公平原理在中點弦方程式的應用

楊健民
基隆市私立二信高中

在求過原圓錐曲線上一點的切線方程式時,非常的容易，只需將該點的坐標代入此圓錐曲線之公平原理即可，但在求以不在圓錐曲線上一點爲中點之弦方程式時，就沒有那麼容易了，學生往往會因爲算式冗長而算錯，尤其是當所給的圓錐曲線方程式爲非標準式時，算式更加複雜；因此我便開始思考，是否能將所給的圓錐曲線稍做變化，讓變化完之圓錐曲線過所給之點，且過該點的切線方程式恰爲原曲線之中點弦方程式，如此便可用該點之公平原理來解；本篇論文主要在證明此假設成立，以及如何來應用我所證明出來的結果。

1. 預備知識

1.1 定義：

圓、拋物線、橢圓、雙曲線合稱爲圓錐曲線。（見基礎數學(三) p.156）

1.2 公平原理：

設 $p(x_0,y_0)$ 爲圓錐曲線 $ax^2+bxy+cy^2+dx+ey+f=0$ 上一點，則過 $p(x_0,y_0)$ 的切線方程式爲

$$axx_0+b\frac{x_0y+y_0x}{2}+cy_0y+d\frac{x_0+x}{2}+e\frac{y_0+y}{2}+f=0$$

（見高中理科數學上冊 p116 例 7）

〈證明〉以 y=f(x)代入圓錐曲線的方程式，得

$$ax^2+bxf(x)+c(f(x))^2+dx+e(f(x))+f=0$$

微分得

$$2ax+bf(x)+bxf'(x)+2cf(x)f'(x)+d+ef'(x)=0$$

故

$$f'(x)=\frac{-2ax-bf(x)-d}{bx+2cf(x)+e}$$

因此所求直線的斜率爲

$$f'(x_0)=\frac{-2ax_0-by_0-d}{bx_0+2cy_0+e}$$

故所求切線方程式爲

$$y=y_0+\frac{-2ax_0-by_0-d}{bx_0+2cy_0+e}(x-x_0)$$

整理即得

$$axx_0+b\frac{x_0y+y_0x}{2}+cy_0y+d\frac{x_0+x}{2}+e\frac{y_0+y}{2}+f=0$$

Remark. 由以上可知，當我們在求過圓錐曲線上一點 $p(x_0,y_0)$ 的切線方程式時，只需要將該圓錐曲線方程式中的

x^2 項改成 x_0x（即利用 $x^2=x\cdot x$，將 x_0 代入其中一個 x），

y^2 項改成 y_0y（即利用 $y^2=y\cdot y$，將 y_0 代入其中一個 y），

xy 項改成 $\frac{1}{2}(y_0x+x_0y)$（即利用 $xy=\frac{1}{2}(xy+xy)$，爲維持線性將 x_0 代入其中一個 x, y_0 代入另一項的 y），

x 項改成 $\frac{1}{2}(x_0+x)$（即利用 $x=\frac{x+x}{2}$，將 x_0 代入其中一個 x），

y 項改成 $\frac{1}{2}(y_0+y)$（即利用 $y=\frac{y+y}{2}$，將 y_0 代入其中一個 y），

各係數（及常數項）保留在原位置；整個過程是秉持公平原則及維持線性，因此將此原理稱爲公平原理。

由以上可得其他圓、拋物線、橢圓、雙曲線方程式之公平原理：

1.2 圓方程式

$(x-a)^2+(y-b)^2=r^2$ 過其上一點 $p(x_0,y_0)$ 之切線方程式爲

$$(x-a)(x_0-a)+(y-b)(y_0-b)=r^2$$

1.3 拋物線方程式

$(y-k)^2=4c(x-h)$ 過其上一點 $p(x_0,y_0)$ 之切線方程式爲

$$(y_0-k)(y-k)=4c\left(\frac{x_0+x}{2}-h\right)$$

1.4 橢圓方程式

$\frac{(x-h)^2}{a^2}+\frac{(y-k)^2}{b^2}=1$ 過其上一點 $p(x_0,y_0)$ 之切線方程式爲

$$\frac{(x_0-h)(x-h)}{a^2}+\frac{(y-k)(y_0-k)}{b^2}=1$$

1.5 雙曲線方程式

$\frac{(x-h)^2}{a^2}-\frac{(y-k)^2}{b^2}=1$ 過其上一點 $p(x_0,y_0)$ 之切線方程式爲

$$\frac{(x_0-h)(x-h)}{a^2}-\frac{(y-k)(y_0-k)}{b^2}=1$$

2. 中點弦方程式之一般解法

例 1.一拋物線方程式爲 $y^2=6x$，試求以 p(4,3)爲中點之弦方程式？

〈解〉∵p(4,3)在此拋物線之內部，∴以點 p 爲中點之弦存在，又點 p 不在此拋物線之對稱軸方程式 y=0 上，∴以點 p 爲中點之弦不爲垂直線，因此斜率存在，

令此弦之方程式爲 L：y-3=m(x-4)

代入 $y^2=6x$，得 $my^2-6y+18-24m=0$

∵p(4,3)爲此弦之中點∴ $\frac{6}{2m}=3\Rightarrow m=1$

此弦之方程式爲 x-y-1=0

Remark. $y^2=6x-15$ 之公平原理爲 $yy_0=3(x+x_0)-15$，

將 $(x_0,y_0)=(4,3)$ 代入得 x-y-1=0

例 2.一橢圓方程式爲 $25x^2+4y^4=100$，試求以 p(1,-4)爲中點之弦方程式？

〈解〉∵p(1,-4)爲橢圓內之一點∴過 p(1,-4)之中點弦方程式存在，又點 p 不在此橢圓之短軸 x=0 上，∴以圖 p 爲中點之弦不爲垂直線，因此斜率存在。

令此弦方程式爲 L：y+4=m(x-1)　代入 $25x^2+4y^4=100$

得 $25x^2+4(mx-m-4)^4=100$

$\Rightarrow(25+4m^2)x^2-8m(m+4)x+4(m+4)^2-100=0$

∵p(1,-4)爲此弦之中點∴ $\frac{8m(m+4)}{25+4m^2}\times\frac{1}{2}=1\Rightarrow\ m=\frac{25}{16}$

此弦之程式爲　25x-16y-89=0

Remark.　$25x^2+4y^4=89$ 之公平原理爲 $25xx_0+4yy_0=89$，

將 $(x_0,y_0)=(1,-4)$　代入得 25x-16y=89=0

例 3.一雙曲線方程式爲 $x^2-y^2=1$，試求以 $p\left(\frac{1}{3},\frac{2}{3}\right)$ 爲中點之弦方程式？

〈解〉∵ $p\left(\frac{1}{3},\frac{2}{3}\right)$ 不在此雙曲線之漸近線方程式 x-y=0 與 x+y=0 上，（中心除外，中心之中點弦恰爲貫軸）

∴過點 p 之中點弦方程式存在，又點 p 不在此雙曲線之貫軸方程式 y=0 上，∴過點 p 之中點弦不爲垂直線，因此斜率存在。

令此弦方程式爲 L： $y-\frac{2}{3}=m\left(x-\frac{1}{3}\right)$ 　代入 $x^2-y^2=1$

得 $x^2-\left(mx-\frac{1}{3}m+\frac{2}{3}\right)^2=1$

$\Rightarrow\left(1-m^2\right)x^2+2m\left(\frac{1}{3}m-\frac{2}{3}\right)x-\left(\frac{1}{3}m-\frac{2}{3}\right)^2-1=0$

$\because p\left(\frac{1}{3},\frac{2}{3}\right)$ 爲此弦之中點

$\therefore -\frac{2m\left(\frac{1}{3}m-\frac{2}{3}\right)}{1-m^2}\times\frac{1}{2}=\frac{1}{3}\Rightarrow m=\frac{1}{2}$

此弦之方程式爲　x-2y+1=0

Remark. $x^2-y^2=-\frac{1}{3}$ 之公平原理爲 $xx_0-yy_0=-\frac{1}{3}$，

將 $(x_0,y_0)=\left(\frac{1}{3},\frac{2}{3}\right)$ 代入得　x-2y+1=0

3. 研究動機

從前面各例題，我們得到一個有趣的結果，在求以不在圓錐曲線上一點爲中點之弦方程式的結果與代入另一差一常數項之圓錐曲線的公平原理一樣，於是我便對此現象產生了懷疑，此結果是純屬巧合，還是真的都如此；也就是，中點弦方程式真的可以用公平原理的方法來解嗎？因此，我便從最簡單的圓方程式開始探討，發現其結果成立，再循序漸進探討了橢圓方程式，拋物線方程式，雙曲線方程式,最後推到了一般的圓錐曲線方程式

$ax^2+bxy+cy^2+dx+ey+f=0$。

4.研究過程：

爲了討論方便，我們對以下相關之圓錐曲線下一定義：

定義 4.1：令 Γ_1 ： $ax^2+bxy+cy^2+dx+ey+f_1=0$ 與

Γ_2 ： $ax^2+bxy+cy^2+dx+ey+f_2=0$ 爲二圓錐曲線方程式，我們稱 Γ_1 與 Γ_2 爲同軸曲線。

4.1 標準化圓錐曲線之探討

定理 4.1.1（圓之探討）令圓 C： $(x-a)^2+(y-b)^2=r^2$ 且 $A(x_0,y_0)$ 爲圓 C 內異於圓心 $K(a,b)$ 之一點，則存在圓 C 過 A 點之同軸圓 D，使得圓 D 過 A 點之切線 L，恰爲圓 C 以 A 點爲中點之弦方程式。

〈證明〉令圓 D：$(x-a)^2+(y-b)^2=k^2$ 且 $k^2=(x_0-a)^2+(y_0-b)^2$

則圓 D 爲圓 C 之同軸圓且過 $A(x_0,y_0)$

$\because$ L 切圓 D 於 A 點 $\therefore \overline{KA} \perp L$ 於 A 點，

因此 A 點平分此弦，故得證。

說明：由定理 4.1.1 我得到了一個滿意的答案，在求圓內一點的中點弦方程式時，我們可用公平原理的觀念來解，只要先找到此圓之同軸圓，再求此同軸圓在該點之公平原理即可。現在圓方程式已成立了，而橢圓形只不過是圓形的壓縮而已，是否橢圓方程式仍會滿足此結果呢？我便繼續著手於橢圓方程式之探討。

定理 4.1.2（橢圓之探討）令橢圓 Γ_1：$\dfrac{(x-h)^2}{a^2}+\dfrac{(y-k)^2}{b^2}=1$ 且 $A(x_0,y_0)$ 爲 Γ_1 內異於中心 O(h,k)之一點，則存在 Γ_1 過 A 點之同軸橢圓 Γ_2，使得 Γ_1 以 A 點爲中點之弦方程式 L 恰爲 Γ_2 過 A 點之切線。

〈證明〉令 Γ_2：$\dfrac{(x-h)^2}{ta^2}+\dfrac{(y-k)^2}{tb^2}=1$ 且 $t=\dfrac{(x_0-h)^2}{a^2}+\dfrac{(y_0-k)^2}{b^2}$

則 Γ_2 爲 Γ_1 之同軸橢圓且過 A 點，

(1)若點 A 在直線 y-k=0 上，則 L 之方程式爲 $x-x_0=0$，

因此 L 恰爲 Γ_2 之切線。

(2)若點 A 不在直線 y-k=0 上，則 L 不爲垂直線，因此斜率存在

令 L：$y-y_0=m(x-x_0)$，解 L 與 Γ_1 之交點 P,Q,

將 L：$y-y_0=m(x-x_0)$ 代入 $\dfrac{(x-h)^2}{a^2}+\dfrac{(y-k)^2}{b^2}=1$

得 $b^2(x-h)^2+a^2(mx-mx_0+y_0-k)^2=a^2b^2$

$$\Rightarrow (b^2+a^2m^2)x^2-2\left[hb^2+a^2m(mx_0-y_0+k)\right]x+b^2h^2+a^2(mx_0-y_0+k)^2-a^2b^2=0$$

$\because$ A 點爲 $\overline{PQ}$ 之中點 $\therefore x_0=\dfrac{2\left[hb^2+a^2m(mx_0-y_0+k)\right]}{b^2+a^2m^2}\times\dfrac{1}{2}$

$$\therefore m=-\frac{b^2(x_0-h)}{a^2(y_0-k)}$$

$$\Rightarrow L: \ y-y_0=-\frac{b^2(x_0-h)}{a^2(y_0-k)}(x-x_0)$$

$$\Rightarrow L：\frac{(x_0-h)(x-x_0)}{a^2}+\frac{(y_0-k)(y-y_0)}{b^2}=0$$

$$\Rightarrow L：\frac{(x_0-h)(x-h+h-x_0)}{a^2}-\frac{(y_0-k)(y--k+k-y_0)}{b^2}=0$$

$$\Rightarrow L：\frac{(x_0-h)(x-h)}{a^2}+\frac{(y_0-k)(y-k)}{b^2}=\frac{(x_0-h)^2}{a^2}+\frac{(y_0-k)^2}{b^2}$$

$$\because t=\frac{(x_0-h)^2}{a^2}+\frac{(y_0-h)^2}{b^2}$$

$$\therefore L：\frac{(x_0-h)(x-h)}{ta^2}+\frac{(y_0-k)(y-k)}{tb^2}=1$$

$\therefore L$ 恰為 Γ_2 過 $A(x_0,y_0)$ 之切線

說明：由定理 4.1.2，在求橢圓內一點的中點弦方程式時，也可用公平原理的觀念來解，方法同圓方程式。現在圓方程式與橢圓方程式皆已解決，我現在更有興趣的是另兩類型的圓錐曲線方程式（拋物線方程式與雙曲線方程式）是不是有相同的結果呢？

定理 4.1.3（拋物線之探討）令拋物線 Γ_1：$(y-k)^2=4c(x-h)$ 且 $A(x_0,y_0)$ 為 Γ_1 內之一點，則存在 Γ_1 過 A 點之同軸拋物線 Γ_2，使得 Γ_1 以 A 點為中點之弦方程式 L 恰為 Γ_2 過 A 點之切線。

〈證明〉令 Γ_2：$(y-k)^2=4c(x-h)+\Omega$ 且 $\Omega=(y_0-k)^2-4c(x_0-h)$ 則 Γ_2 過 A 點 Γ_2 與 Γ_1 之同軸拋物線，

(1)若點 A 在直線 y-k=0 上，則 L 方程式為 $x-x_0=0$，因此 L 恰為 Γ_2 過 A 點之切線

(2)若點 A 不在直線 y-k=0 上，則 L 不為垂直線，因此斜率存在，

令 L：$y-y_0=m(x-x_0)$，解 L 與 Γ_1 之交點 P，Q，

將 L：$y-y_0=m(x-x_0)$ 代入 Γ_1，

得 $(y-k)^2=4c\left(x_0+\dfrac{y-y_0}{m}-h\right)$

$$\Rightarrow y^2-\left(2k+\frac{4c}{m}\right)y+k^2+\frac{4cy_0}{m}+4ch-4cx_0=0$$

$\because A(x_0,y_0)$ 為 $\overline{PQ}$ 之中點 $\therefore \left(2k+\dfrac{4c}{m}\right)\times\dfrac{1}{2}=y_0\Rightarrow m=\dfrac{2c}{y_0-k}$

$$\therefore L：y-y_0=\frac{2c}{y_0-k}(x-x_0)$$

$$\Rightarrow L：(y-y_0)(y_0-k)=2c(x-x_0)$$

$$\Rightarrow L：(y-k+k-y_0)(y_0-k)=2c(x+x_0-2x_0-2h+2h)$$

$$\Rightarrow L：(y-k)(y_0-k)=4c\left(\frac{x+x_0}{2}-h\right)+(y_0-k)^2-4c(x_0-h)$$

$$=4c\left(\frac{x+x_0}{2}-h\right)+\Omega$$

$$\therefore L：(y-k)(y_0-k)=4c\left(\frac{x+x_0}{2}-h\right)+\Omega$$

$\therefore L$ 恰爲 Γ_2 過點 $A(x_0,y_0)$ 之切線

定理 4.1.4（雙曲線之探討）令雙曲線 Γ_1：$\dfrac{(x-h)^2}{a^2}-\dfrac{(y-k)^2}{b^2}=1$ 且點 $A(x_0,y_0)$ 爲 Γ_1 外異於中心 O(h,k)之一點且 Γ_1 以 A 點爲中點之弦方程式存在，則存在 Γ_1 過 A 點之同軸雙曲線 Γ_2 使得 Γ_1 以 A 點爲中點之弦方程式 L 恰爲 Γ_2 過點 A 之切線。

〈證明〉令 Γ_2：$\dfrac{(x-h)^2}{ta^2}-\dfrac{(y-k)^2}{tb^2}=1$ 且 $t=\dfrac{(x_0-h)^2}{a^2}-\dfrac{(y_0-k)^2}{b^2}$

則 Γ_2 過 A 點且爲 Γ_1 之同軸雙曲線且 $t\neq 0$

(1)若點 A 在直線 y-k=0 上，則 L 之方程式爲 $x-x_0=0$

因此 L：恰爲 Γ_2 過 A 點之切線。

(2)若點 A 不在直線 y-k=0 上，則 L 不爲垂直線，因此斜率存在，

令 L：$y-y_0=m(x-x_0)$，解 L 與 Γ_1 之交點 P，Q

將 $y-y_0=m(x-x_0)$ 代入 $\dfrac{(x-h)^2}{a^2}-\dfrac{(y-k)^2}{b^2}=1$

得 $b^2(x-h)^2-a^2(mx-mx_0+y_0-k)^2=a^2b^2$

$$\Rightarrow (b^2-a^2m^2)x^2-2[b^2h-a^2m(mx_0-y_0+k)]x+b^2h^2-a^2(mx_0-y_0+k)^2-a^2b^2=0$$

$\because A(x_0,y_0)$ 爲 $\overline{PQ}$ 之中點

$$\therefore \frac{2[b^2h-a^2m(mx_0-y_0+k)]}{b^2-a^2m^2}\times\frac{1}{2}=x_0$$

$$\therefore m=\frac{b^2(x_0-h)}{a^2(y_0-k)}$$

$$\therefore L：y-y_0=\frac{b^2(x_0-h)}{a^2(y_0-k)}(x-x_0)$$

$$\Rightarrow L：b^2(x_0-h)(x-x_0)-a^2(y-y_0)(y_0-k)=0$$

$$\Rightarrow L：b^2(x_0-h)(x-h+h-x_0)-a^2(y-k+k-y_0)(y_0-k)=0$$

$$\Rightarrow L：\frac{(x-h)(x_0-h)}{a^2}-\frac{(y-k)(y_0-k)}{b^2}=\frac{(x_0-h)^2}{a^2}-\frac{(y_0-k)^2}{b^2}=t$$

$$\therefore L：\frac{(x-h)(x_0-h)}{ta^2}-\frac{(y-k)(y_0-k)}{tb^2}=1$$

$\therefore L$ 恰爲 Γ_2 過 A 點之切線。

說明：由以上四個定理得證，標準化的圓錐曲線的中點弦方程式，皆可應用公平原理來解；若想更進一步來證明，一般形式的圓錐曲線的中點弦方程式也可用公平原理來解。

4.2 一般圓錐曲線方程式之探討

定理 4.2.1（一般圓錐曲線之探討）令 $\Gamma_1：ax^2+bxy+cy^2+dx+ey+f=0$ 爲一圓錐曲線方程式且 $A(x_0,y_0)$ 爲 Γ_1 外之一點且以 A 點爲中點之弦方程式存在，則存在 Γ_1 過 A 點之同軸曲線 Γ_2，使得 Γ_1 以 A 點爲中點之弦方程式 L，恰爲 Γ_2 過 A 點之切線。

〈證明〉令 $\Gamma_2：ax^2+bxy+cy^2+dx+ey+f=0$

且 $g=-(ax_0^2+bx_0y_0+cy_0^2+dx_0+ey_0)$

則 Γ_2 過 A 點且爲 Γ_1 之同軸曲線

(1)若以 A 點爲中點之弦方程式爲垂直線，則 Γ_1 必爲標準式，定理 4.1.1，定理 4.1.2，定理 4.1.3，定理 4.1.4 已經證明結果成立。

(2)若以 A 點爲中點之弦方程式不爲垂直線，則 L 之斜率存在

令 $L：y-y_0=m(x-x_0)$，解 L 與 Γ_1 交點 P，Q

將 $y-y_0=m(x-x_0)$ 代入 $ax^2+bxy+cy^2+dx+ey+f=0$

得 $ax^2+bx[y_0+m(x-x_0)]+c[y_0+m(x-x_0)]^2+dx+e[y_0+m(x-x_0)]+f=0$

$$\Rightarrow (a+bm+cm^2)\times 2+(by_0+bmx_0+2cmy_0-2cm^2x_0+d+em)x$$
$$+c(y_0^2-2mx_0y_0+m^2x_0^2)+e(y_0-mx_0)+f=0$$

$\because A(x_0,y_0)$ 爲 $\overline{PQ}$ 之中點，

$$\therefore -\frac{by_0-bmx_0+2cmy_0-2cm^2x_0+d+em}{a+bm+cm^2}\times\frac{1}{2}=x_0$$

$$\Rightarrow -by_0+bmx_0-2cmy_0+2cm^2x_0-d-em=2ax_0+2bmx_0+2cm^2x_0$$

$$\Rightarrow (-bx_0-2cy_0-e)m=2ax_0+by_0+d$$

$$\therefore m=\frac{2ax_0+by_0+d}{-bx_0-2cy_0-e}$$

$$\therefore L：\ y-y_0=\frac{2ax_0+by_0+d}{-bx_0-2cy_0-e}(x-x_0)$$

$$\Rightarrow (2ax_0+by_0+d)(x-x_0)+(bx_0+2cy_0+e)(y-y_0)=0$$

$$\Rightarrow 2axx_0+bxy_0+dx-2ax_0^2-bx_0y_0-dx_0+bx_0y+2cyy_0+ey-bx_0y_0$$
$$-2cy_0^2-ey_0=0$$

$$\Rightarrow 2axx_0+b(xy_0+x_0y)+2cyy_0+d(x+x_0)+e(y+y_0)$$
$$=2ax_0^2+2bx_0y_0+2cy_0^2+2dx_0+2ey_0$$

$$\Rightarrow axx_0+\frac{b}{2}(xy_0+x_0y)+cyy_0+\frac{d}{2}(x+x_0)+\frac{e}{2}(y+y_0)$$
$$=ax_0^2+bx_0y_0+dx_0+cy_0^2+ey_0=-g$$

$$\Rightarrow L：\ axx_0+\frac{b}{2}(xy_0+x_0y)+cyy_0+\frac{d}{2}(x+x_0)+\frac{e}{2}(y+y_0)+g=0$$

$\therefore$L 恰爲 Γ_2 以 A 點爲切點之切線方程式

5. 結果與應用：

由以上五個定理可知，在求圓錐曲線的中點弦方程式時，只需求其同軸曲線之切線方程式即可，而該點又在同軸曲線上，因此只需用公平原理就可決問題。現在，我對一開始所給的三個例題，應用公平原理來解。

例 1. 一拋物線之方程式爲 $y^2=6x$ ，試求以 p(4,3)爲中點之弦方程式？

〈解〉 $y^2=6x$ 過點 p(4,3)之同軸曲線爲 $y^2=6x-15$ ，

$\therefore$過點 p(4,3) 之切線爲 3y=3x+12-15

$\therefore$以點 p(4,3) 爲中點之弦方程式爲 x-y-1=0

例 2. 一橢圓之方程式爲 $25x^2+4y^2=100$ ，試求以 p(1,-4)爲中點之弦方程式？

〈解〉 $25x^2+4y^2=100$ 過點 p(1,-4)之同軸曲線爲 $25x^2+4y^2=89$ ，

$\therefore$過點 p(1,-4) 之切線爲 25x-16y=89

$\therefore$以點 p(1,-4) 爲中點之弦方程式爲 25x-16y-89=0

例 3. 一雙曲線之方程式爲 $x^2-y^2=1$ ，試求以 $p\left(\frac{1}{3},\frac{2}{3}\right)$ 爲中點之弦方程式？

〈解〉 $x^2-y^2=1$ 過點 $p\left(\frac{1}{3},\frac{2}{3}\right)$ 之同軸曲線爲 $x^2-y^2=-\frac{1}{3}$ ，

$\therefore$過點 $p\left(\frac{1}{3},\frac{2}{3}\right)$ 之切線爲 $\frac{1}{3}x-\frac{2}{3}y=-\frac{1}{3}$

$\therefore$以點 $p\left(\frac{1}{3},\frac{2}{3}\right)$ 爲中點之弦方程式爲 x-2y+1=0

6. 附錄：

在定理 4.1.1 至 4.1.4 以及定理 4.2.1 的證明中，所用同軸曲線的找法，是根據以下方法：

6.1 圓方程式：乃是找過 A 點之同心圓。

6.2 橢圓方程式：

與圓方程式類似，將中心固定後,將其長短軸長依相同的比例縮短，直到此縮小之橢圓過 A 點，此縮小之橢圓即所要之同軸橢圓。

6.3 拋物線方程式：

乃是固定其對稱軸，整個拋物線大小不改變，在對稱軸上移動，直到過 A 點，此移動至過 A 點之拋物線，即所要之同軸拋物線。

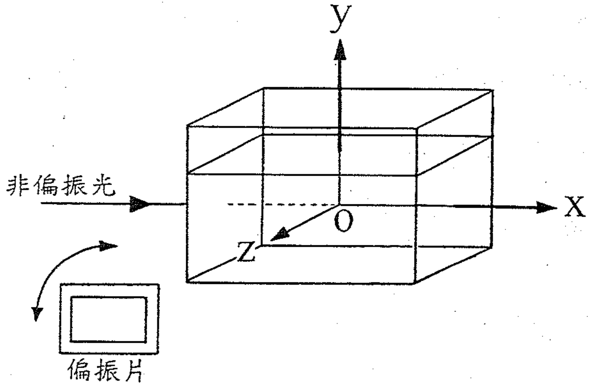
6.4 雙曲線方程式：

乃是固定其漸近線 (1)若 A 點與雙曲線在漸近線之同側，則將雙曲線往內或往外拉，直到過 A 點，此過 A 點之雙曲線，即所要之同軸雙曲線；(2)若 A 點與雙曲線在漸近線之異側，則改成共軛雙曲線，往內或往外拉，直到過 A 點，即所要之同軸雙曲線。

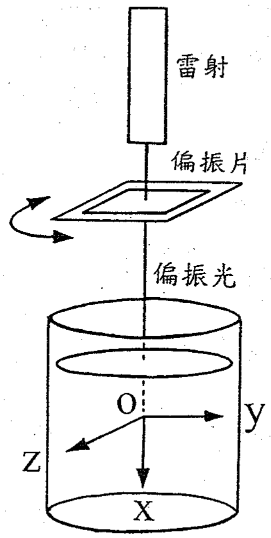
7. 參考文獻：

1. 國立編譯館(民 83)：高中理科數學(上)，臺北，國立編譯館出版。
2. 國立編譯館(民 84)：高中基礎數學(三)，臺北，國立編譯館出版。

（上接 73 頁）



圖二　非偏振光入射鮮乳膠態溶液



圖三　線性偏振光入射鮮乳膠態溶液