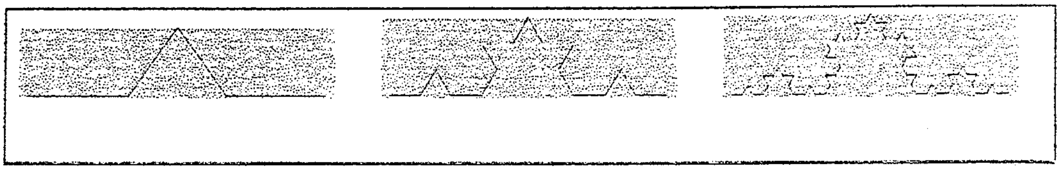

圖 4. 製作 Koch Snowflake 過程中其中一邊變化情形

不管一開始的正三角形有多小，所做出的 Koch Snowflake 的周長皆爲無窮大，而所圍面積都是原三角形的 $\frac{8}{5}$ 倍，換句話說，我們可造出一個所圍面積任意小而周長無窮大的封閉圖形。發揮一下想像力，現在若有一個 Koch Snowflake 在你面前，拿個剪刀將其任意邊剪斷，開始把它拉直，你將發現，永遠都不可能把圖形拉直；反之，我們也可將一個無窮長的直線圍成一個任意小的區域。

想一想：(1)如果一開始把新的小三角形往原三角形內部作，所成圖形爲何？周長？面積呢？(2)如果一開始我們有一個正方形，使用類似的步驟，但往外做的不是正三角形，而是正方形，是否也可形成碎形？其周長是否爲無窮大？面積是否有限？(3)再想一想，用類似的方法，是否可以做出一些美麗的碎形？

(3)Sierpinski Triangle：這個有名的三角形，製作的方式如圖，首先，給定一正三角形，取各邊中點，挖掉中間那塊正三角形（其邊界需留下），剩下三個相同的正三角形，接下來對剩下的每個三角形做同樣的步驟，挖掉其各邊中點連線所成正三角形，重複此步驟無窮次，即形成 Sierpinski Triangle。

Sierpinski Triangle 有點類似 Cantor Set, 其面積爲 0，但它卻有與平面一樣的無窮多個點。

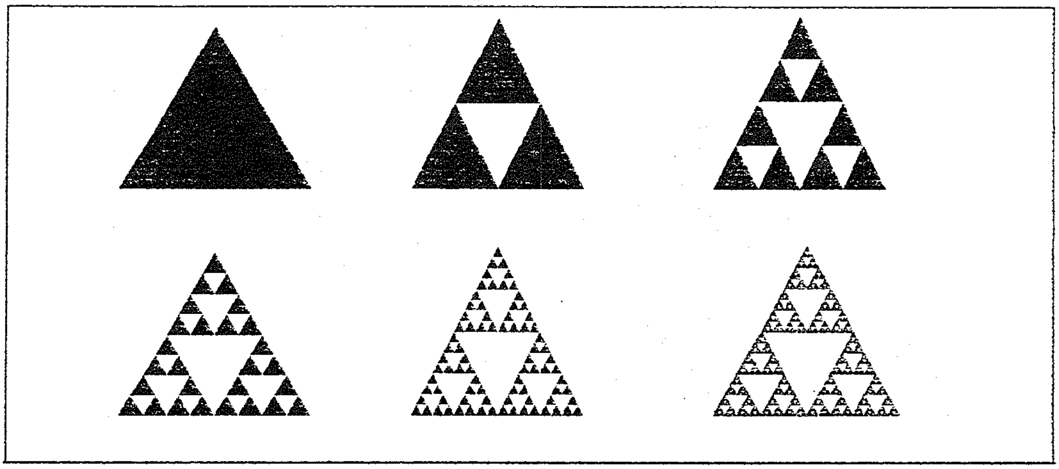

圖 5. 製作 Sierpinski Triangle 的前幾個步驟

另外一個有趣的製作 Sierpinski Triangle 的方法，是利用 Chaos Game 的方式：在直角座標平面上 $(0,0),(2,0),(1,\sqrt{3})$ 爲一正三角形的三個頂點，任取另一點 a_1，隨機選取三頂點之一，並取 a_2 爲此選取頂點與 a_1 的中點，重複此步驟無窮多次，取 a_n 爲隨機選取的頂點與 a_{n-1} 的中點，將數列(a_n)一個點一個點地畫在平面上，（有時可能必須將前 100 個點去除，視開始所取點離原點的距離而定）所成圖形也是 Sierpinski Triangle。我們在這邊不多介紹 Chaos Game。

想一想：如圖 6 之碎形是如何製作出來的呢？

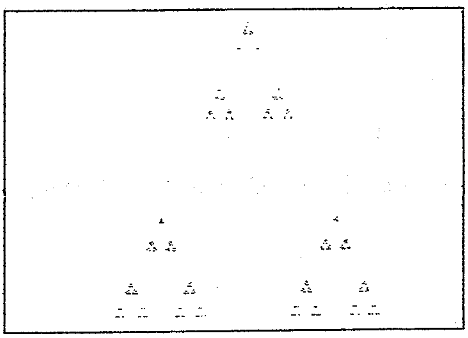

圖 6.

(4)其他：如圖 7 兩個碎形，想一想，它們是怎麼完成的？

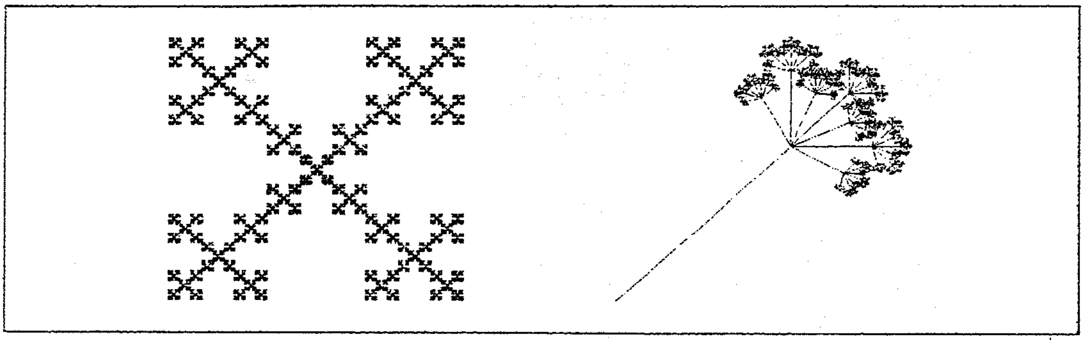

圖 7.

附註：

(1)圖 1.1 及 1.2 均利用 Aros Fractals 軟體繪製，此軟體可由 http://www. ArosMagic. com 網站免費下載。

(2)本文圖 2 至圖 7 均利用 Mathematica 軟體繪製，其程式如下：

1. Cantor Set:

```
pts={{0,0},{1,0}};
nextpt{{p1_, p2_}};=N[{p1, p1+(p2-p1)/3, p1+2(p2-p1)/3, p2}];
pt=div[nextpt[pts]];
div[pt1_]:=Partition[pt1, 2];
fl[pt2_]:=Flatten[Map[nextpt, pt2], 1];
cant[pt3_]:=div[fl[pt3]];
cantor[n_]:=Nest[cant, pt, n];
cantorgraph[n_]:=Show[Graphics[{RGBColar[1,0 ,0], Map[Line, cantor[n]]
}]]
```

2. Koch Snowflake:

```
proc[pts_]：=Module[
   {outpt, everyside},
   outpt[{p1_, p2_}]：=Module[{vec=p2-p1},
      {p1, p1+vec/3, p1+vec/2+{-
vec[[2]], vec[[1]]}Sqrt[3]/6, p1+2vec/3}
```

```
];
everyside=Transpose[{pts, RotateLeft[pts]}];
Flatten[Map[outpt, everyside], 1]
];
koch[n_]:=Module[{triangle},
triangle=Table[{Sin[2Pi k/3], Cos[2Pi k/3]},{k, 0, 2}]/Sqrt[3];
Nest[proc, triangle, n]
]
grphkoch[pts_]:=Show[Graphics[{RGBColor[1,0,0], Line[Append[pts, pts[
[1]]]]},AspectRatio->1]]
```

3. Sierpinski Triangle:

```
Start=div[nextpt[{{0,0},{2,0}, {1, Sqrt[3]}}]];
nextpt[{p1_, p2_, p3,_}]=Module[{vec},
    vec=(p2-p1)/3;
    {p1,(p1+p2)/2, (p1+p2)/2, p2, (p2+p3)/2, (p1+p2)/2, p3,
(p3+p1)/2, (p3+p2)/2}
];
div[pt1_]：=Partition[pt1, 3];
f1[pt2_]：=Flatten[Map[nextpt, pt2], 1];
cant[pt3_]:=div[fl[pt3]];
domino[pts_]:=cant[pts];
cantor[n_]:=Nest[domino, start, n];
Pol[pt_]:=Polygon[{pt[[1]], pt[[2]], pt[[3]]}];
Siergraph[n_]:=Show[Graphics[{RGBColor[1,0,0], Map[Pol,cantor[n]]}, A spetRatio->1]]
```

參考資料：

(1) 洪維恩，Mathematica 3.0 版入門指引，初版，台北市，松崗，（1997）。

(2) Encarnacao, Joe Luis.. Fractal Geometry And Computer Graphics, New York: Spring Verlag. c 1992。

(3) John Briggs, Fractal—The Patterns Of Chaos, Londion: Thames and Hudson., c 1992。

(4) Robert G. Bartle, The Elements of Real Analysis, Taipei: Central Book. c 1978。

(5) Robert L. Devaney A First Course In Chaotic Dynamical Systems: Theory and Experiment, New York; Addison Wesley. c1992.。