Fermat 極值問題及其推廣（續）

趙文敏
國立臺灣師範大學　數學系

丁、以微積分方法探討 Fermat 極值問題

熟悉微積分方法的人，在遇到極值問題時最先想到的，大概都是利用(偏)導數方法來探討相關的極值。Fermat 極值問題提出後，先後出現的許多解法都是非微積分的方法。這種現象持續了很長時間後，難免讓人懷疑微積分方法對 Fermat 極值問題無從著力。事實上，在時隔三百年之後，D.C.Kay 在他的大作 College Geometry [5]中還寫了這樣的詞句："Any attempt to solve this by means of calculus would most probably end in considerable frustration."（試圖以微積分解決此問題，恐將遭遇重大挫折。)實情確是如此嗎？在 [3]中，Mowaffaq Hajja 作了嘗試。他利用微積分方法討論定理 4 與定理 9 中的極小值問題。下面我們將[3]中的方法推廣到定理 16 與定理 19 中的極小值問題。

設$\triangle A_1A_2A_3$為任意三角形，b_1、b_2與 b_3 為正數。對於$\triangle A_1A_2A_3$平面上每個點 P，我們要以微積分方法討論 $b_1\overline{A_1P}+b_2\overline{A_2P}+b_3\overline{A_3P}$ 的最小值及產生最小值的點。

在$\triangle A_1A_2A_3$平面上選取一個直角坐標系，設三頂點 A_1、A_2 與 A_3 的直角坐標分別為 $A_1(x_1, y_1)$、$A_2(x_2, y_2)$與 $A_3(x_3, y_3)$。對於坐標平面上任意點 P(x, y)，令

$$f(x, y)=b_1\sqrt{(x-x_1)^2+(y-y_1)^2}+b_2\sqrt{(x-x_2)^2+(y-y_2)^2}+b_3\sqrt{(x-x_3)^2+(y-y_3)^2}\ 。$$

為簡化記號，我們令 $r_k(x, y)=\sqrt{(x-x_k)^2+(y-y_k)^2}$，$k=1, 2, 3$。當點 P(x, y)滿足 $r_k(x, y)\neq 0$ 時，$k=1, 2, 3$，函數 f 在點 P(x, y) 的兩個偏導數分別為

$$D_1 f(x, y)=\frac{b_1(x-x_1)}{r_1(x,y)}+\frac{b_2(x-x_2)}{r_2(x,y)}+\frac{b_3(x-x_3)}{r_3(x,y)}\ ,$$

$$D_2 f(x, y)=\frac{b_1(y-y_1)}{r_1(x,y)}+\frac{b_2(y-y_2)}{r_2(x,y)}+\frac{b_3(y-y_3)}{r_3(x,y)}\ 。$$

若 $D_1 f(x, y)=D_2 f(x, y)=0$ 有解，設其解為點 $R(x_0, y_0)$，則三維向量

$$\left(\frac{b_1}{r_1(x_0,y_0)},\frac{b_2}{r_2(x_0,y_0)},\frac{b_3}{r_3(x_0,y_0)}\right)$$

與兩個三維向量$(x_0-x_1, x_0-x_2, x_0-x_3)$、$(y_0-y_1, y_0-y_2, y_0-y_3)$都垂直。換言之，前一向量與後二向量的外積平行。此外積的第一個分量為

$$\begin{aligned}&(x_0-x_2)(y_0-y_3)-(x_0-x_3)(y_0-y_2)\\&=2\times(\triangle RA_2A_3\text{的有向面積})=\pm r_2(x_0, y_0)\, r_3(x_0, y_0)\sin\angle A_2RA_3\ 。\end{aligned}$$

所謂$\triangle RA_2A_3$的有向面積，其意義如下：若沿著$\triangle RA_2A_3$的邊由點R至點A_2至點A_3的方向爲逆時針方向，則$\triangle RA_2A_3$的有向面積就是它的面積，此時的有向面積爲一正數；若沿著$\triangle RA_2A_3$的邊由點R至點A_2至點A_3的方向爲順時針方向，則$\triangle RA_2A_3$的有向面積就是它的面積乘以(-1)，此時的有向面積爲一負數。同理可知：前述外積的第二與第三分量分別爲 $(\pm r_3(x_0, y_0)\, r_1(x_0, y_0) \sin\angle A_3RA_1)$ 與$(\pm r_1(x_0, y_0)\, r_2(x_0, y_0) \sin\angle A_1RA_2)$。於是，可得

$$\frac{b_1}{r_1(x_0,y_0)} : \frac{b_2}{r_2(x_0,y_0)} : \frac{b_3}{r_3(x_0,y_0)}$$

$$= (\pm r_2(x_0, y_0)\, r_3(x_0, y_0)\sin\angle A_2RA_3) : (\pm r_3(x_0, y_0)\, r_1(x_0, y_0)\sin\angle A_3RA_1) : (\pm r_1(x_0, y_0)\, r_2(x_0, y_0)\sin\angle A_1RA_2)$$。

因爲上式左端的三個數$b_k/r_k(x_0, y_0)$都是正數，$k=1, 2, 3$，所以，三個三角形$\triangle RA_2A_3$、$\triangle RA_3A_1$與$\triangle RA_1A_2$的有向面積全部同號，這表示點R在$\triangle A_1A_2A_3$的內部。因此，上述三個$\pm$號可以都選取+號，而上述比例式可改寫成

$$b_1 : b_2 : b_3 = \sin\angle A_2RA_3 : \sin\angle A_3RA_1 : \sin\angle A_1RA_2。$$

令$\beta_1 = 180^\circ - \angle A_2RA_3$、$\beta_2 = 180^\circ - \angle A_3RA_1$、$\beta_3 = 180^\circ - \angle A_1RA_2$。因爲點R在$\triangle A_1A_2A_3$的內部，所以，$\angle A_2RA_3 + \angle A_3RA_1 + \angle A_1RA_2 = 360^\circ$。於是，$\beta_1 + \beta_2 + \beta_3 = 180^\circ$。作一個三角形$\triangle B_1B_2B_3$，使其三內角依次爲$\beta_1$、$\beta_2$與$\beta_3$。因爲$b_1 : b_2 : b_3 = \sin\beta_1 : \sin\beta_2 : \sin\beta_3$，所以，依正弦定律，知$\triangle B_1B_2B_3$的三邊長之比等於$b_1 : b_2 : b_3$。依三角形不等式，得$b_1 < b_2 + b_3$、$b_2 < b_3 + b_1$且$b_3 < b_1 + b_2$。另一方面，因爲點R在$\triangle A_1A_2A_3$的內部，所以，$\angle A_2RA_3 > \angle A_2A_1A_3$。於是，$180^\circ - \beta_1 > \alpha_1$，或$\alpha_1 + \beta_1 < 180^\circ$。同理可得$\alpha_2 + \beta_2 < 180^\circ$及$\alpha_3 + \beta_3 < 180^\circ$。至於點R的作法，我們說明如下：以$\triangle A_1A_2A_3$的各邊爲一邊向外任作三個三角形$\triangle A_2A_3P_1$、$\triangle A_3A_1P_2$與$\triangle A_1A_2P_3$，使得$\angle A_2P_1A_3 = \beta_1$、$\angle A_3P_2A_1 = \beta_2$且$\angle A_1P_3A_2 = \beta_3$，則依後文中的定理24，可知$\triangle A_2A_3P_1$、$\triangle A_3A_1P_2$與$\triangle A_1A_2P_3$的外接圓必共點，其交點就是點R。

根據前段的論證，可知：若b_1、b_2與b_3不能做爲某三角形的三邊長，或是b_1、b_2與b_3分別爲$\triangle B_1B_2B_3$的三邊長但有某個$k=1, 2, 3$滿足$\alpha_k + \beta_k \geqq 180^\circ$，則函數f的最小值不會發生在f的臨界點(即滿足$D_1 f(x, y) = D_2 f(x, y) = 0$的點)。於是，f的最小值必發生在偏導數不存在的點，這種點只有三個，它們就是頂點A_1、A_2與A_3。若$b_1 \geqq b_2 + b_3$而(x, y)是點P的坐標，則

$$\begin{aligned} f(x, y) &= b_1 r_1(x, y) + b_2 r_2(x, y) + b_3 r_3(x, y) \\ &= b_1 \overline{A_1P} + b_2 \overline{A_2P} + b_3 \overline{A_3P} \end{aligned}$$

$$\geqq b_2(\overline{A_1P}+\overline{A_2P})+b_3(\overline{A_1P}+\overline{A_3P})$$
$$\geqq b_2\overline{A_1A_2}+b_3\overline{A_1A_3}$$
$$=f(x_1, y_1)。$$

換言之，函數 f 的最小值發生在頂點 A_1。另一方面，設三正數 b_1、b_2 與 b_3 分別爲$\triangle B_1B_2B_3$ 的三邊長，但$\alpha_1+\beta_1\geqq 180^0$。以 $\overline{A_1A_2}$ 爲一邊向外作一個三角形$\triangle A_1A_2P_3$ 使得$\triangle A_1A_2P_3 \sim \triangle B_1B_2B_3$，如圖 9(2)所示。因爲$\angle A_3A_1A_2+\angle A_2A_1P_3=\alpha_1+\beta_1\geqq 180^0$，所以，當$\alpha_1+\beta_1=180^0$時，$A_1$ 在 $\overline{A_3P_3}$ 上；當$\alpha_1+\beta_1>180^0$時，點 A_2 與點 A_3 在直線 A_1P_3 異側且點 A_2 與點 P_3 在直線 A_3A_1 異側，這表示點 A_1 在$\triangle A_2A_3P_3$ 的內部。不論點 A_1 在 $\overline{A_3P_3}$ 上或在$\triangle A_2A_3P_3$ 的內部，都可得 $\overline{A_1A_3}+\overline{A_1P_3}<\overline{A_2A_3}+\overline{A_2P_3}$。因爲 $\overline{A_2P_3}:\overline{A_1P_3}:\overline{A_1A_2}=\sin\beta_1:\sin\beta_2:\sin\beta_3=b_1:b_2:b_3$，所以，得 $\overline{A_1P_3}=(b_2a_3)/b_3$ 及 $\overline{A_2P_3}=(b_1a_3)/b_3$。於是，代入上式得 $a_2+(b_2a_3)/b_3<a_1+(b_1a_3)/b_3$。由此得

$$f(x_1, y_1)=b_2\overline{A_1A_2}+b_3\overline{A_1A_3}=b_2a_3+b_3a_2$$
$$<b_1a_3+b_3a_1=b_1\overline{A_1A_2}+b_3\overline{A_2A_3}=f(x_2, y_2)。$$

同理，可得 $f(x_1, y_1)<f(x_3, y_3)$。由此可知：函數 f 的最小值發生在頂點 A_1。

前面所討論的結果，可寫成下面的結論。

定理 22：設$\triangle A_1A_2A_3$爲任意三角形，b_1、b_2 與 b_3 爲正數。對於$\triangle A_1A_2A_3$平面上任意點 P，$b_1\overline{A_1P}+b_2\overline{A_2P}+b_3\overline{A_3P}$的最小值所對應的點 R 具有下述性質：

(1) 若 $b_1\geqq b_2+b_3$，則 $R=A_1$。

(2) 設正數 b_1、b_2 與 b_3 分別爲$\triangle B_1B_2B_3$的三邊長，其三內角爲β_1、β_2與β_3。

(i) 若$\alpha_1+\beta_1\geqq 180^0$，則 $R=A_1$。

(ii) 若$\alpha_1+\beta_1<180^0$、$\alpha_2+\beta_2<180^0$且$\alpha_3+\beta_3<180^0$，則點 R 就是定理 15 與定理 16 所定義的點 R。

其次，我們考慮另一個極小值問題。

設$\triangle A_1A_2A_3$爲任意三角形，b_1、b_2 與 b_3 爲正數。對於$\triangle A_1A_2A_3$平面上每個點 P，我們要以微積分方法討論$-b_1\overline{A_1P}+b_2\overline{A_2P}+b_3\overline{A_3P}$的最小值及產生最小值的點。

在$\triangle A_1A_2A_3$平面上選取一個直角坐標系，設三頂點 A_1、A_2 與 A_3 的直角坐標分別爲 $A_1(x_1, y_1)$、$A_2(x_2, y_2)$與 $A_3(x_3, y_3)$。對於坐標平面上任意點 $P(x, y)$，令

$$g(x, y)=-b_1r_1(x, y)+b_2r_2(x, y)+b_3r_3(x, y),$$

其中，$r_k(x, y)=\sqrt{(x-x_k)^2+(y-y_k)^2}$，$k=1, 2, 3$。當點 $P(x, y)$滿足 $r_k(x, y)\neq 0$ 時，$k=1, 2, 3$，函數 g 在點 $P(x, y)$的兩個偏導數分別爲

$$D_1 g(x, y) = -\frac{b_1(x-x_1)}{r_1(x,y)} + \frac{b_2(x-x_2)}{r_2(x,y)} + \frac{b_3(x-x_3)}{r_3(x,y)},$$

$$D_2 g(x, y) = -\frac{b_1(y-y_1)}{r_1(x,y)} + \frac{b_2(y-y_2)}{r_2(x,y)} + \frac{b_3(y-y_3)}{r_3(x,y)}。$$

若 $D_1 g(x, y) = D_2 g(x, y) = 0$ 有解，設其解爲點 $R'(x_0', y_0')$，則三維向量

$$\left(\frac{-b_1}{r_1(x_0',y_0')}, \frac{b_2}{r_2(x_0',y_0')}, \frac{b_3}{r_3(x_0',y_0')}\right)$$

與兩個三維向量$(x_0'-x_1,\ x_0'-x_2,\ x_0'-x_3)$、$(y_0'-y_1,\ y_0'-y_2,\ y_0'-y_3)$都垂直。換言之，前一向量與後二向量的外積平行。仿前面的討論，可得

$$\frac{-b_1}{r_1(x_0',y_0')} : \frac{b_2}{r_2(x_0',y_0')} : \frac{b_3}{r_3(x_0',y_0')}$$

$=(\triangle R'A_2A_3$的有向面積$):(\triangle R'A_3A_1$的有向面積$):(\triangle R'A_1A_2$的有向面積$)$。

因爲上式左端的第一項爲負值，而第二與第三項爲正值，所以，$\triangle R'A_2A_3$的有向面積與$\triangle R'A_3A_1$、$\triangle R'A_1A_2$的有向面積都異號。當由 A_1 至 A_2 至 A_3 的方向是逆時針方向時，若$\triangle R'A_2A_3$的有向面積爲正而$\triangle R'A_3A_1$、$\triangle R'A_1A_2$的有向面積都爲負，則點 R' 在$\angle A_2A_1A_3$的對頂角的內部，即圖 16 中陰影部分的上部；若$\triangle R'A_2A_3$的有向面積爲負而$\triangle R'A_3A_1$、$\triangle R'A_1A_2$的有向面積都爲正，則點 R' 在$\angle A_2A_1A_3$的內部、但不在$\triangle A_1A_2A_3$的內部、也不在$\overline{A_2A_3}$上，即圖 16 中陰影部分的下部。當點 R' 在這兩區域中時，點 A_1 必在$\angle A_2R'A_3$的內部。仿前述對於函數 f 之極值的討論，將各有向面積以兩邊夾角的公式配合適當正負號表出，立即可得

$$b_1 : b_2 : b_3 = \sin\angle A_2R'A_3 : \sin\angle A_3R'A_1 : \sin\angle A_1R'A_2。\qquad (*)$$

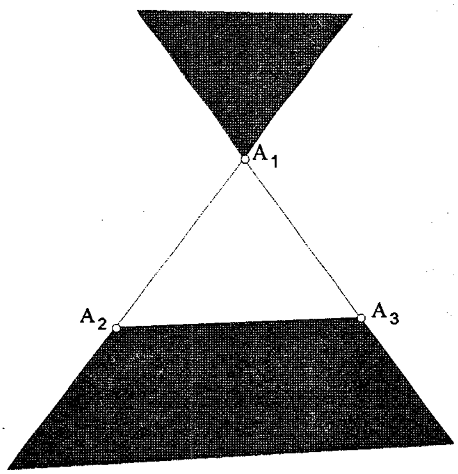

圖 16

因爲點 A_1 在 $\angle A_2R'A_3$ 的內部，所以，$\angle A_2R'A_3 = \angle A_3R'A_1 + \angle A_1R'A_2$。令 $\beta_1 = 180^0 - \angle A_2R'A_3$、$\beta_2 = \angle A_3R'A_1$、$\beta_3 = \angle A_1R'A_2$，則 $\beta_1+\beta_2+\beta_3=180^0$。作一個三角形 $\triangle B_1B_2B_3$ 使其內角依次爲 β_1、β_2 與 β_3。因爲依(*)式可知 $b_1 : b_2 : b_3 = \sin\beta_1 : \sin\beta_2 : \sin\beta_3$，所以，依正弦定律，可知 $\triangle B_1B_2B_3$ 的三邊長之比等於 $b_1 : b_2 : b_3$。於是，可得 $b_1 < b_2 + b_3$、$b_2 < b_3 + b_1$ 而且 $b_3 < b_1 + b_2$。

其次，我們要證明：若點 $R'(x'_0, y'_0)$ 是函數 g 的最小點，則點 R' 與點 A_1 在直線 A_2A_3 異側，而且 $\alpha_1 < \beta_1$、$\alpha_2 > \beta_2$、$\alpha_3 > \beta_3$ 或 $\alpha_k = \beta_k$，$k=1, 2, 3$。由此即可得知點 R' 位於 $\angle A_2A_1A_3$ 的內部且在 $\triangle A_1A_2A_3$ 的外部。作 $\triangle R'A_2A_3$ 的外接圓。因爲點 A_1 在 $\angle A_2R'A_3$ 的內部，所以，直線 A_1R' 與 $\overline{A_2A_3}$ 必有一交點 D'_1。設直線 A_1R' 與此外接圓的另一交點爲 P'_1。因爲直線 A_1R' 與此外接圓的弦 $\overline{A_2A_3}$ 相交，所以，此直線與外接圓的兩個交點 R' 與 P'_1 必相異且位於直線 A_2A_3 的異側。因爲點 R' 與點 P'_1 位於直線 A_2A_3 的異側，而且點 R' 不在 $\triangle A_1A_2A_3$ 的內部，所以，點 R' 不能介於點 A_1 與點 P'_1 之間。於是，在直線 A_1R' 上，點 A_1 與點 P'_1 位於點 R' 的同側。因爲□$R'A_2P'_1A_3$ 是四頂點共圓的四邊形且射線 $\overrightarrow{R'A_1}$ 與射線 $\overrightarrow{R'P'_1}$ 重合，所以，$\angle A_2A_3P'_1 = \angle A_2R'P'_1 = \angle A_2R'A_1 = \beta_3$ 而且 $\angle A_3A_2P'_1 = \angle A_3R'P'_1 = \angle A_3R'A_1 = \beta_2$。於是，$\triangle P'_1A_2A_3 \sim \triangle B_1B_2B_3$。由此得 $\overline{A_2P'_1} : \overline{A_2A_3} = b_3 : b_1$ 且 $\overline{A_3P'_1} : \overline{A_2A_3} = b_2 : b_1$。另一方面，依 Ptolemy 定理，可得 $\overline{A_3P'_1} \times \overline{A_2R'} + \overline{A_2P'_1} \times \overline{A_3R'} = \overline{A_2A_3} \times \overline{R'P'_1}$ 或 $(b_2 a_1/b_1)\overline{A_2R'} + (b_3 a_1/b_1)\overline{A_3R'} = a_1\overline{R'P'_1}$。於是，得

$$g(x'_0, y'_0) = -b_1\overline{A_1R'} + b_2\overline{A_2R'} + b_3\overline{A_3R'} = -b_1\overline{A_1R'} + b_1\overline{R'P'_1},$$

$$g(x_2, y_2) = -b_1\overline{A_1A_2} + b_3\overline{A_2A_3} = -b_1\overline{A_1A_2} + b_1\overline{A_2P'_1} < b_1\overline{A_1P'_1}.$$

因爲 $g(x'_0, y'_0) \leqq g(x_2, y_2)$，所以，$-\overline{A_1R'} + \overline{R'P'_1} < \overline{A_1P'_1}$，這表示點 A_1 不能介於點 R' 與點 P'_1 之間。由此可知：點 P'_1 介於點 A_1 與點 R' 之間，或是 $P'_1 = A_1$，也因此點 A_1、點 P'_1 都與點 R' 位於直線 A_2A_3 的異側。若 $P'_1 \neq A_1$，則點 P'_1 在 $\triangle A_1A_2A_3$ 的內部，而且

$$\alpha_1 = \angle A_2A_1A_3 < \angle A_2P'_1A_3 = \beta_1,$$

$$\alpha_2 = \angle A_3A_2A_1 > \angle A_3A_2P'_1 = \beta_2,$$

$$\alpha_3 = \angle A_1A_3A_2 > \angle P'_1A_3A_2 = \beta_3.$$

至於點 R' 的作法，則依定理 18 即得。若 $P'_1 = A_1$，則 $\beta_1 = \alpha_1$、$\beta_2 = \alpha_2$ 而且 $\beta_3 = \alpha_3$，也因此 $\triangle B_1B_2B_3 \sim \triangle A_1A_2A_3$，$b_1 : b_2 : b_3 = a_1 : a_2 : a_3$。在此情形中，函數 g 的最小點並非唯一。因爲在 $\triangle A_1A_2A_3$ 的外接圓上，端點爲 A_2 與 A_3 而不過頂點 A_1 的弧上每個點都是函數 g 的最小點，其理由如下：若點 R' 是此段弧上任意點，則依 Ptolemy 定理，得 $\overline{A_3A_1} \times \overline{A_2R'} + \overline{A_1A_2} \times \overline{A_3R'} = \overline{A_2A_3} \times \overline{A_1R'}$，或是 $-a_1\overline{A_1R'} + a_2\overline{A_2R'} + a_3\overline{A_3R'} = 0$。因爲 b_1：

b_2：b_3＝a_1：a_2：a_3，所以，得

$$-b_1\overline{A_1R'}+b_2\overline{A_2R'}+b_3\overline{A_3R'}=0。$$

另一方面，對於$\triangle A_1A_2A_3$平面上每個點 P，恆有$\overline{A_3A_1}\times\overline{A_2P}+\overline{A_1A_2}\times\overline{A_3P}\geqq\overline{A_2A_3}\times\overline{A_1P}$，或是$-a_1\overline{A_1P}+a_2\overline{A_2P}+a_3\overline{A_3P}\geqq 0$。由此可知：前面所提的弧上各點都是函數 g 的最小點。

前面討論的結果，可寫成下面的結論。

定理 23：設$\triangle A_1A_2A_3$爲任意三角形，b_1、b_2與b_3爲正數。對於$\triangle A_1A_2A_3$平面上任意點 P，$-b_1\overline{A_1P}+b_2\overline{A_2P}+b_3\overline{A_3P}$的最小値所對應的點 R' 具有下述性質：

(1) 設正數 b_1、b_2與 b_3分別爲$\triangle B_1B_2B_3$的三邊長，其三內角爲β_1、β_2與β_3。

(i) 若$\alpha_1=\beta_1$、$\alpha_2=\beta_2$且$\alpha_3=\beta_3$，則在$\triangle A_1A_2A_3$的外接圓上，端點爲 A_2與 A_3而不過頂點 A_1的弧上每個點都可以是點 R'。

(ii) 若$\alpha_1<\beta_1$、$\alpha_2>\beta_2$且$\alpha_3>\beta_3$，則點 R' 就是定理 18 與定理 19 所定義的點 R'。

(2) 在(1)的兩種情形以外的其他情形中，點 R' 必是$\triangle A_1A_2A_3$的頂點 A_1。

（上接 56 頁）

經驗老到，會同洪有情、張幼賢兩位教授充分掌握學生解題之思緒，合理地協調出有利之成績。

(4)我國選手對不熟悉之題型，仍然未能突破得分瓶頸，將來除廣搜題庫外，宜加重創意方面之訓練。

(5)我國選手解題之書寫成式稍嫌凌亂，往往依賴閱卷老師重新釐清頭緒，較諸東歐學生解題之有條不紊，也突顯我國高中數學教育之一般性瑕疵。

(6)我國參加八屆 IMO，培養一批優秀之師資及領隊人才，但經年累月難免造成負擔，建議透過觀察員見習方式，延攬數學界同仁參與。

這兩年來，我國選手之成績已趨穩定，參加 IMO 之意義不僅在於(1)發掘及培育資優數學人才，參加國際競試；(2)並藉此營造資優教育之環境；(3)另一方面經由 IMO 活動激勵學生對此國際共通學科之學習志趣；(4)增加大學與高中數學教育工作者之互動；(5)檢討當前數學教材之內涵及教學方式之缺陷。

最後，祝賀六位參賽學生，努力多年終於獲得豐碩成果。陳團長從爭取經費、組團到臨場運籌，包括作息及資訊掌控等盡心盡力，朱亮儒、洪有情及張幼賢三位教授犧牲假期遠赴 Dracula 國度，不眠不休圓滿達成任務，謹此特別致意。