國際數學奧林匹亞競賽(1999 年)試題解答評析

陳昭地*、張幼賢*、朱亮儒*、洪有情*、陳明揚**
*國立臺灣師範大學數學系
**國立臺灣大學電機工程學系

1999 年第 40 屆國際數學奧林匹亞競賽(IMO)是在羅馬尼亞的首都布加勒斯特舉行；本屆共有 81 個國家與會，合計 450 位學生代表參賽。競賽活動是由各國領隊組成的主試委員會(Jury)揭開序幕，除了確認各項議題外，該委員會的一個主要工作是選拔本屆的競賽試題。國際數學奧林匹亞競賽試題之形成是先由各參賽國（主辦國除外）於規定的期限內提交 0～6 道試題（陳昭地、民 80～民 87），再由主辦國試題委員會（Problem Selection Committee）研究選出約 30 題預選題，分屬代數、數論、幾何與組合數學等不同領域及不同難度的試題；最後經由主試委員會票選暨修訂出最後的 6 道ＩＭＯ試題，再依主題內容及難易層次分配成二份試題，分別在連續的兩天中舉行競試，每天 3 道題，考試時間都是 4.5 小時。本屆共有 31 個國家提供試題，經由試題委員會研究篩選出適當的 27 道題；再由各國領隊組成的主試委員會經過三天的會議研究票選出 2 道幾何題、1 道數論題、1 道不等式題、1 道函數方程和 1 道組合題，其中第 4 題是由我國數學奧林匹亞委員會提供的數論題，突破臺灣八次參賽首次入選 IMO 試題之記錄。今年我國六位學生：林家平（高雄中學）、王嘉慶（武陵高中）、葉書蘋（北一女中）、劉育廷（台南一中）、鄧敦民（建國中學）、林宗茂（台中一中）、總成績共得 153 分，榮獲一面金牌及五面銀牌，在 81 隊中名列第 9 名，成績頗爲耀眼；總分前二十名的國家依次爲：俄羅斯與中國大陸並列第一、越南、羅馬尼亞、保加利亞、白俄羅斯、韓國、伊朗、中華民國、美國、匈牙利、烏克蘭、日本、南斯拉夫、澳大利亞、土耳其、德國、印度、波蘭及英國。本文將針對這次我國代表團所翻譯成中文版的六道ＩＭＯ試題提供參考解答，評析解題重點，且就我國六位學生代表答題概況及本屆 81 個參賽國 450 位學生代表的得分加以比較、統計與評析，以供國內相關學者專家、數學教師等輔導數學資優生之研究、應用與參考。

一、第 40 屆國際數學奧林匹亞競賽試題

第一天

布加勒斯特，1999 年 7 月 16 日

中文版（臺灣） *Chinese version（Taiwan）*

考試時間 $4\frac{1}{2}$ 小時

每題 7 分

問題 1.試確定平面上所有的有限點集 S，使得 S 至少含有 3 個點，且滿足下列條件：

對 S 中任意的相異兩點 A、B，線段 A B 的垂直平分線

都是集合 S 的對稱軸。

問題 2.設 n 爲固定的整數，且 $n \geq 2$.

(a)試確定最小的常數 C，使得對所有的非負實數 $x_1,x_2,\cdots,x_n \geq 0$，恒有：

$$\sum_{1\leq i<j\leq n} x_i x_j (x_i^2 + x_j^2) \leq C\left(\sum_{1\leq i\leq n} x_i\right)^4.$$

(b)對此常數 C，試確定等號成立的充要條件。

問題 3.考慮一個 $n\times n$ 格的正方形紙板，其中 n 爲一固定的正偶數，而紙板被劃分成 n^2 個單位小方格。當兩個不同的小方格有一個公共邊時，我們稱這兩個小方格相鄰。現將紙板中 N 個小方格標上記號，使得每一個（有標記號或沒標記號）小方格都至少與一個有標上記號的小方格相鄰。試確定最小的正整數 N 之值。

第二天

布加勒斯特，1999 年 7 月 17 日

中文版（臺灣） *Chinese version（Taiwan）*

考試時間 $4\frac{1}{2}$ 小時

每題 7 分

問題 4.試確定所有的正整數序對(n,p)，使得 p 是質數，$n \leq 2p$，且$(p-1)^n+1$ 可被 n^{p-1} 整除。

問題 5.設 Γ_1 及 Γ_2 爲圓 Γ 內的兩圓，且和圓 Γ 分別相切於 M 及 N 相異兩點。已知 Γ_2 的圓心在 Γ_1 的圓周上，通過圓 Γ_1 與圓 Γ_2 的兩個交點之直線，交圓 Γ 於 A、B，而且直線 MA 及直線 MB 分別交圓 Γ_1 於 C 及 D。證明：CD 爲 Γ_2 的切線。

問題 6.試確定函數 $f: R\rightarrow R$，使得對所有的 $x,y\in R$, 恒有：

$$f(x-f(y))=f(f(y))+xf(y)+f(x)-1$$

二、第 40 屆國際數學奧林匹亞競賽成績統計

根據主辦單位最後確認公布之 1999 年第 40 屆國際數學奧林匹亞競賽 81 個參賽國共計 450 位參賽學生的成績統計資料，並參考前幾屆的評析方式（陳昭地、民 82～民 87），列表如下，以供試題解答及分析之參考。

表 1 1999 年第 40 屆 IMO 前 15 名國家各題成績統計表

名次	國 家	第 1 題	第 2 題	第 3 題	第 4 題	第 5 題	第 6 題	總 分	去年名次
1	俄羅斯	42	37	21	34	37	11	182	6
1	中國大陸	40	41	11	42	33	15	182	未參加
3	越南	41	37	9	32	40	18	177	9
4	羅馬尼亞	35	42	10	31	32	23	173	11
5	保加利亞	41	23	10	42	25	29	170	2
6	白俄羅斯	39	41	21	28	27	11	167	19
7	韓國	41	30	20	42	22	9	164	12
8	伊朗	36	32	6	42	24	19	159	1
9	中華民國	40	26	12	38	28	9	153	5
10	美國	42	28	20	33	17	10	150	3
11	匈牙利	42	22	19	27	26	11	147	3
12	烏克蘭	33	11	17	27	28	20	136	8
13	日本	37	15	26	22	21	14	135	14
14	南斯拉夫	35	16	8	31	28	12	130	10
15	澳大利亞	39	12	19	24	12	10	116	13

表 2 1999 年第 40 屆 IMO 全部參賽學生之成績統計表

總人數 450 人

項 目	第 1 題	第 2 題	第 3 題	第 4 題	第 5 題	第 6 題
平 均 值	4.29	1.67	1.58	2.79	1.80	1.14
標 準 差	2.43	2.39	1.83	2.26	2.42	1.45
得 分 率	0.61	0.24	0.23	0.40	0.26	0.16
高分組得分率	0.93	0.67	0.40	0.74	0.62	0.32
低分組得分率	0.23	0.04	0.10	0.16	0.04	0.07
鑑別指數	0.70	0.63	0.30	0.57	0.58	0.25
難度指數	0.58	0.36	0.25	0.45	0.33	0.19

高分組人數 113 人，低分組人數 114 人

表 3　1999 年第 40 屆 IMO 各題得分成績人數統計表

分　數	第 1 題	第 2 題	第 3 題	第 4 題	第 5 題	第 6 題
7	140	59	23	75	47	11
6	48	12	8	9	31	5
5	41	4	3	15	7	7
4	42	5	20	24	5	8
3	45	10	44	59	18	21
2	53	37	79	109	44	28
1	52	129	119	119	103	225
0	29	194	154	40	194	145
總人數	450	450	450	450	450	450

表 4　1999 年第 40 屆 IMO 中華民國學生代表得分及成績統計表

姓　名	第 1 題	第 2 題	第 3 題	第 4 題	第 5 題	第 6 題	總　分
林家平	5	7	1	7	6	0	26
王嘉慶	7	7	2	7	7	1	31
葉書蘋	7	0	3	7	7	3	27
劉育廷	7	4	2	7	1	3	24
鄧敦民	7	1	1	7	6	1	23
林宗茂	7	7	3	3	1	1	22
總　分	40	26	12	38	28	9	153

表 5　金牌、銀牌、銅牌及未得獎分組成績統計表

表 5(a)金牌獎（人數 38 人，成績≥28）

項　目	第 1 題	第 2 題	第 3 題	第 4 題	第 5 題	第 6 題
平均值	6.82	6.45	3.76	6.29	6.16	3.61
標準差	0.69	1.50	2.45	1.54	1.76	2.34
得分率	0.97	0.92	0.54	0.90	0.88	0.52
變異係數	0.10	0.23	0.65	0.24	0.29	0.65

表 5(b)銀牌獎（人數 70 人，27≥成績≥19）

項　目	第 1 題	第 2 題	第 3 題	第 4 題	第 5 題	第 6 題
平均值	6.36	3.86	2.37	4.60	3.64	1.50
標準差	1.10	2.68	2.24	2.40	2.68	1.63
得分率	0.91	0.55	0.34	0.66	0.52	0.21
變異係數	0.17	0.70	0.94	0.52	0.73	1.09

表 5(c)銅牌獎（人數 118 人，18≥成績≥12）

項　目	第 1 題	第 2 題	第 3 題	第 4 題	第 5 題	第 6 題
平均值	5.40	1.26	1.65	3.11	1.82	1.07
標準差	1.87	1.65	1.70	2.02	2.10	1.19
得分率	0.77	0.18	0.24	0.44	0.26	0.15
變異係數	0.35	1.31	1.03	0.65	1.15	1.11

表 5(d)未得獎者（人數 224 人，11≥成績）

項　目	第 1 題	第 2 題	第 3 題	第 4 題	第 5 題	第 6 題
平均值	2.64	0.40	0.93	1.48	0.49	0.66
標準差	1.95	0.65	1.13	1.07	0.88	0.70
得分率	0.38	0.06	0.13	0.21	0.07	0.09
變異係數	0.74	1.64	1.21	0.73	1.79	1.06

表 6　1999 年第 40 屆 IMO 各國成績統計表

名次	國　　名	總分	金牌	銀牌	銅牌	參賽人數
1	RUS　俄羅斯	182	4	2	0	6
1	CHN　中國大陸	182	4	2	0	6
3	VIE　越南	177	3	3	0	6
4	ROM　羅馬尼亞	173	3	3	0	6
5	BUL　保加利亞	170	3	3	0	6
6	BLR　白俄羅斯	167	3	3	0	6
7	ROK　南韓	164	3	3	0	6
8	IRI　伊朗	159	2	4	0	6
9	ROC　中華民國	153	1	5	0	6
10	USA　美國	150	2	3	1	6
11	HUN　匈牙利	147	1	4	1	6
12	UKR　烏克蘭	136	2	2	1	6
13	JPN　日本	135	2	4	0	6
14	YUG　南斯拉夫	130	1	2	3	6
15	AUS　澳大利亞	116	1	1	3	6
16	TUR　土耳其	109	1	1	4	6
17	FRG　德國	108	0	2	4	6
18	IND　印度	107	0	3	3	6
19	POL　波蘭	104	1	0	5	6
20	UNK　英國	100	0	3	3	6
21	SLK　斯洛伐克	88	0	2	3	6
22	LAT　拉脫維亞	86	1	1	0	6
23	ITA　義大利	82	0	1	2	6
24	SWI　瑞士	79	0	1	3	6

25	ISA	以色列	78	0	0	5	6
25	MON	蒙古	78	0	2	1	6
27	CUB	古巴	77	0	0	5	6
27	RSA	南非	77	0	1	1	6
29	AUT	奧地利	75	0	1	2	6
29	BRA	巴西	75	0	0	4	6
31	CAN	加拿大	74	0	0	3	6
31	NET	荷蘭	74	0	0	4	6
33	FRA	法國	73	0	1	2	6
33	HKG	香港	73	0	0	4	6
35	KAZ	哈薩克	72	0	0	4	6
36	MCD	馬其頓	71	0	0	5	6
36	SIN	新加坡	71	0	0	4	6
38	GEO	喬治亞	68	0	1	1	6
39	ARM	亞美尼亞	67	0	0	3	6
39	NOR	挪威	67	0	1	2	6
41	CRO	克羅埃西	66	0	0	2	6
41	SWE	瑞典	66	0	0	3	6
43	BIH	波士尼亞	65	0	0	3	6
43	FIN	芬蘭	65	0	1	0	6
45	ARG	阿根廷	63	0	0	3	6
46	SPA	西班牙	60	0	0	1	6
47	HEL	希臘	57	0	2	0	6
47	THA	泰國	57	0	0	3	6
49	COL	哥倫比亞	55	0	1	1	6
49	CZE	捷克	55	0	0	1	6
51	LIT	立陶宛	54	0	0	2	6
52	MEX	墨西哥	53	0	0	1	6
52	NZL	紐西蘭	53	0	0	1	6
54	BEL	比利時	51	0	0	2	6
54	DEN	丹麥	51	0	0	2	5
56	MOL	摩達維亞	50	0	0	1	6
57	MOR	摩洛哥	48	0	0	1	6
58	SLO	斯洛尼亞	46	0	0	2	6
59	UZB	烏茲別克	42	0	0	0	6
60	MAC	澳門	41	0	0	0	6
60	ICE	冰島	41	0	0	1	6
62	IRL	愛爾蘭	38	0	0	1	6
63	MAS	馬來西亞	37	0	0	0	6
64	INA	印尼	35	0	0	0	6
64	CYP	塞浦路斯	35	0	0	0	6

66	AZB	亞塞拜然	34	0	0	1	6
66	ALB	阿爾巴尼亞	34	0	0	0	5
68	TTB	千里達	33	0	0	0	5
69	EST	愛沙尼亞	30	0	0	1	4
70	POR	葡萄牙	29	0	0	0	6
71	LUX	盧森堡	26	0	0	1	2
72	URU	烏拉圭	25	0	0	0	5
73	PHI	菲律賓	24	0	0	0	4
74	TUN	突尼西亞	22	0	0	0	4
75	GUA	瓜地馬拉	19	0	0	0	6
76	KRG	吉爾吉斯	15	0	0	0	3
77	TRK	土庫曼	13	0	0	0	2
78	KUW	科威特	10	0	0	0	4
78	PER	秘魯	10	0	0	0	2
80	VEN	委內瑞拉	8	0	0	0	2
81	SRL	斯里蘭卡	6	0	0	0	1

三、第 40 屆國際數學奧林匹亞競賽試題詳解及評析

問題 1：（愛沙尼亞）

[解一]（試題委員會公布的解法）

令 r_{AB} 表示平面上以線段 AB 的垂直平分線爲對稱軸之鏡射變換，且令 G 爲點集 S 的重心。因爲對 S 中任意的相異兩點 A、B，我們有 $r_{AB}(G)=G$，故 $AG=BG$，$\forall A,B\in S$，因此， 點集 S 內的點都落在以 G 爲圓心的同一圓上。設點集 S 的點在圓上依序爲 $A_1, A_2, \cdots, A_n$，我們將證明凸 n 邊形 $A_1A_2\cdots A_n$ 形成一正 n 邊形。顯然，$r_{A_1A_3}(A_2)=A_2$，於是，可得 $A_1A_2=A_2A_3$。同理，可得 $A_2A_3=A_3A_4=\cdots=A_nA_1$。因此，$A_1A_2\cdots A_n$ 是一正 n 邊形。反之，任一正 n 邊形的 n 個頂點組成的有限點集都滿足問題的條件。因此，所求的有限點集 S 恰爲任一正多邊形的頂點所成的集合。

[解二]（葉書蘋同學的解法）

對平面上一有限點集 S，必可找到一圓 O 完全覆蓋此點集，且點集 S 中至少有三點落在圓周上，設這三點爲 A_1, A_2, A_3。假設有一點 $B\in S$ 落在圓內，不失一般性，可設 B 點落在扇形 OA_1A_2 中。作 A_2B 的中垂線 L, 則 A_1,B,O 在直線 L 的同側。令 A_1', O' 分別爲 A_1, O 對 L 的對稱點，則 $OA_1'=O'A_1$。又 $O'A_1> OA_1$, 故 $OA_1'> OA_1$。此式證明了 A_1' 點在圓 O 外。又 L 爲集合 S 的對稱軸，而 $A_1\in S$, 故 $A_1'\in S$，此式說明了 A_1' 點在覆蓋圓 O 上或內部，矛盾！因此，點集 S 中的點分佈在同一圓上，其他部分的證明同[解一〕。

評析：

1.本題爲愛沙尼亞設計提供，原題爲一題立體幾何，但因本屆試題偏難，因此經由主試委員會投票決定改成簡易的平面幾何題。考試結果在 450 位參賽者中，有 140 位（31%）得滿分，有 29 位（6%）得 0 分。全體得分的平均值爲 4.29 分，得分率 0.61，難度指數 0.58，是本次六道試題中最容易的一題，而其鑑別指數爲 0.70，是本次試題中鑑別度最高者。所有獲得金牌的 38 位選手在本題的平均得分數爲 6.82 分，而拿到銀牌的 70 位選手得分之平均值爲 6.36 分。我國 6 位選手得分之平均值高達 6.67 分，接近金牌選手的平均得分，可見這種題型是我國選手的擅長題型，將來代表隊更應充分把握這種優勢，以爭取佳績。

2.解題評分重點：

(1)指出任一正 n 邊形的 n 個頂點所組成的有限點集都滿足問題的條件，可得 1 分。

(2)證出所求的有限點集 S 必爲某一正多邊形的頂點，可得 6 分。

3.討論：

(1)我國六位代表本題得分依序爲 5，7，7，7，7，7 分，共得 40 分，其中僅林家平同學在推導點集 S 必爲某一正多邊形頂點的過程中，分類的情況不完整，且沒有指出任一正 n 邊形的頂點所組成的有限點集都滿足問題的條件而無法拿到滿分，實在可惜，否則，林家平同學今年即可爲我國再獲得一面金牌。

(2)俄羅斯、美國及匈牙利的所有參賽學生在本題的表現最爲傑出，總得分皆達滿分 42 分；而本屆成績名列前茅的其他隊伍也都表現不俗，例如：越南、保加利亞及韓國本題的總分均達 41 分。

(3)去年因充分把握住幾何題分數的印度隊今年卻馬失前蹄，六位學生本題僅僅共得 28 分，名次也由去年的第 7 名一口氣滑落到今年的第 18 名。由於我國對這類型題目的訓練得宜，才能有如此佳績，未來在幾何題方面，必須把握現有的優勢，才能百尺竿頭更進一步。

(4)原題爲一題立體幾何（即 S 爲空間中滿足題意的有限點集），則可能的點集 S 爲正多邊形、或正四面體、或正八面體的頂點，有興趣的讀者不妨解解看。

問題 2：（波蘭）

[解一]（試題委員會公布的解法）

由於原式是一齊次的對稱式，故不失一般性，可令 $x_1 \ge x_2 \ge \cdots \ge x_n$ 且 $x_1 + x_2 + \cdots + x_n = 1$。於是，在這個條件下我們要求以下函數的最大值：

$$F(x_1, x_2, \cdots, x_n) = \sum_{i<j} x_i x_j (x_i^2 + x_j^2)$$

若 x_{k+1} 爲最小正數，其中 $k \ge 2$，則以 $x'=(x_1,x_2,\ldots,x_k+x_{k+1},0,0,\ldots)$ 取代 $x=(x_1,x_2,\ldots,x_k,x_{k+1},0,\ldots)$。由

$$1 \ge x_1 + x_k + x_{k+1} \ge \frac{1}{2}(x_k + x_{k+1}) + x_k + x_{k+1},$$

可得 $x_k + x_{k+1} \le \frac{2}{3}$.因此，

$$F(x') - F(x) = x_k x_{k+1}\left[3(x_k + x_{k+1})\sum_{i=1}^{k-1} x_i - x_k^2 - x_{k+1}^2\right]$$
$$= x_k x_{k+1}[(x_k + x_{k+1})(3 - 4(x_k + x_{K+1}) + 2x_k x_{k+1}] > 0$$

重覆上面的調整步驟，我們可得

$$F(x) \le F(a,b,0,\cdots,0) = ab(a^2 + b^2) = \frac{1}{2}(2ab)(1 - 2ab) \le \frac{1}{8} = F(\frac{1}{2},\frac{1}{2},0,\cdots,0).$$

於是可知最小的常數 $C=\frac{1}{8}$，且等號成立的充要條件是其中的兩項相等（可等於 0），而其他項都是 0。

[解二]（王嘉慶同學的解法）

令 $x_1=x_2=1, x_3=x_4=\cdots=x_n=0$, 則原不等式為 $2 \le 16C$, 得 $C \ge \frac{1}{8}$.以下我們證明 C 的最小值為 $\frac{1}{8}$.當 n=2 時，原不等式為

$$x_1^3 x_2 + x_1 x_2^3 \le \frac{1}{8}(x_1 + x_2)^4,$$

得 $(x_1 - x_2)^4 \ge 0$.此時，等號成立的充要條件為 $x_1=x_2$.

當 $n \ge 3$ 時，令 $x_1=a$, $x_2=b$, $x_3=d$, 由對稱性，不妨設 $a \ge b \ge d \ge 0$. 令 $y_1=a$, $y_2=b+d$, $y_3=0$, $y_k=x_k$, $\forall k \ge 4$. 則 $x_1+x_2+\cdots+x_n=y_1+y_2+\cdots y_n$,且

$$\sum_{1\le i<j\le n} y_i y_j (y_i^2 + y_j^2) - \sum_{1\le i<j\le n} x_i x_j (x_i^2 + x_j^2) = 3bd(b+d)\sum_{4\le i\le n} x_i + 3ab^2 d + 3abd^2 - b^3 d - bd^3$$
$$\ge 3bd(b+d)\sum_{4\le i\le n} x_i + 3b^3 d + 3bd^3 - b^3 d - bd^3 \ge 0$$

上式等號成立之充要條件為 d=0. 因此，當 x_i 中有三數不為 0 時，經過上面過程的調整後，均可增加函數

$$F(x) = \frac{\sum_{1\le i<j\le n} x_i x_j (x_i^2 + x_j^2)}{(\sum_{1\le i\le n} x_i)^4}$$

的值，因此，欲使函數 F(x)值最大，則其中至少有 n-2 個數為 0. 於是可得

$$F(x) \le F(a,b,0,\cdots,0) = \frac{ab(a^2 + b^2)}{(a+b)^4} \le \frac{1}{8}.$$

於是可知最小的常數 $C=\frac{1}{8}$, 且等號成立的充要條件是其中的兩項相等（可等於 0），而其他項都是 0.

評析：

1.本題為波蘭設計提供的代數不等式題，考試結果在 450 位參賽者中，有 59 位(13%)得滿分，也有高達 194 位(43%)得 0 分。全體得分的平均值為 1.67 分，得分率 0.24，難度指數 0.36，屬本次六道試題中難度適中者，而其鑑別指數為 0.63，也相當高。所有獲得金牌的 38 位選手在本題的平均得分數為 6.45 分，而拿到銀牌的 70 位選手得分之平均值為 3.86 分。我

國 6 位選手得分之平均值達 4.33 分，超越銀牌選手的平均得分，但距金牌選手的平均得分仍遠。因此，將來邁向金牌之路的學生仍需再加強這類題型。

2.解題評分重點：

(1)證出 $C=\frac{1}{8}$, 可得 5 分。

(2)找出等號成立的充要條件，可得 2 分。

(3)僅證出 n=3 或 n=4 的特例，至多可得 3 分。

(4)僅證出 n=2 的特例（含等號成立的充要條件），可得 1 分。

註明：以上(3)(4)項，至多可得 3 分。

3.討論：

(1)我國六位代表本題得分依序為 7, 7, 0, 4, 1, 7 分，共得 26 分，其中葉書蘋同學將題目中的$(\Sigma x_i)^4$誤為$\sum x_i^4$，因此無法拿到任何分數而喪失獲得一面金牌的機會，實在令人扼惜。

劉育廷同學在處理調整的過程中，沒有明確地選擇數值較小的兩項作調整，以致無法達到函數 F(x)遞增的效果，因而無法拿到高分。

(2)地主國羅馬尼亞的六位參賽學生在本題的表現最為傑出，得到滿分 42 分；中國大陸及白俄羅斯本題的總分均高達 41 分，這也使得白俄羅斯今年的名次大幅提昇到第六名。

問題 3：（白俄羅斯）

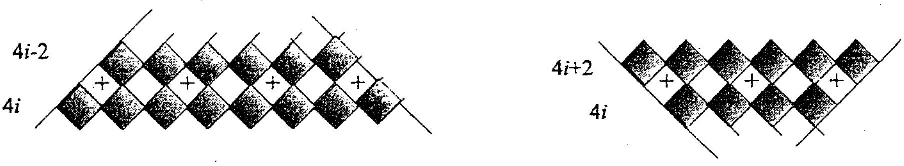
[解法]（試題委員會公布的解法）

首先，將紙板著成黑白相間的棋盤（如同西洋棋盤）。則可看出與黑格子相鄰的格子必為白格子；反之，與白格子相鄰的格子必為黑格子。令 F(n)表示所求之最少標上記號的格子數，$f_w(n)$表示白格子最少須被標上記號的格子數，才能使得每一黑格子都有至少與一個有標上記號的白格子相鄰；而 $f_b(n)$表示黑格子最少須被標上記號的格子數，才能使得每一白格子都有至少與一個有標上記號的黑格子相鄰。因 n=2k 為偶數，由棋盤的對稱性可得

$$f_w(n)=f_b(n) \text{ 且 } f(n)=f_w(n)+f_b(n).$$

考慮所有與對角線平行的黑格子線，其黑格子數依序為 2, 4, 6,…, 2k,…, 6, 4, 2.對每一 i=1, 2,…, k,將第 2i-1 條黑格子線下的白格子線中奇數位之白格子標上記號（如下圖），則共標上記號的白格子數為

$$2+4+6+\cdots+k+\cdots+5+3+1=\frac{k(k+1)}{2}.$$



在這種標記下，我們可以很容易地觀察出每一黑格子都有一標上記號的白格子與之爲鄰。因此，

$$f_w(n) \le \frac{k(k+1)}{2}.$$

另一方面，考慮這些被標上記號的 $\frac{k(k+1)}{2}$ 個白格子，因爲它們沒有共同相鄰的黑格子，故我們至少需要 $\frac{k(k+1)}{2}$ 個標上記號的黑格子來控制這些被標上記號的白格子。於是，

$$f_b(n) \ge \frac{k(k+1)}{2}.$$

由上面的說明可知

$$f_w(n) = f_b(n) = \frac{k(k+1)}{2}.$$

因此，

$$f(n) = k(k+1) = \frac{n(n+1)}{2}.$$

評析：

1.本題爲白俄羅斯設計提供的組合題，考試結果在450位參賽者中，僅有23位(5%)得滿分，也有高達147位(33%)得0分。全體得分的平均值只有1.58分，得分率0.23，難度指數0.25，屬本次六道試題中難度較難者，而其鑑別指數爲 0.30，稍嫌偏低。所有獲得金牌的 38 位選手在本題的平均得分數爲3.76分，而拿到銀牌的70位選手得分之平均值爲2.37分。我國 6 位選手總得分雖僅有 12 分，但超越中國大陸選手的得分，顯見這類問題是大部分中國學生必須再加強的題型。

2.解題評分重點：

(1)證出 f(n)的上界 $f(n) \le \frac{n(n+2)}{4}$，可得3分。

(2)證出 f(n)的下界 $f(n) \ge \frac{n(n+2)}{4}$，可得4分。

(3)僅指出 $f(n)=f_w(n)+f_b(n)$ 且 $f_w(n)=f_b(n)$, 可得1分。

(4)僅證出 $f(n) \ge \frac{n^2}{4}$，可得2分。

(5)僅證出 $f(n) \le \frac{n^2}{3}$，可得1分。

(6)僅猜出 $f(n) = \frac{n(n+2)}{4}$ 不給分，但若有處理 n=4 或 n=6 等某一特例的圖形，至多可得 2 分。

註明：以上(3)(4)(5)(6)項，至多可得3分。

3.討論：

(1)我國六位代表本題得分依序爲 1，2，3，2，1，3 分，共得 12 分，其中葉書蘋及林宗

茂同學都僅構造出上界而猜測到答案，惟對下界之情形未突破，限於給分標準各得 3 分，其他同學的得分情形也不太理想。

(2)由於本題的解題技巧特殊，各國的得分都很低，日本與韓國的參賽學生表現都很傑出，值得我國深思與學習；而在前十名的國家中，中國大陸、越南、羅馬尼亞、保加利亞及伊朗本題總分都低於我國。

問題 4：（中華民國）

[解一]（試題委員會公布的解法）

顯然，對任一質數 p,(1,p)及(2,2)都是原方程式之解。對其他可能之解(n,p），我們僅須考慮 $n\geq 2, p\geq 3$ 的情況。在這個情況下，我們先證明 p 是 n 的因數。注意：$(p-1)^n+1$ 爲奇數，故 n 也是奇數，於是有 $n< 2p$。令 q 爲 n 的最小質因數，則由 $q \mid (p-1)^n+1$，可得

$$(p-1)^n\equiv -1 \pmod q \text{且} (q, p-1)=1.$$

但由 q 的定義，我們有(n, q-1)=1.因此，存在整數 u, v 使得

$$un+v(q-1)=1.$$

注意：u 必爲奇數。當 $u,v\geq 0$，我們有

$$(p-1)\equiv(p-1)^{ux}\cdot(p-1)^{v(q-1)}\equiv(-1)^u\cdot 1^v\equiv -1 \pmod q.$$

亦即 p 爲 q 的倍數。當 $u\leq 0, v\geq 0$, 由 Fermat 小定理，我們有

$$1\equiv 1^v\equiv(p-1)^{v(q-1)}\equiv(p-1)^{1-un}\equiv(p-1)((p-1)^n)^{-u}\equiv(p-1)(-1)^{-u}\equiv -(p-1) \pmod q.$$

亦即 p 爲 q 的倍數。當 $u\geq 0, v\leq 0$, 我們也可證得 p 爲 q 的倍數。因 p, q 都是質數，故得證 p=q 爲 n 的因數。又 $n< 2p$, 故 n=p.於是由

$$p^{p-1}\left|(p-1)^p+1=p^2\left(p^{p-2}-\binom{p}{1}p^{p-3}+\cdots+\binom{p}{p-3}p-\binom{p}{p-2}+1\right)\right.$$

比較 p 的次數可得 $p-1\leq 2$. 由此得 p=3 且 n=3.

因此，所求爲(2,2), (3,3)及(1,p)其中 p 任意的質數。

[解二]（林家平同學的解法）

顯然，當 n=1 時，對任一質數 p,(1,p)都是原方程式之解。當 $n\geq 2$, 令 q 爲 n 的最小質因數。因（q,p-1）=1, 由 Fermat 小定理得$(p-1)^{q-1}\equiv 1 \pmod q$. 又由 q 是$(p-1)^n+1$ 的因數，可得$(p-1)^n\equiv -1 \pmod q$, 於是有$(p-1)^{2n}\equiv 1 \pmod q$.若 k 爲最小正整數(order)使得$(p-1)^k\equiv 1 \pmod q$,則 $k \mid q-1$ 且 $k \mid 2n$.故由(q-1,n)=1,可知，$k \mid (q-1, 2n)=1$ 或 2.因此，k=1 或 2.當 k=1 時，$q \mid p-2$, 得 q=2；當 k=2 時，$q \mid p(p-2)$, 得 q=p 或 2。

(1)當 q=2 時，n 爲偶數，故 p 也必爲偶數，得 p=2, n=1 或 2.

(2)當 q=p 時，n 爲 p 的倍數，故 n=p 或 n=2p. 但 n=2p 時，n 爲偶數，故 p 也必爲偶數，得 p=2, n=4, 矛盾！故 n=p. 同[解一]可導出 p=n=3.

因此，所求爲(2,2),(3,3)及(1,p),其中 p 任意的質數。

評析：

1.本題爲我國數學奧林匹亞委員會所設計提供的數論題，雖爲數論題，但卻必須用到極端性原理的技巧，數論程度不高的學生不易得到高分。考試結果在 450 位參賽者中，有 75 位(17%)得滿分，也有 40 位（9%）得 0 分。全體得分的平均值爲 2.79 分，得分率 0.40 ，難度指數 0.45，屬本次六道試題中比較容易者，而其鑑別指數爲 0.57，也相當合理。所有獲得金牌的 38 位選手在本題的平均得分數爲 6.29 分，而拿到銀牌的 70 位選手得分之平均值爲 4.60 分。我國 6 位選手得分之平均值高達 6.33 分，更超越金牌選手的平均得分，是我國勇奪第九名的得分關鍵題。

2.解題評分重點：

(1)指出(2,2)與(1,p)都是原方程式的解，可得 1 分。

(2)指出 $p\geq 3$ 時，n 是奇數，利用 q 爲 n 的最小質因數，及 Fermat 小定理的應用，至多可得 2 分。

(3)證出 $p\geq 3$ 時，$q=p$, 可得 3 分。

(4)證出 $p\geq 3$ 時，$p=3$, 可得 1 分。

3.討論：

(1)我國六位代表本題得分依序爲 7，7，7，7，7，3 分，共得 38 分，其中僅林宗茂同學沒有運用 Fermat 小定理來處理問題而無法導出主要的結果。

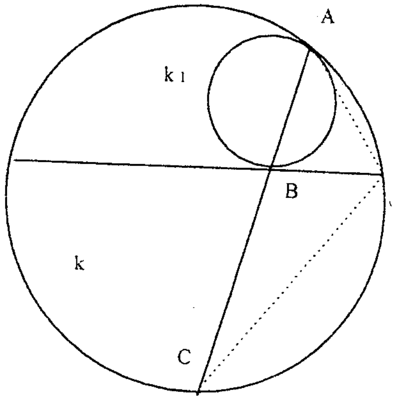
(2)這道試題共有中國大陸、保加利亞、韓國及伊朗等四隊總得分獲得滿分 42 分，表現最爲傑出；然而，美國、匈牙利及日本本題的總得分偏低，這或許是它們總成績與排名落後我國的另一原因。

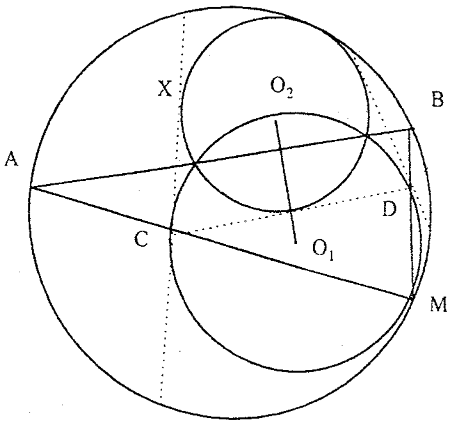
問題 5：（俄羅斯）

[解一]（試題委員會公布的解法）

首先，我們證明一個引理：設圓 k_1 爲圓 k 的一內切圓，切點爲 A，且與圓 k 的一弦 MN 相切於 B.若 C 爲圓 k 上不含 A 點的弧 MN 之中點，則 A,B,C 三點共線，且 $CA\cdot CB=CM^2$.

[引理的證明]：如下圖左，以 A 爲中心將圓 k_1 映至圓 k 的伸縮（位似）變換會將 MN 映至一圓 k 的切線，且該切線與 MN 平行，即切點爲 C 的切線。於是，A, B, C 三點共線。又由 $\angle NMC=\angle CAM$, 可得 $\triangle ACM\sim\triangle MCB$. 因此，$CA\cdot CB=CM^2$.





[原問題的證明]：如上圖右，令 O_1 及 O_2 分別爲圓 Γ_1 及圓 Γ_2 的圓心，而 t_1 及 t_2 分別爲它們的共同切線，並令 α 及 β 爲圓 Γ 由 t_1 及 t_2 所分割的兩弧。由上面的引理可知這兩弧的中點對應於圓 Γ_1 及圓 Γ_2 有相同的點冪。因此，可得它們落在這兩圓 Γ_1 及 Γ_2 的根軸上。於是可知 A 與 B 是弧 α 及 β 的中點。又由引理可得 C 及 D 分別是切線 t_1 及 t_2 與圓 Γ_1 的切點。若 H 表示以 M 爲中心將圓 Γ_1 映至圓 Γ 的伸縮變換，則 H：$CD \mapsto AB$，因此，AB 與 CD 平行。於是，$CD \perp O_1O_2$ 且 O_2 是圓 Γ_2 上的一弧 CD 之中點。令 X 爲 t_1 與圓 Γ_2 的切點，則有

$$\angle XCO_2 = \frac{1}{2}\angle CO_1O_2 = \angle DCO_2.$$

因此，O_2 位在 $\angle XCD$ 的角平分線上，於是得證 CD 是圓 Γ_2 的切線。

[解二]（林家平、王嘉慶、鄧敦民同學的解法）

令圓 Γ 的圓心爲 O, 半徑爲 r，而圓 Γ_i 的圓心爲 O_i，半徑爲 r_i, i=1,2. 由 $CM:AM=r_1:r=MD:MB$,且 $\angle CMD=\angle AMB$, 可得 $\triangle CMD \sim \triangle AMB$. 於是有 $\angle DCM=\angle BAM$, 故 AB 與 CD 平行。因此，我們僅須再證明 $d(O_2, CD)=r_2$.

令 $O(0,0)$, $O_1(0,r_1-r)$, $M(0,-r)$，則圓 Γ ：$x^2+y^2=r^2$, 而圓 Γ_1 的方程式：

$$x^2+(y-(r_1-r))^2=r_1^2. \tag{1}$$

因爲 $O_2 \in \Gamma_1$, 可令 $O_2=(r_1\cos\theta, (r_1-r)+r_1\sin\theta)$，其中 $0 \le \theta < 2\pi$. 則

$$r_2 = r - OO_2 = r - \sqrt{r_1^2+(r_1-r)^2+2r_1(r_1-r)\sin\theta}.$$

於是可得圓 Γ_2 的方程式：

$$\begin{gathered}[x-r_1\cos\theta]^2+[y-((r_1-r)+r_1\sin\theta))]^2=r_2^2= \\ r^2+r_1^2+(r_1-r)^2+2r_1(r_1-r)\sin\theta-2r\sqrt{r_1^2+(r_1-r)^2+2r_1(r_1-r)\sin\theta}.\end{gathered} \tag{2}$$

由(1)及(2)可得直線 AB 的方程式：

$$(\cos\theta)x+(\sin\theta)y = r-\frac{rr_2}{r_1}.$$

令直線 AB 與 CD 分別交直線 OM 於 E 與 F，則 $E(0,\frac{r(r_1-r_2)}{r_1\sin\theta})$.考慮以 M 爲中心將圓 Γ_1 映至

圓Γ而比例爲$\frac{r}{r_1}$的伸縮變換，則有 ME：MF=r：r_1. 由此可得$F(0,\frac{r_1-r_2}{\sin\theta}+r_1-r)$.因爲 AB 與 CD 平行，且 F 在直線 CD 上，故直線 CD 的方程式：

$$(\cos\theta)x+(\sin\theta)y=r_1-r_2+(r_1-r)\sin\theta$$

因此，

$$d(O_2,CD)=\frac{r_1\cos^2\theta+r_1\sin^2\theta+(r_1-r)\sin\theta-r_1+r_2-(r_1-r)\sin\theta}{\cos^2\theta+\sin^2\theta}=r_2.$$

於是得證 CD 是圓Γ_2的切線。

評析：

1.本題爲俄羅斯設計提供的平面幾何題，可運用綜合幾合、變換幾何及解析幾何等技巧解題。考試結果在 450 位參賽者中，有 47 位(10%)得滿分，更有高達 194 位(43%)得 0 分。全體得分的平均值爲 1.80 分，得分率 0.26，難度指數 0.33，屬本次六道試題中難度偏難者，而其鑑別指數爲 0.58，也相當合理。所有獲得金牌的 38 位選手在本題的平均得分數爲 6.16 分，而拿到銀牌的 70 位選手得分之平均值爲 3.64 分。幾何題雖爲我國學生的專長，但我國 6 位選手得分之平均值僅僅達 4.67 分，與金牌選手的平均得分相距甚遠。我國選手沒有把握住本題的得分關鍵，是往後訓練仍需再努力的一環。

2.解題評分重點：

(1)證出兩圓Γ_1及Γ_2的兩公切線分別切圓Γ_1於 C_1=C 及 D_1=D，可得 4 分。

(2)僅證出 C_1D_1 是圓Γ_2的切線，可得 3 分。

(3)寫出三圓的方程式，可得 1 分。

(4)寫出直線 AB 的方程式，可得 1 分。

(5)寫出直線 CD 的方程式，可獨立得 4 分。

(6)僅證出 CD 是圓Γ_2的切線，可得 1 分。

註明：(1)(2)項與(3)(4)(5)(6)項不得合併計分。

3.討論：

(1)我國六位代表本題得分依序爲 6，7，7，1，6，1 分，共得 28 分，其中鄧敦民同學因使用解析法時，沒有考慮到圖形有兩種可能的情況，因忽略其中的一種情形而被扣了一分；類似地，林家平同學使用解析法計算圓心的過程中，也因忽略其中的一種情形而被扣了一分，相當可惜。

(2)地主國羅馬尼亞的六位參賽學生在本題的表現最爲傑出，總得分滿分 42 分；中國大陸及白俄羅斯本題的總分均高達 41 分，這也使得白俄羅斯的名次大幅提昇到第六名。我國 6 位選手得分之平均值僅達 4.67 分，與金牌選手的平均得分數 6.16 分相距甚遠，可見我國選手仍需再進一步加強幾何專長。

問題 6：（日本）

[解法]（試題委員會公布的解法）

令 A=R(f)為函數 f 的值域，且令 c=f(0).原式代入 x=y=0, 我們有 f(-c)=f(c)+c-1, 於是可$\neq 0$. 對任一 $x\in A$, 存在 $y\in R$，使得 x=f(y).由此可得

$$f(x)=\frac{c+1}{2}-\frac{x^2}{2},\forall x\in A. \tag{1}$$

另一方面，我們有 A-A=R. 事實上，由原式代入 y=0, 我們可得

$$\{f(x-c)-f(x):x\in R\}=\{cx+f(c)-1:x\in R\}=R.$$

上式的最後一個等號成立是因為 $c\neq 0$. 因此，對任一 $x\in R$，我們可找到 $y_1, y_2\in A$, 使得 $x=y_1-y_2$. 利用(1)式可得

$$\begin{aligned} &f(x)=f(y_1-y_2)=f(y_2)+y_1y_2+f(y_1)-1\\ &=\frac{c+1}{2}-\frac{y_2^2}{2}+y_1y_2+\frac{c+1}{2}-\frac{y_1^2}{2}-1=c-\frac{(y_1-y_2)^2}{2}=c-\frac{x^2}{2}. \end{aligned} \tag{2}$$

比較(1)(2)兩式可得 c=1. 因此，

$$f(x)=1-\frac{x^2}{2},\forall x\in R. \tag{3}$$

代回原式檢驗確實滿足，故上述函數(3)是唯一解。

評析：

1.本題為日本設計提供的函數方程，考試結果在 450 位參賽者中，僅有 11 位(2%）得滿分，卻有 145 位(32%)得 0 分。全體得分的平均值為 1.14 分，得分率 0.16，難度指數 0.19，屬本次六道試題中的難題，而其鑑別指數為 0.25，略為偏低。所有獲得金牌的 38 位選手在本題的平均得分數為 3.61 分，而拿到銀牌的 70 位選手得分之平均值為 1.50 分。我國 6 位選手得分之平均值僅有 1.50 分，不及金牌選手的平均得分，故仍需加強訓練這類題型，才能坐銀求金更上一層樓。

2.解題評分重點：

(1)證明 $f(x)=1-\frac{x^2}{2}$ 是一組解，可得 1 分。

(2)證明 $f(x)=1-\frac{x^2}{2}$ 是唯一的一組解，可再得 6 分。

(3)僅證明 $f(x_1-x_2)=c-\frac{(x_1-x_2)^2}{2},\ x_1,x_2\in A$ ，其中 A=R(f)，可得 2 分。

(4)僅證明 A-A=R，可得 2 分。

(5)僅指出 $f(x)=\frac{c+1-x^2}{2},\ \ \forall x\in A$ ，其中 c=f(0) ，可得 1 分。

註明：沒有證出(3)或(4)項，至多可得 3 分。

3.討論：

(1)我國六位代表本題得分依序為 0，1，3，3，1，1 分，共得 9 分，其中葉書蘋及劉育廷同學都導出最後的結果，但都沒有證出主要的關鍵步驟 R(f)-R(f)=R，限於評分標準只

能得到3分，非常可惜。

(2)本題是一道非常有分析味道的函數方程，表面上看來很簡單，但事實不然；如果沒有看出 R(f)-R(f)=R 的特性，要想突破思考的範疇就不容易，這也造成大部分參賽學生都在處理一些代數的運算而無法解出最後結果的原因。保加利亞及地主國羅馬尼亞的參賽學生在本題的表現最爲傑出，總分數分別達 29 及 23 分；併列第一的中國大陸及俄羅斯本題的總分都不理想，分別獲得15及11分；而美國及匈牙利本題的總分更不理想，僅分別獲得10及11分。

四、結論

從以上的成績統計及試題詳解與評析，我們綜合提出以下幾點結論，以供參考：

1.本屆六道試題分屬平面幾何，不等式（極值調整法），組合（計數），數論（因數），平面幾何（變換與解析）及代數（函數方程）。由於今年的試題偏難，因此在主試委員會中決議先確定最適當且最受歡迎的兩道簡單題：第一題及第四題；接著，確定最適當且最受歡迎的兩道難題：第三題及第六題；最後，再依題型的分配確定比較適當且受歡迎的兩道難度中等題：第二題及第五題。本屆的選題會議可說是歷屆的選題過程中最順利的一屆，也是這次主辦單位最成功的一項工作。

2.今年試題的難度偏高，主要是每道問題的解題技巧都很特殊，參賽學生抓不到解題要領自然拿不到好成績（去年全部參賽學生的得分平均值爲14.78分，今年的平均值爲13.24分）。尤其是第二題的極值調整法，第三題的特殊標記法，第五題的幾何變換及第六題的分析能力都偏重在較高難度的解題技巧上，如果沒有運用得宜恰到好處，則可能會陷入更複雜的計算式而達不到結果。以兩題幾何題爲例，越南、羅馬尼亞與俄羅斯的學生都掌握到拿高分的機會，也因而造成這三隊的排名較去年大幅提昇。

3.我國參賽的六位學生代表，計得一金五銀，總分153分，在81個參賽國家中排名第九名。今年我國學生的表現可說可圈可點，不僅將我國得牌的標準提升到銀牌層次（案：歷屆都有學生失常而僅得銅牌或榮譽獎），而且成績更超越去年併列第三的美國及匈牙利。我國學生超越預期的表現，值得嘉勉，其中王嘉慶有超水準的演出而榮獲金牌，林家平與葉書蘋都因疏忽了一些得分關鍵而與金牌絕緣，而劉育廷、鄧敦民、林宗茂壓力過大，表現略有失常。雖然今年我國代表隊的表現相當優異，歸究其因乃與試題的題型有很大的關係，加上學生憑著個人的努力與天賦所創造出來的佳績，但將來仍須在各個領域上再加強基本知識及解題技巧，特別是思考的嚴謹性與作答的完整性，應予通盤的輔導與訓練，才能持盈保泰更進一步。

五、參考資料

1. 陳昭地（民 80 年），1991 年第三十二屆國際數學奧林匹亞競賽試題，科學教育月刊，143 期（80 年 10 月），第 18～19 頁。
2. 陳昭地（民 81 年），1992 年第三十三屆國際數學奧林匹亞競賽試題，科學教育月刊，149 期（81 年 4 月），第 71～72 頁。
3. 陳昭地（民 82 年），1993 年第三十四屆國際數學奧林匹亞競賽試題解答評析，科學教育月刊，163 期（82 年 10 月），第 48～72 頁。
4. 陳昭地等（民 83 年），1994 年第三十五屆國際數學奧林匹亞競賽試題解答評析，科學教育月刊，172 期（83 年 9 月），第 24～39 頁。
5. 陳昭地等（民 84 年），1995 年第三十六屆國際數學奧林匹亞競賽試題解答評析（I），科學教育月刊，184 期（84 年 11 月），第 35～44 頁。
6. 陳昭地等（民 84 年），1995 年第三十六屆國際數學奧林匹亞競賽試題解答評析（II），科學教育月刊，185 期（84 年 12 月），第 33～43 頁。
7. 陳昭地等（民 85 年），1996 年第三十七屆國際數學奧林匹亞競賽試題解答評析，科學教育月刊，192 期（85 年 9 月），第 41～59 頁。
8. 陳昭地等（民 86 年），1997 年第三十八屆國際數學奧林匹亞競賽試題解答評析（I），科學教育月刊，204 期（86 年 11 月），第 61～71 頁。
9. 陳昭地等（民 86 年），1997 年第三十八屆國際數學奧林匹亞競賽試題解答評析（II），科學教育月刊，205 期（86 年 12 月），第 63～72 頁。
10. 陳昭地等（民 87 年），1998 年第三十九屆國際數學奧林匹亞競賽試題解答評析（I），科學教育月刊，212 期（87 年 9 月），第 45～48 頁。
11. 陳昭地等（民 87 年），1998 年第三十九屆國際數學奧林匹亞競賽試題解答評析（II），科學教育月刊，213 期（87 年 10 月），第 59～72 頁。
12. 40th IMO Problems & Solutions, 40th International Mathematical Olympiad Jury Committee, July 10-22, 1999, Bucharest, Romania.