# Fermat 極值問題及其推廣（續）

趙文敏

國立臺灣師範大學　數學系

## 戊、Fermat 共點問題的推廣

在前面的定理 1、定理 6、定理 15 與定理 18 中，分別談到三圓共點與三直線共點的問題，這些共點問題可做一些推廣。

**定理 24**：設$\triangle A_1A_2A_3$爲任意三角形。若$\triangle A_2A_3P_1$、$\triangle A_3A_1P_2$與$\triangle A_1A_2P_3$是向外作出的三個三角形，而且$\angle A_2P_1A_3+\angle A_3P_2A_1+\angle A_1P_3A_2=180^\circ$，則$\triangle A_2A_3P_1$、$\triangle A_3A_1P_2$與$\triangle A_1A_2P_3$的外接圓共點。

**證**：因爲$\triangle A_3A_1P_2$與$\triangle A_1A_2P_3$的外接圓已有一個交點 $A_1$，所以，它們必有另一交點 R。我們需證明點 $A_2$、$A_3$、$P_1$ 與 R 共圓，爲證明此結論，需證明：當點 R 與點 $P_1$ 在直線 $A_2A_3$ 同側時，$\angle A_2RA_3=\angle A_2P_1A_3$；當點 R 與點 $P_1$ 在直線 $A_2A_3$ 異側時，$\angle A_2RA_3=180^\circ-\angle A_2P_1A_3$。我們就點 R 在$\triangle A_1A_2A_3$平面上的不同區域來討論。

(1) 設點 R 在$\triangle A_1A_2A_3$的內部，如圖 17 (1)所示，則

$$\angle A_1RA_2=180^\circ-\angle A_1P_3A_2,\quad \angle A_3RA_1=180^\circ-\angle A_3P_2A_1,$$

$$\begin{aligned}\angle A_2RA_3&=360^\circ-\angle A_1RA_2-\angle A_3RA_1=\angle A_1P_3A_2+\angle A_3P_2A_1\\&=180^\circ-\angle A_2P_1A_3。\end{aligned}$$

(2) 設點 R 在$\angle A_2A_1A_3$的對頂角的內部，如圖 17 (2)所示，則

$$\angle A_1RA_2=\angle A_1P_3A_2,\quad \angle A_3RA_1=\angle A_3P_2A_1,$$

$$\begin{aligned}\angle A_2RA_3&=\angle A_1RA_2+\angle A_3RA_1=\angle A_1P_3A_2+\angle A_3P_2A_1\\&=180^\circ-\angle A_2P_1A_3。\end{aligned}$$

(3) 設點 R 在$\angle A_3A_2A_1$的對頂角的內部，如圖 17 (3)所示，則

$$\angle A_1RA_2=\angle A_1P_3A_2,\quad \angle A_3RA_1=180^\circ-\angle A_3P_2A_1,$$

$$\begin{aligned}\angle A_2RA_3&=\angle A_3RA_1-\angle A_1RA_2=180^\circ-\angle A_3P_2A_1-\angle A_1P_3A_2\\&=\angle A_2P_1A_3。\end{aligned}$$

(4) 設點 R 在$\angle A_1A_3A_2$的對頂角的內部，則仿(3)可得

$$\angle A_1RA_2=180^\circ-\angle A_1P_3A_2,\quad \angle A_3RA_1=\angle A_3P_2A_1,$$

$$\begin{aligned}\angle A_2RA_3&=\angle A_1RA_2-\angle A_3RA_1=180^\circ-\angle A_1P_3A_2-\angle A_3P_2A_1\\&=\angle A_2P_1A_3。\end{aligned}$$

(5)設 $R=A_1$，如圖 17(4)所示，則圓 $A_1A_2P_3$ 與圓 $A_3A_1P_2$ 相切於點 $A_1$。設其內公切線與邊 $\overline{A_2A_3}$ 相交於點 T，則

$$\angle A_2A_1T=\angle A_1P_3A_2,\quad \angle A_3A_1T=\angle A_3P_2A_1,$$

$$\angle A_2RA_3=\angle A_2A_1A_3=\angle A_2A_1T+\angle A_3A_1T=\angle A_1P_3A_2+\angle A_3P_2A_1$$

$$=180^\circ-\angle A_2P_1A_3.$$

(6)設 $R=A_2$ 或 $R=A_3$，則點 $A_2$、$A_3$、$P_1$ 與 R 當然共圓，因爲它們只是三個不共線的點。

除了上述六種情形之外，我們不必再考慮其他情形，其理由如下：首先，圓 $A_3A_1P_2$ 與圓 $A_1A_2P_3$ 的交點不會是直線 $A_1A_2$ 或 $A_3A_1$ 上異於頂點的任何點。其次，若點 R 是直線 $A_2A_3$ 上異於頂點的某一點，則可證得 $\angle A_3P_2A_1+\angle A_1P_3A_2=180^\circ$。最後，若點 R 在 $\triangle A_1A_2A_3$ 外部，且在 $\angle A_2A_1A_3$、$\angle A_3A_2A_1$ 與 $\angle A_1A_3A_2$ 三個角中之一的內部，則可證得 $\angle A_3P_2A_1+\angle A_1P_3A_2>180^\circ$。後兩種情形都與定理的假設矛盾。或者說，當 $\angle A_2P_1A_3+\angle A_3P_2A_1+\angle A_1P_3A_2=180^\circ$ 時，點 R 不會在後兩種情形所描述的區域內。 ‖

顯然地，定理 1 與定理 15 中的三圓共點，乃是定理 24 的特殊情形。下面是另一個重要的特例。

**定理** 25：若$\triangle A_1A_2A_3$ 的三頂點 $A_1$、$A_2$ 與 $A_3$ 分別在$\triangle P_1P_2P_3$ 的三邊 $\overline{P_2P_3}$、$\overline{P_3P_1}$ 與 $\overline{P_1P_2}$ 上，則$\triangle A_2A_3P_1$、$\triangle A_3A_1P_2$ 與$\triangle A_1A_2P_3$ 的外接圓共點。

定理 25 乃是 A. Miquel 在西元 1838 年作了淸楚的敘述並提出證明，不過，此性質可能更早就已被發現。有關 Miquel 的定理及其相關問題的討論，値得另闢專文加以整理並介紹。下面只寫出兩個性質給讀者自行證明。(在定理的敘述中，點 $A_k$ 與點 $P_k$ 對換角色，$k=1, 2, 3$。)

**定理** 26：設$\triangle A_1A_2A_3$ 爲任意三角形。若點 $P_1$、$P_2$ 與 $P_3$ 分別在直線 $A_2A_3$、$A_3A_1$ 與 $A_1A_2$ 上，且點 $P_k$ 都不是$\triangle A_1A_2A_3$ 的頂點，$k=1, 2, 3$，則$\triangle A_1P_2P_3$、$\triangle A_2P_3P_1$ 與$\triangle A_3P_1P_2$ 的外接圓共點。

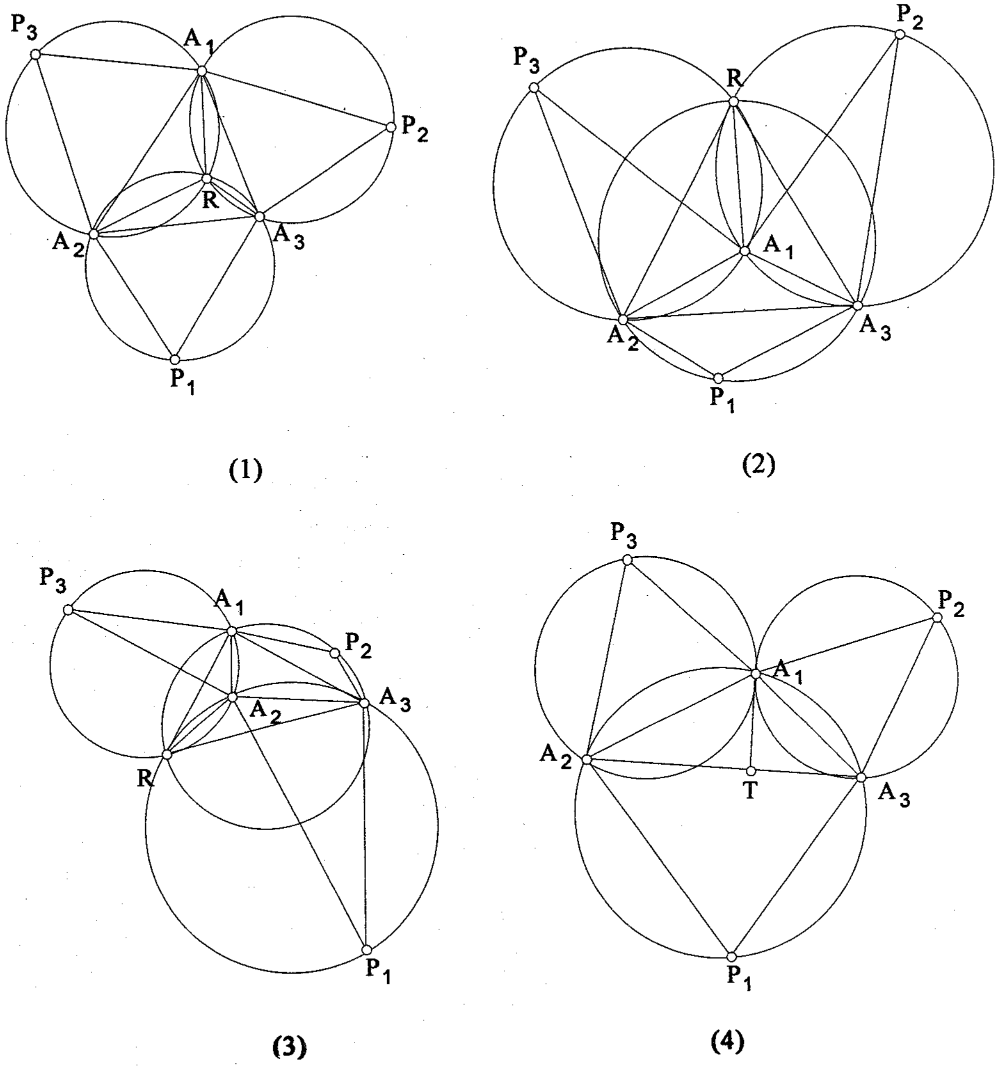



圖 17

定理 26 是廣義的 Miquel 定理，它將系理 25 推廣成：點 $P_1$、$P_2$ 與 $P_3$ 只需分別在含三邊的直線上(不必一定在邊上)，而且點 $P_1$、$P_2$ 與 $P_3$ 不一定要構成三角形(共線也可)。當三點共線時，還可得出更進一步的結果。

**定理** 27：設$\triangle A_1A_2A_3$爲任意三角形，而點 $P_1$、$P_2$ 與 $P_3$ 分別在直線 $A_2A_3$、$A_3A_1$ 與 $A_1A_2$ 上，且點 $P_k$ 都不是$\triangle A_1A_2A_3$ 的頂點，$k=1, 2, 3$。若點 $P_1$、$P_2$ 與 $P_3$ 共線，則$\triangle A_1P_2P_3$、$\triangle A_2P_3P_1$、$\triangle A_3P_1P_2$ 與$\triangle A_1A_2A_3$ 的外接圓共點。

下面討論的主題是三直線共點的問題，首先是定理 15(2)的一個推廣。

**定理** 28：設$\triangle A_1A_2A_3$ 爲任意三角形。若$\triangle A_2A_3P_1$、$\triangle A_3A_1P_2$ 與$\triangle A_1A_2P_3$ 爲向外作出的三角形，而且$\angle A_2A_1P_3=\angle A_3A_1P_2$、$\angle A_1A_2P_3=\angle A_3A_2P_1$、$\angle A_1A_3P_2=\angle A_2A_3P_1$，則直線 $A_1P_1$、

$A_2P_2$ 與 $A_3P_3$ 共點或兩兩平行。(請注意：此處並未假設$\triangle P_1A_2A_3$、$\triangle A_1P_2A_3$ 與$\triangle A_1A_2P_3$ 相似。)更進一步地，若$\angle A_2A_1P_3$、$\angle A_3A_2P_1$ 與$\angle A_1A_3P_2$ 都是銳角，則直線 $A_1P_1$、$A_2P_2$ 與 $A_3P_3$ 必共點。

**證**：設$\angle A_2A_1P_3=\angle A_3A_1P_2=\beta_1$、$\angle A_1A_2P_3=\angle A_3A_2P_1=\beta_2$ 且$\angle A_1A_3P_2=\angle A_2A_3P_1=\beta_3$。

若$\alpha_1+\beta_1=180^0$，則直線 $A_2P_2$ 與 $A_3P_3$ 都通過點 $A_1$。於是，直線 $A_1P_1$、$A_2P_2$ 與 $A_3P_3$ 共點，其交點為 $A_1$。

設$\alpha_k+\beta_k\neq 180^0$，$k=1, 2, 3$。對每個 $k=1, 2, 3$，設直線 $A_kP_k$ 與 $A_{k+1}A_{k+2}$ 相交於點 $X_k$。若$\alpha_1+\beta_1<180^0$、$\alpha_2+\beta_2<180^0$ 且$\alpha_3+\beta_3<180^0$，則點 $X_1$、$X_2$ 與 $X_3$ 分別在邊$\overline{A_2A_3}$、$\overline{A_3A_1}$ 與$\overline{A_1A_2}$ 上。於是，三個有向分比$[A_2A_3/X_1]$、$[A_3A_1/X_2]$ 與 $[A_1A_2/X_3]$都是正數。若$\alpha_1+\beta_1>180^0$，則$[A_2A_3/X_1]$為正數，而$[A_3A_1/X_2]$ 與 $[A_1A_2/X_3]$為負數。因此，三個有向分比的乘積恆為正數。於是，得

$$[A_2A_3/X_1]\,[A_3A_1/X_2]\,[A_1A_2/X_3]=\frac{\overline{A_2X_1}}{\overline{A_3X_1}}\times\frac{\overline{A_3X_2}}{\overline{A_1X_2}}\times\frac{\overline{A_1X_3}}{\overline{A_2X_3}}\text{。}$$

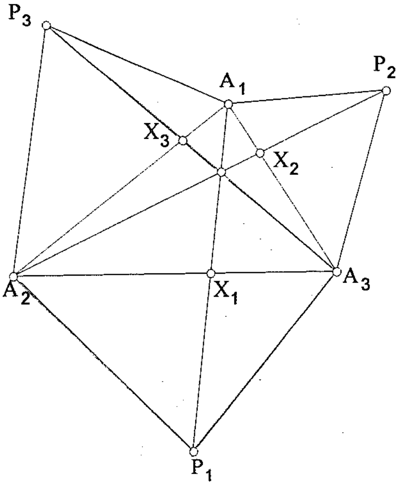
另一方面，因為$\overline{A_2P_1}\sin\beta_2=\overline{A_3P_1}\sin\beta_3$、$\overline{A_3P_2}\sin\beta_3=\overline{A_1P_2}\sin\beta_1$ 且 $\overline{A_1P_3}\sin\beta_1=\overline{A_2P_3}\sin\beta_2$。將三式相乘並消去相同的各值，即得

$$\frac{\overline{A_2P_1}}{\overline{A_3P_1}}\times\frac{\overline{A_3P_2}}{\overline{A_1P_2}}\times\frac{\overline{A_1P_3}}{\overline{A_2P_3}}=1\text{。}$$

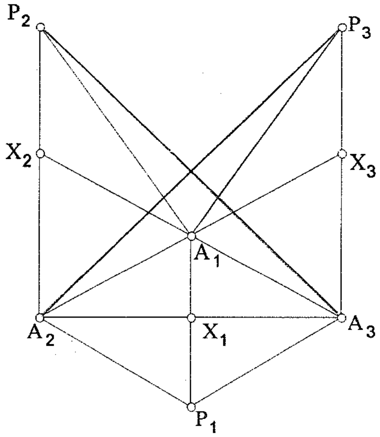
其次，因為$\overline{A_2X_1}:\overline{A_3X_1}=(\triangle A_1A_2P_1$ 的面積$):(\triangle A_1A_3P_1$ 的面積$)$、$\overline{A_3X_2}:\overline{A_1X_2}=(\triangle A_2A_3P_2$ 的面積$):(\triangle A_2A_1P_2$ 的面積$)$ 而且$\overline{A_1X_3}:\overline{A_2X_3}=(\triangle A_3A_1P_3$ 的面積$):(\triangle A_3A_2P_3$ 的面積$)$，所以，將各面積以兩邊夾角的公式表出，即得

$$\begin{aligned}&\frac{\overline{A_2X_1}}{\overline{A_3X_1}}\times\frac{\overline{A_3X_2}}{\overline{A_1X_2}}\times\frac{\overline{A_1X_3}}{\overline{A_2X_3}}\\&=\frac{\overline{A_1A_2}}{\overline{A_1A_3}}\,\frac{\overline{A_2P_1}}{\overline{A_3P_1}}\,\frac{\sin(\alpha_2+\beta_2)}{\sin(\alpha_3+\beta_3)}\times\frac{\overline{A_2A_3}}{\overline{A_2A_1}}\,\frac{\overline{A_3P_2}}{\overline{A_1P_2}}\,\frac{\sin(\alpha_3+\beta_3)}{\sin(\alpha_1+\beta_1)}\times\frac{\overline{A_3A_1}}{\overline{A_3A_2}}\,\frac{\overline{A_1P_3}}{\overline{A_2P_3}}\,\frac{\sin(\alpha_1+\beta_1)}{\sin(\alpha_2+\beta_2)}\\&=\frac{\overline{A_2P_1}}{\overline{A_3P_1}}\times\frac{\overline{A_3P_2}}{\overline{A_1P_2}}\times\frac{\overline{A_1P_3}}{\overline{A_2P_3}}=1\text{。}\end{aligned}$$

依 Ceva 定理，可知直線 $A_1P_1$、$A_2P_2$ 與 $A_3P_3$ 共點或兩兩平行。



(1)



(2)

圖 18

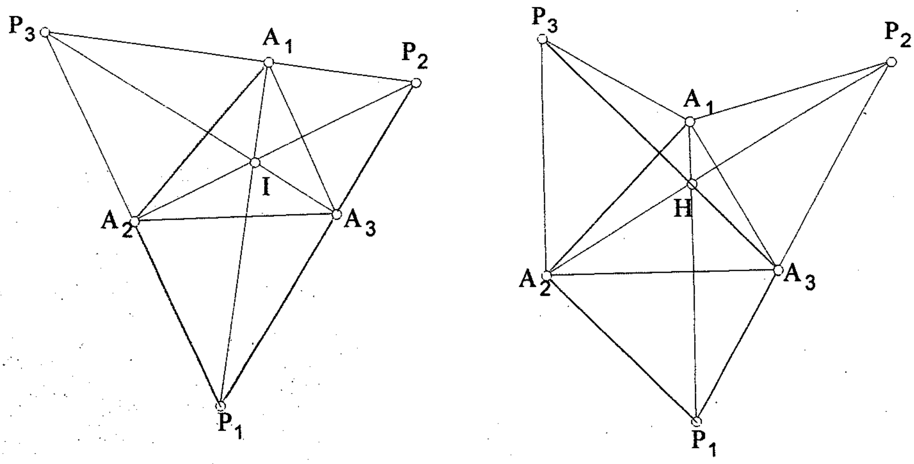
更進一步地，設$\beta_1$、$\beta_2$與$\beta_3$都是銳角。因爲$\alpha_1$、$\alpha_2$與$\alpha_3$三個角中至少有兩個爲銳角，所以，可設$\alpha_2<90^0$且$\alpha_3<90^0$。於是，得$\alpha_2+\beta_2<180^0$且$\alpha_3+\beta_3<180^0$，由此知□$A_1A_2P_1A_3$是一個凸四邊形，$\overline{A_1P_1}$與$\overline{A_2A_3}$相交，點$A_2$與點$P_1$位於直線$A_3A_1$同側，而且點$A_2$與點$A_3$在直線$A_1P_1$異側，$\angle A_2A_1A_3=\angle A_2A_1P_1+\angle A_3A_1P_1$。根據此等式，可知$\angle A_2A_1P_1$與$\angle A_3A_1P_1$中至少有一個小於$90^0$，設$\angle A_3A_1P_1<90^0$。因爲點$A_2$與點$P_2$位於直線$A_3A_1$異側，而點$A_2$與點$P_1$位於直線$A_3A_1$同側，所以，點$P_1$與點$P_2$位於直線$A_3A_1$異側。因爲$\angle A_3A_1P_1+\angle A_3A_1P_2<90^0+90^0=180^0$，所以，$\angle A_3A_1P_1+\angle A_3A_1P_2=\angle P_1A_1P_2$。由此可知：點$A_3$位於$\angle P_1A_1P_2$的內部，也因此點$A_3$與點$P_2$位於直線$A_1P_1$同側。於是，點$A_2$與點$P_2$位於直線$A_1P_1$異側，亦即：直線$A_1P_1$與直線$A_2P_2$相交。依前段所證的結果，可知直線$A_1P_1$、$A_2P_2$與$A_3P_3$共點。 ‖

請注意：定理 28 中兩兩平行的情況確實存在，如圖 18 (2)所示。前面的定理 15(2)，乃是定理 28 的一個特例。在此特例中，三線必共點而非兩兩平行，因爲它們所交的點 R 乃是$\triangle A_2A_3P_1$的外接圓與直線$A_1P_1$的另一交點。下面的定理 29 提供了定理 28 (或定理 15)的兩個有趣的特殊情形。

**定理** 29：設$\triangle A_1A_2A_3$爲任意三角形，而$\triangle A_2A_3P_1$、$\triangle A_3A_1P_2$與$\triangle A_1A_2P_3$爲向外作出的三角形，且$\angle A_2A_1P_3=\angle A_3A_1P_2=\beta_1$、$\angle A_1A_2P_3=\angle A_3A_2P_1=\beta_2$、$\angle A_1A_3P_2=\angle A_2A_3P_1=\beta_3$。

(1)若$\beta_1=(\alpha_2+\alpha_3)/2$、$\beta_2=(\alpha_3+\alpha_1)/2$且$\beta_3=(\alpha_1+\alpha_2)/2$，則直線$A_1P_1$、$A_2P_2$與$A_3P_3$都通過$\triangle A_1A_2A_3$的內心。

(2)若$\beta_1=\alpha_1$、$\beta_2=\alpha_2$且$\beta_3=\alpha_3$，則直線$A_1P_1$、$A_2P_2$與$A_3P_3$都通過$\triangle A_1A_2A_3$的垂心。




(1)　　　　(2)

圖 19

**證**：參看圖 19(1)及圖 19(2)。

(1) 因爲 $\angle A_2A_1P_3 = \angle A_3A_1P_2 = \beta_1 = (\alpha_2 + \alpha_3)/2 = \angle A_2A_1A_3$ 的外角的一半，所以，直線 $P_2P_3$ 是 $\angle A_2A_1A_3$ 的外角平分線。同理，直線 $P_3P_1$ 是 $\angle A_3A_2A_1$ 的外角平分線、直線 $P_1P_2$ 是 $\angle A_1A_3A_2$ 的外角平分線。於是，點 $P_1$、$P_2$ 與 $P_3$ 是 $\angle A_3A_2A_1$ 的三個旁心。由此可知：直線 $A_1P_1$ 是 $\angle A_2A_1A_3$ 的平分線、直線 $A_2P_2$ 是 $\angle A_3A_2A_1$ 的平分線、直線 $A_3P_3$ 是 $\angle A_1A_3A_2$ 的平分線。因此，直線 $A_1P_1$、$A_2P_2$ 與 $A_3P_3$ 都通過 $\angle A_1A_2A_3$ 的內心。

(2) 因爲 $\overline{A_2A_3} = \overline{A_2A_3}$ 且 $\angle A_3A_2P_1 = \beta_2 = \alpha_2 = \angle A_3A_2A_1$、$\angle A_2A_3P_1 = \beta_3 = \alpha_3 = \angle A_2A_3A_1$，所以，$\triangle P_1A_2A_3$ 與 $\triangle A_1A_2A_3$ 全等。於是，$\overline{A_1A_2} = \overline{P_1A_2}$ 而且 $\overline{A_1A_3} = \overline{P_1A_3}$ 。由此知：直線 $A_2A_3$ 是線段 $\overline{A_1P_1}$ 的垂直平分線。同理，直線 $A_3A_1$ 是線段 $\overline{A_2P_2}$ 的垂直平分線、直線 $A_1A_2$ 是線段 $\overline{A_3P_3}$ 的垂直平分線。因此，直線 $A_1P_1$、$A_2P_2$ 與 $A_3P_3$ 都通過 $\triangle A_1A_2A_3$ 的垂心。 ∥

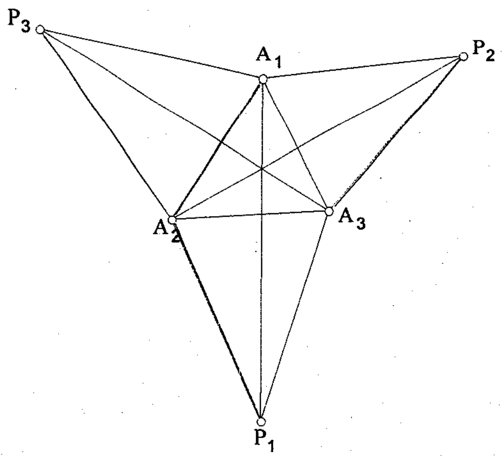



圖 20

下面的定理 30 是定理 28 的另一種特例。

**定理** 30：設$\triangle A_1A_2A_3$ 爲任意三角形，$0^\circ<\phi<90^\circ$。若$\triangle A_2A_3P_1$、$\triangle A_3A_1P_2$ 與$\triangle A_1A_2P_3$ 是分別以$\triangle A_1A_2A_3$ 的三邊爲底邊、$\phi$爲底角且向外作出的相似等腰三角形，則直線 $A_1P_1$、$A_2P_2$ 與 $A_3P_3$ 共點。

**證**：由定理 28 立即可得。 ‖

下面的定理 31 是更一般化的推廣。

**定理** 31：設$\triangle A_1A_2A_3$ 爲任意三角形。若$\triangle A_2A_3P_1$、$\triangle A_3A_1P_2$ 與$\triangle A_1A_2P_3$ 爲向外作出的三角形，點 $P_1$、 $P_2$ 與 $P_3$ 都不在直線 $A_2A_3$、$A_3A_1$ 或 $A_1A_2$ 上，而且$\angle A_3A_1P_2=\beta_{12}$、$\angle A_2A_1P_3=\beta_{13}$、$\angle A_1A_2P_3=\beta_{23}$、$\angle A_3A_2P_1=\beta_{21}$、$\angle A_2A_3P_1=\beta_{31}$、$\angle A_1A_3P_2=\beta_{32}$，則直線 $A_1P_1$、$A_2P_2$ 與 $A_3P_3$ 共點或兩兩平行的充要條件是

$$\frac{\sin\beta_{12}\sin\beta_{23}\sin\beta_{31}}{\sin\beta_{13}\sin\beta_{21}\sin\beta_{32}}=\frac{\sin(\alpha_1+\beta_{12})\sin(\alpha_2+\beta_{23})\sin(\alpha_3+\beta_{31})}{\sin(\alpha_1+\beta_{13})\sin(\alpha_2+\beta_{21})\sin(\alpha_3+\beta_{32})}。$$

更進一步地，若上述等式成立而且$\beta_{12}$、$\beta_{13}$、$\beta_{23}$、$\beta_{21}$、$\beta_{31}$與$\beta_{32}$都是銳角，則直線 $A_1P_1$、$A_2P_2$ 與 $A_3P_3$ 共點。

**證**：因爲 $\overline{A_2P_1}\sin\beta_{21}=\overline{A_3P_1}\sin\beta_{31}$、$\overline{A_3P_2}\sin\beta_{32}=\overline{A_1P_2}\sin\beta_{12}$ 且 $\overline{A_1P_3}\sin\beta_{13}=\overline{A_2P_3}\sin\beta_{23}$，所以，將三式相乘即得

$$\frac{\overline{A_2P_1}}{\overline{A_3P_1}}\times\frac{\overline{A_3P_2}}{\overline{A_1P_2}}\times\frac{\overline{A_1P_3}}{\overline{A_2P_3}}=\frac{\sin\beta_{12}\sin\beta_{23}\sin\beta_{31}}{\sin\beta_{13}\sin\beta_{21}\sin\beta_{32}}。$$

設直線 $A_kP_k$ 與 $A_{k+1}A_{k+2}$ 相交於點 $X_k$，$k=1, 2, 3$。因爲點 $P_1$、$P_2$ 與 $P_3$ 都不在含三邊的直線上，所以，$X_k\neq A_{k+1}$ 且 $X_k\neq A_{k+2}$。因爲$\overline{A_2X_1}:\overline{A_3X_1}$等於 ($\triangle A_2A_1P_1$的面積)：($\triangle A_3A_1P_1$ 的面積)，所以，不論點 $X_1$ 是邊$\overline{A_2A_3}$的內分點或外分點，恆有$[A_2A_3/X_1]=\overline{A_1A_2}\ \overline{A_2P_1}\sin(\alpha_2+\beta_{21})$：$\overline{A_1A_3}\ \overline{A_3P_1}\sin(\alpha_3+\beta_{31})$。同理，更進一步可得

$$\begin{aligned}&[A_2A_3/X_1][A_3A_1/X_2][A_1A_2/X_3]\\&=\frac{\overline{A_1A_2}}{\overline{A_1A_3}}\ \frac{\overline{A_2P_1}}{\overline{A_3P_1}}\ \frac{\sin(\alpha_2+\beta_{21})}{\sin(\alpha_3+\beta_{31})}\times\frac{\overline{A_2A_3}}{\overline{A_2A_1}}\ \frac{\overline{A_3P_2}}{\overline{A_1P_2}}\ \frac{\sin(\alpha_3+\beta_{32})}{\sin(\alpha_1+\beta_{12})}\times\frac{\overline{A_3A_1}}{\overline{A_3A_2}}\ \frac{\overline{A_1P_3}}{\overline{A_2P_3}}\ \frac{\sin(\alpha_1+\beta_{13})}{\sin(\alpha_2+\beta_{23})}\\&=\frac{\sin\beta_{12}\sin\beta_{23}\sin\beta_{31}}{\sin\beta_{13}\sin\beta_{21}\sin\beta_{32}}\times\frac{\sin(\alpha_1+\beta_{13})\sin(\alpha_2+\beta_{21})\sin(\alpha_3+\beta_{32})}{\sin(\alpha_1+\beta_{12})\sin(\alpha_2+\beta_{23})\sin(\alpha_3+\beta_{31})}。\end{aligned}$$

依 Ceva 定理，直線 $A_1P_1$、$A_2P_2$ 與 $A_3P_3$ 共點或兩兩平行的充要條件是：三個有向分比的乘積$[A_2A_3/X_1][A_3A_1/X_2][A_1A_2/X_3]=1$，而依上式，此等式與定理欲證的等式相同。

本定理的後一敘述，其證法與定理 28 相同。 ‖

在定理 31 中，令$\beta_{12}=\beta_{13}=\beta_1$、$\beta_{23}=\beta_{21}=\beta_2$、$\beta_{31}=\beta_{32}=\beta_3$，則就得出定理 28。此外，將這些角做適當的選擇，可以使三直線的交點是三角形的特殊點，下面的定理 32 舉出了一些例子。

**定理** 32：承續定理 31 所用的記號。

(1) 若$\triangle A_1A_2A_3$是一個銳角三角形，而且$\beta_{23}=\beta_{32}=90^\circ-\alpha_1$、$\beta_{31}=\beta_{13}=90^\circ-\alpha_2$、$\beta_{12}=\beta_{21}=90^\circ-\alpha_3$，則直線 $A_1P_1$、$A_2P_2$與 $A_3P_3$的交點是$\triangle A_1A_2A_3$的垂心。

(2) 若$\triangle A_1A_2A_3$是一個銳角三角形，而且$\beta_{12}=\beta_{13}=90^\circ-\alpha_1$、$\beta_{23}=\beta_{21}=90^\circ-\alpha_2$、$\beta_{31}=\beta_{32}=90^\circ-\alpha_3$，則直線 $A_1P_1$、$A_2P_2$與 $A_3P_3$的交點是$\triangle A_1A_2A_3$的外心。

(3) 若$\beta_{23}=\beta_{32}=\alpha_1$、$\beta_{31}=\beta_{13}=\alpha_2$、$\beta_{12}=\beta_{21}=\alpha_3$，則直線 $A_1P_1$、$A_2P_2$與 $A_3P_3$的交點是$\triangle A_1A_2A_3$的重心。

(4) 若$\triangle A_1A_2A_3$是一個銳角三角形，而且$\beta_{21}=\beta_{31}=90^\circ-\alpha_1$、$\beta_{32}=\beta_{12}=90^\circ-\alpha_2$、$\beta_{13}=\beta_{23}=90^\circ-\alpha_3$，則直線 $A_1P_1$、$A_2P_2$與 $A_3P_3$的交點是$\triangle A_1A_2A_3$的九點圓圓心。

(5) 若$\beta_{21}=\beta_{31}=\alpha_1$、$\beta_{32}=\beta_{12}=\alpha_2$、$\beta_{13}=\beta_{23}=\alpha_3$，則直線 $P_2P_3$、$P_3P_1$、$P_1P_2$分別與$\triangle A_1A_2A_3$的外接圓相切於點 $A_1$、$A_2$、$A_3$。此時，直線 $A_1P_1$、$A_2P_2$與 $A_3P_3$的交點稱爲$\triangle A_1A_2A_3$ 的類似重心 (symmedian point )，也有人稱之爲$\triangle A_1A_2A_3$ 的 Lemoine 點或 Grebe 點。

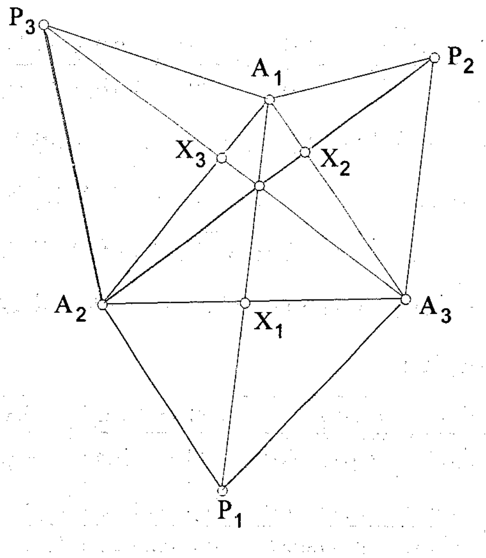



圖 21

**證**：參看圖 21 與圖 22。

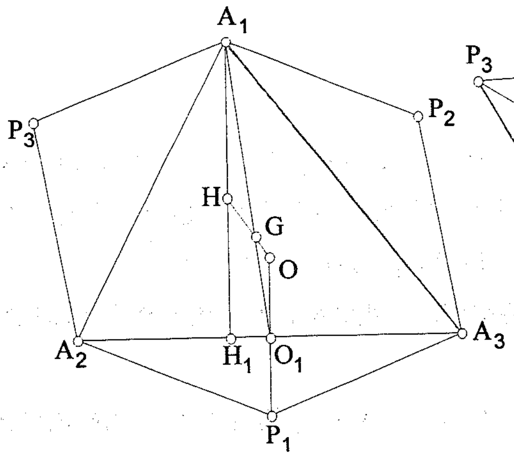
(1) 在圖 21 中，因爲$\angle A_3A_2P_1+\angle A_2A_3P_1=\beta_{21}+\beta_{31}=180^\circ-\alpha_2-\alpha_3=\alpha_1$，所以，$\angle A_2P_1A_3=180^\circ-\alpha_1$。由此可知：點 $A_1$、$A_2$、$P_1$與 $A_3$共圓，$\angle A_3A_1P_1=\angle A_{2}$ [illegible] $_1=\beta_{21}$

$=90^0-\alpha_3$，$\angle A_3A_1P_1+\angle A_1A_3A_2=90^0$。於是，$\triangle A_1A_3X_1$是直角三角形，$\overline{A_1P_1}\perp\overline{A_2A_3}$。

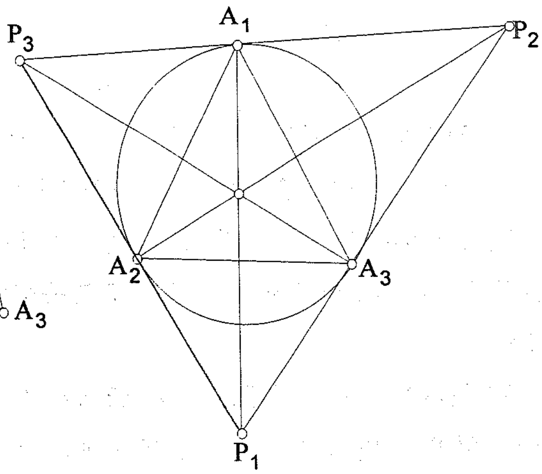
(2) 因爲$\angle A_2A_1A_3+\angle A_3A_1P_2=\alpha_1+(90^0-\alpha_1)=90^0$，所以，$\angle A_2A_1P_2$是直角。同理，$\angle A_3A_1P_3$、$\angle A_1A_2P_1$、$\angle A_3A_2P_3$、$\angle A_1A_3P_1$與$\angle A_2A_3P_2$都是直角。由此可知：$\overline{A_1P_1}$、$\overline{A_2P_2}$與$\overline{A_3P_3}$都是$\triangle A_1A_2A_3$的外接圓的直徑。

(3) 由$\beta_{12}=\alpha_3$得$\angle A_3A_1P_2=\angle A_1A_3A_2$。於是，$\overline{A_1P_2}$與$\overline{A_2A_3}$平行。由$\beta_{13}=\alpha_2$得$\angle A_2A_1P_3=\angle A_3A_2A_1$。於是，$\overline{A_1P_3}$與$\overline{A_2A_3}$平行。由此可知：點 $P_2$、$A_1$、$P_3$ 共線且直線 $P_2A_1P_3$與直線 $A_2A_3$平行。同理，直線 $P_3A_2P_1$與直線 $A_3A_1$平行、直線 $P_1A_3P_2$與直線 $A_1A_2$平行。於是，$\square A_1A_2P_1A_3$是平行四邊形，$\overline{A_1P_1}$通過$\overline{A_2A_3}$的中點。

(4) 若$\overline{A_1A_2}=\overline{A_1A_3}$，則垂心、外心、重心、九點圓圓心都在$\overline{A_2A_3}$的垂直平分線上。設$\overline{A_1A_2}\neq\overline{A_1A_3}$。因爲$\triangle A_2A_3P_1$是底角爲$90^0-\alpha_1$的等腰三角形，所以，若$\triangle A_1A_2A_3$的外心爲點 O，$\overline{A_2A_3}$的中點爲 $O_1$，則$\overline{OP_1}$垂直平分$\overline{A_2A_3}$於 $O_1$。另一方面，因爲$\angle A_2P_1A_3=180^0-(90^0-\alpha_1)-(90^0-\alpha_1)=2\alpha_1$，而$\angle A_2OA_3=2\angle A_2A_1A_3=2\alpha_1$，所以，$\square OA_2P_1A_3$是菱形，$\overline{A_2A_3}$也垂直平分$\overline{OP_1}$於 $O_1$。設$\triangle A_1A_2A_3$的垂心爲點 H。因爲$\overline{A_1A_2}\neq\overline{A_1A_3}$，所以，直線 $A_1O_1$與 OH 相異。依 Euler 定理，中線$\overline{A_1O_1}$與 Euler 線$\overline{OH}$相交於$\triangle A_1A_2A_3$的重心 G，而且$\overline{GH}=2\overline{OG}$。依相似三角形的性質，可知$\overline{A_1H}:\overline{OO_1}=\overline{GH}:\overline{OG}=2$，$\overline{A_1H}=2\overline{OO_1}=\overline{OP_1}$。於是，$\square A_1OP_1H$爲平行四邊形，$\overline{A_1P_1}$通過$\overline{OH}$的中點，此中點就是$\triangle A_1A_2A_3$的九點圓圓心。參看圖 22(1)。




(1)




(2)

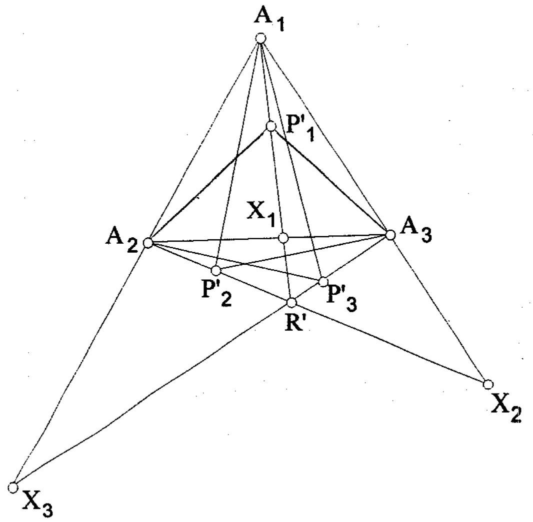
圖 22

(5) 考慮$\triangle A_1A_2A_3$的外接圓，因爲$\angle A_2A_1P_3=\beta_{13}=\alpha_3=\angle A_1A_3A_2$，所以，依弦切

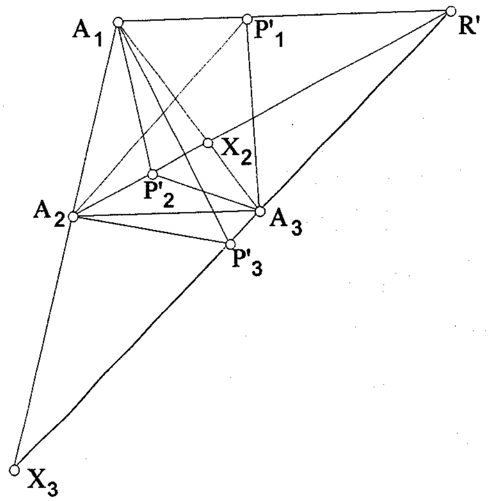
角定理，直線 $A_1P_3$ 與$\triangle A_1A_2A_3$ 的外接圓相切於點 $A_1$。因為$\angle A_3A_1P_2=\beta_{12}=\alpha_2=\angle A_3A_2A_1$，所以，直線 $A_1P_2$ 與外接圓相切於點 $A_1$。於是，點 $A_1$、$P_2$ 與 $P_3$ 共線，而且直線 $P_2P_3$ 與外接圓相切於點 $A_1$。同理，直線 $P_3P_1$、$P_1P_2$ 分別與外接圓相切於點 $A_2$、$A_3$。參看圖 22(2)。 ‖

定理 28、30 與 31 也可推廣至向內作三角形的情形。

**定理** 33：設$\triangle A_1A_2A_3$為任意三角形。若$\triangle A_2A_3P_1'$、$\triangle A_3A_1P_2'$與$\triangle A_1A_2P_3'$為向內作出的三角形，點 $P_1'$、$P_2'$與 $P_3'$都不是$\triangle A_1A_2A_3$的頂點，而且$\angle A_2A_1P_3'=\angle A_3A_1P_2'$、$\angle A_1A_2P_3'=\angle A_3A_2P_1'$、$\angle A_1A_3P_2'=\angle A_2A_3P_1'$，則直線 $A_1P_1'$、$A_2P_2'$與 $A_3P_3'$共點或兩兩平行。



(1)



(2)

圖 23

**定理** 34：設$\triangle A_1A_2A_3$為任意三角形，$0^\circ<\phi<90^\circ$。若$\triangle A_2A_3P_1'$、$\triangle A_3A_1P_2'$與$\triangle A_1A_2P_3'$是分別以$\triangle A_1A_2A_3$ 的三邊為底邊、$\phi$為底角且向內作出的相似等腰三角形，點 $P_1'$、$P_2'$與 $P_3'$都不是$\triangle A_1A_2A_3$的頂點，則直線 $A_1P_1'$、$A_2P_2'$與 $A_3P_3'$共點或兩兩平行。

定理 33 與定理 34 都是下面定理 35 的特殊情形，我們將它們的證明略去，而只證明定理 35。

**定理** 35：設$\triangle A_1A_2A_3$為任意三角形。若$\triangle A_2A_3P_1'$、$\triangle A_3A_1P_2'$與$\triangle A_1A_2P_3'$為向內作出的三角形，點 $P_1'$、$P_2'$與 $P_3'$都不在直線 $A_2A_3$、$A_3A_1$ 或 $A_1A_2$ 上，而且$\angle A_3A_1P_2'=\beta_{12}$、$\angle A_2A_1P_3'=\beta_{13}$、$\angle A_1A_2P_3'=\beta_{23}$、$\angle A_3A_2P_1'=\beta_{21}$、$\angle A_2A_3P_1'=\beta_{31}$、$\angle A_1A_3P_2'=\beta_{32}$，則直線 $A_1P_1'$、$A_2P_2'$與 $A_3P_3'$共點或兩兩平行的充要條件是

$$\frac{\sin\beta_{12}\sin\beta_{23}\sin\beta_{31}}{\sin\beta_{13}\sin\beta_{21}\sin\beta_{32}}=\frac{\sin(\alpha_1-\beta_{12})\sin(\alpha_2-\beta_{23})\sin(\alpha_3-\beta_{31})}{\sin(\alpha_1-\beta_{13})\sin(\alpha_2-\beta_{21})\sin(\alpha_3-\beta_{32})}\text{。}$$

**證**：因爲點 $P_1'$ 、 $P_2'$ 與 $P_3'$ 都不在直線 $A_2A_3$、$A_3A_1$ 或 $A_1A_2$ 上，所以，$\beta_{12}\neq\alpha_1$、$\beta_{13}\neq\alpha_1$、$\beta_{23}\neq\alpha_2$、$\beta_{21}\neq\alpha_2$、$\beta_{31}\neq\alpha_3$ 且 $\beta_{32}\neq\alpha_3$。因爲 $\overline{A_2P_1'}\sin\beta_{21}=\overline{A_3P_1'}\sin\beta_{31}$、$\overline{A_3P_2'}\sin\beta_{32}=\overline{A_1P_2'}\sin\beta_{12}$ 且 $\overline{A_1P_3'}\sin\beta_{13}=\overline{A_2P_3'}\sin\beta_{23}$，所以，將三式相乘即得

$$\frac{\overline{A_2P_1'}}{\overline{A_3P_1'}}\times\frac{\overline{A_3P_2'}}{\overline{A_1P_2'}}\times\frac{\overline{A_1P_3'}}{\overline{A_2P_3'}}=\frac{\sin\beta_{12}\sin\beta_{23}\sin\beta_{31}}{\sin\beta_{13}\sin\beta_{21}\sin\beta_{32}}\text{。}$$

首先，假設直線 $A_kP_k'$ 與 $A_{k+1}A_{k+2}$ 相交於一點 $X_k$，$k=1, 2, 3$，如圖 23(1)所示。因爲點 $P_1'$ 、 $P_2'$ 與 $P_3'$ 都不在直線 $A_2A_3$、$A_3A_1$ 與 $A_1A_2$ 上，所以，$X_k\neq A_{k+1}$ 且 $X_k\neq A_{k+2}$。因爲 $\overline{A_2X_1}:\overline{A_3X_1}$ 等於($\triangle A_2A_1P_1'$ 的面積)：($\triangle A_3A_1P_1'$ 的面積)，所以，不論點 $X_1$ 是邊 $\overline{A_2A_3}$ 的內分點或是 $\overline{A_2A_3}$ 的外分點，恆有 $[A_2A_3/X_1]=\overline{A_1A_2}\ \overline{A_2P_1'}\sin(\alpha_2-\beta_{21}):\overline{A_1A_3}\ \overline{A_3P_1'}\ \sin(\alpha_3-\beta_{31})$。同理，更進一步可得

$$\begin{aligned}&[A_2A_3/X_1][A_3A_1/X_2][A_1A_2/X_3]\\&=\frac{\overline{A_1A_2}}{\overline{A_1A_3}}\ \frac{\overline{A_2P_1'}}{\overline{A_3P_1'}}\ \frac{\sin(\alpha_2-\beta_{21})}{\sin(\alpha_3-\beta_{31})}\times\frac{\overline{A_2A_3}}{\overline{A_2A_1}}\ \frac{\overline{A_3P_2'}}{\overline{A_1P_2'}}\ \frac{\sin(\alpha_3-\beta_{32})}{\sin(\alpha_1-\beta_{12})}\times\frac{\overline{A_3A_1}}{\overline{A_3A_2}}\ \frac{\overline{A_1P_3'}}{\overline{A_2P_3'}}\ \frac{\sin(\alpha_1-\beta_{13})}{\sin(\alpha_2-\beta_{23})}\\&=\frac{\sin\beta_{12}\sin\beta_{23}\sin\beta_{31}}{\sin\beta_{13}\sin\beta_{21}\sin\beta_{32}}\times\frac{\sin(\alpha_1-\beta_{13})\sin(\alpha_2-\beta_{21})\sin(\alpha_3-\beta_{32})}{\sin(\alpha_1-\beta_{12})\sin(\alpha_2-\beta_{23})\sin(\alpha_3-\beta_{31})}\text{。}\end{aligned}$$

依 Ceva 定理，直線 $A_1P_1'$ 、 $A_2P_2'$ 與 $A_3P_3'$ 共點或兩兩平行的充要條件是：三個有向分比的乘積 $[A_2A_3/X_1][A_3A_1/X_2][A_1A_2/X_3]=1$，而依上式，此等式與定理欲證的等式相同。

其次，設直線 $A_1P_1'$ 與 $A_2A_3$ 平行，如圖 23(2)所示。因爲點 $P_2'$ 不在直線 $A_2A_3$ 上，所以，直線 $A_2P_2'$ 與 $A_1P_1'$ 相交於一點 $R_2'$。同理，直線 $A_3P_3'$ 與 $A_1P_1'$ 相交於一點 $R_3'$。於是，直線 $A_1P_1'$、$A_2P_2'$ 與 $A_3P_3'$ 共點的充要條件是 $R_2'=R_3'$。因爲直線 $A_1P_1'$ 與直線 $A_2A_3$ 平行，所以，點 $A_2$ 與 $A_3$ 至直線 $A_1P_1'$ 的距離相等。於是，$\triangle A_2A_1P_1'$ 與 $\triangle A_3A_1P_1'$ 的面積相等，而且 $R_2'=R_3'$ 的充要條件是 $\triangle A_1A_2R_2'$ 與 $\triangle A_1A_3R_3'$ 的面積相等。因爲 $R_2'$ 與 $R_3'$ 至直線 $A_2A_3$ 的距離相等，所以，$\triangle A_3A_2R_2'$ 與 $\triangle A_2A_3R_3'$ 的面積相等。於是，得

$$\begin{aligned}&\frac{\Delta A_1A_3R_3'\text{的面積}}{\Delta A_1A_2R_2'\text{的面積}}\\&=\frac{\Delta A_3A_2R_2'\text{ 的面積}}{\Delta A_1A_2R_2'\text{ 的面積}}\times\frac{\Delta A_1A_3R_3'\text{ 的面積}}{\Delta A_2A_3R_3'\text{ 的面積}}\\&=\frac{\Delta A_3A_2P_2'\text{ 的面積}}{\Delta A_1A_2P_2'\text{ 的面積}}\times\frac{\Delta A_1A_3P_3'\text{ 的面積}}{\Delta A_2A_3P_3'\text{ 的面積}}\end{aligned}$$

$$=\frac{\Delta A_2A_1P_1'\text{的面積}}{\Delta A_3A_1P_1'\text{的面積}}\times\frac{\Delta A_3A_2P_2'\text{的面積}}{\Delta A_1A_2P_2'\text{的面積}}\times\frac{\Delta A_1A_3P_3'\text{的面積}}{\Delta A_2A_3P_3'\text{的面積}}$$

$$=\frac{\overline{A_1A_2}}{\overline{A_1A_3}}\,\frac{\overline{A_2P_1'}}{\overline{A_3P_1'}}\,\frac{\sin(\alpha_2-\beta_{21})}{\sin(\alpha_3-\beta_{31})}\times\frac{\overline{A_2A_3}}{\overline{A_2A_1}}\,\frac{\overline{A_3P_2'}}{\overline{A_1P_2'}}\,\frac{\sin(\alpha_3-\beta_{32})}{\sin(\alpha_1-\beta_{12})}\times\frac{\overline{A_3A_1}}{\overline{A_3A_2}}\,\frac{\overline{A_1P_3'}}{\overline{A_2P_3'}}\,\frac{\sin(\alpha_1-\beta_{13})}{\sin(\alpha_2-\beta_{23})}$$

$$=\frac{\sin\beta_{12}\sin\beta_{23}\sin\beta_{31}}{\sin\beta_{13}\sin\beta_{21}\sin\beta_{32}}\times\frac{\sin(\alpha_1-\beta_{13})\sin(\alpha_2-\beta_{21})\sin(\alpha_3-\beta_{32})}{\sin(\alpha_1-\beta_{12})\sin(\alpha_2-\beta_{23})\sin(\alpha_3-\beta_{31})}\text{。}$$

由此可知：直線 $A_1P_1'$ 、 $A_2P_2'$ 與 $A_3P_3'$ 共點的充要條件是定理的等式成立。 ‖

定理 33 是定理 35 在 $\beta_{12}=\beta_{13}$、$\beta_{23}=\beta_{21}$、$\beta_{31}=\beta_{32}$ 時的特例，而定理 34 則是定理 33 在 $\beta_1=\beta_2=\beta_3=\phi$ 時的特例。有一點值得一提：定理 34 與定理 30 有一點不同，當相似等腰三角形係向內作時，直線 $A_1P_1'$ 、 $A_2P_2'$ 與 $A_3P_3'$ 可能兩兩平行，仿圖 18(2)以等腰三角形爲例即可作出一個反例的圖形。

## 己、結尾語

將 Fermat 極值問題朝著幾個不同方向加以推廣，我們獲得不少有趣的結果。除了本文所討論的內容之外，還有另一個有趣的問題值得另闢一段篇幅來討論。我們將問題提出來做爲本文的結尾，有興趣的讀者可自行加以探討。

在定理 30 與定理 34 中，我們分別以 $\triangle A_1A_2A_3$ 的三邊做爲底邊，向外及向內作出三個底角爲 $\phi$ 的相似等腰三角形 $\triangle A_2A_3P_1$、$\triangle A_3A_1P_2$ 與 $\triangle A_1A_2P_3$，則直線 $A_1P_1$、$A_2P_2$ 與 $A_3P_3$ 交於一點 R。更進一步地，根據 Desargues 定理，直線 $A_2A_3$ 與 $P_2P_3$ 的交點、直線 $A_3A_1$ 與 $P_3P_1$ 的交點、直線 $A_1A_2$ 與 $P_1P_2$ 的交點等三點必落在一直線 L 上。我們的問題是：當角 $\phi$ 在某段區間上變動時，例如 $-90^\circ$ 至 $90^\circ$，則點 R 的軌跡爲何種曲線？直線 L 的包絡線爲何種曲線？此二曲線具有那些性質？探討這些性質，不難發現在三角形的幾何中，還存在著許多可供探討的問題呢！

## 參考資料


1. Coxeter, H. S. M. 1961. Introduction to Geometry. John Wiley & Sons, Inc., New York.
2. Coxeter, H. S. M. & Greitzer, S. L. 1967. Geometry Revisited. Mathematical Association of America, Washington, D. C.
3. Hajja, M. 1994. An Advanced Calculus Approach to Finding the Fermat Point. Math. Mag. Vol. 67, no. 1, pp29-34.
4. Johnson, R. A. 1960. Advanced Euclidean Geometry. Dover Publications, Inc., New York.
5. Kay, D. C. 1969. College Geometry. Holt, Rinehart and Winston. New York.

6. Rigby, J. F. 1988. Napoleon Revisited. J. of Geometry. Vol. 33, pp129-146.

7. Sommerville, D. M. Y. 1924. Analytical Conics. G. Bell & Sons, Ltd. London.

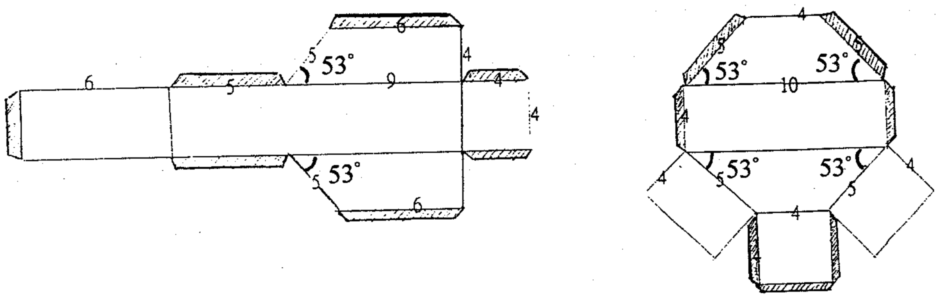
8. Tong, J. C. & Chua, Y. S. 1995. The Generalized Fermat's Point. Math. Mag.Vol. 68, no. 3, pp214-215.

9. Venkatramaiah, V. S. R. A Remark on a Note of S. M. Shah. Math. Mag. pp225.

10. Villers, M. D. 1995. A Generalization of the Fermat-Torricelli Point. Math. Gaz. Vol. 79, no. 485, pp374-378.

11. 許振榮：關於 Ptolemy 的定理。數學傳播，第七卷，第三期，七十二年九月。

（上接 49 頁）




（圖三）

## 參考書目

(1)國立編譯館（民 87）：國中地球科學（上冊）第五章 P77 ，活動 5-2，國立編譯館出版。