1999 國際數學奧林匹亞選訓營模擬試題及參考解答

陳昭地* 林哲雄** 張幼賢* 朱亮儒*
*國立臺灣師範大學 數學系
**國立清華大學 數學系

一、引言:

1998年在我國舉行的第39屆國際數學奧林匹亞競賽中,我國參賽的六位學生在天時地利人和的理想環境下,計得三金二銀一銅,總分184分,在76個參賽國家中排名第五名,僅次於伊朗,保加利亞,美國及匈牙利.此項成績是歷屆我國代表隊中表現最好的一次.中華民國為參加1999年7月10日～22日,即將在羅馬尼亞舉行的第40屆國際數學奧林匹亞競賽,已在中華民國數學奧林匹亞委員會主辦及中華民國數學會與國立臺灣師範大學協辦下,於4月1日～4月9日及4月22日～4月27日在國立臺灣師範大學理學院先後完成兩個階段國家代表隊的選訓營.在第一階段的選訓營中共有來自全國各地的21位高中生獲得推薦參加;在此階段中,選訓小組提供了十一個專題探討,分別聘請專家或教授擔任主講的工作,且為了考核學生的成績,選訓小組共舉辦了三次的模擬競試(每次佔決選成績的13%,共佔39%,每次三道試題)與六次的獨立研究(每次佔決選成績的2%,共佔12%,每次兩道試題).此外,在本階段的評分中,尚含有亞太數學奧林匹亞競賽的成績(佔6%)及個別評量(佔3%),總計佔國家代表隊決選成績的60%,並依據此成績選拔出其中的10位學生參加第二階段的選訓營,另有2位候補學生參加培訓.在第二階段的選訓營中,選訓小組也提供了七個更深入的專題探討,兩次的模擬競試(每次佔決選成績的13%,共佔26%,每次三道試題)與四次的獨立研究(每次佔決選成績的2%,共佔8%,每次兩道試題),及個別評量與口試(佔6%),總計佔國家代表隊決選成績的40%.依據最後決選的總成績選拔出六位正選國手,分別為台南一中劉育廷,北一女中葉書蘋,建國中學鄧敦民,台中一中林宗茂,高雄中學林家平,武陵高中王嘉慶,及兩位候補國手建國中學陳彥宏與柏盛峯,並隨即在正副領隊傅承德及洪有情教授的督導下,展開五週的國手加強訓練.以下我們針對整個國手選訓營中五次模擬競試的十五道試題,提出詳細的參考解答,以作為教師輔導與資優教學的參考.

二、國際數學奧林匹亞選訓營模擬試題

第一階段模擬試題(一)

1999年4月3日　9:00 - 13:30

問題1：設a, b, c都是非零的整數．試證：存在正整數n，使得$\sqrt{n^3+an^2+bn+c}$是實數但不是整數．

問題2：以等腰三角形ABC的底邊$\overline{BC}$之中點爲圓心，作一半圓與兩腰相切．若P與Q分別在$\overline{AB}$與$\overline{AC}$上，且$\overline{PQ}$與半圓相切，試證：$\overline{BP}+\overline{CQ}\geq\overline{BC}$.

問題3：給定平面上1999個相異點，其中任意三點均不共線．以這些點爲頂點的直角或鈍角三角形，我們稱之爲“金三角形”．試證：其中存在兩點A, B，使得以AB爲一邊的三角形中至少有600個是金三角形．

第一階段模擬試題(二)

1999年4月6日　9:00 - 13:30

問題4：設a, b, c都是正數．試證：

$$\frac{a}{b}+\frac{b}{c}+\frac{c}{a}\geq\frac{2}{3}\left(\frac{a}{b+c}+\frac{b}{c+a}+\frac{c}{a+b}\right)+2.$$

問題5：試確定所有從實數映至實數，且滿足：對任意實數x與y，$f\left(x+f(y)^2\right)=y^2+f(x)$，的函數$f$.

問題6：設P^*表示所有小於10000的正奇質數所成的集合．試確定所有滿足下列條件的質數p：

(1) $p\in P^*$；

(2) 對P^*的任一子集合$S=\{p_1,p_2,\cdots,p_k\}$，其中$k\geq 2$，當$p\notin S$時，則必有一$q\in P^*$，使得$q\notin S$且$q+1$是$(p_1+1)(p_2+1)\cdots(p_k+1)$的因數．

第一階段模擬試題(三)

1999年4月7日　9:00 - 13:30

問題7：設四邊形$ABCD$的四邊$\overline{AB},\overline{BC},\overline{CD},\overline{DA}$與一圓分別相切於點$P,Q,R,S$，且設$\overline{AC}$與$\overline{BD}$相交於點$O$．試證：$\frac{\overline{AO}}{\overline{CO}}=\frac{\overline{AP}}{\overline{CR}}$且$\frac{\overline{BO}}{\overline{DO}}=\frac{\overline{BQ}}{\overline{DS}}$.

問題8：試求所有的正整數m, n，使得

$$\sum_{k=0}^{mn-1}(-1)^{\left[\frac{k}{m}\right]+\left[\frac{k}{n}\right]}=0,$$

其中$[x]$表示不大於x的最大整數．

問題9：某次聚會共有1999人參加．已知任何50個人中都有兩個人沒有握過手．試證：至少有41個人，他們中每一位至多與1958個人握過手．

第二階段模擬試題(四)

1999年4月25日　9:00 - 13:30

問題10：已知p爲質數，n是大於1的正整數，且n^{p-1}是$(p-1)^n+1$的因數．試證：n是p的倍數．

問題11：給定一大於2的正整數m,並設集合$A=\{1,2,3,\cdots,m\}$.試確定滿足下列條件的最小正整數k之值:可從集合A中刪除k個適當的元素,使得在剩餘的$m-k$個元素中,每兩個元素的和都是合成數.

問題12：設$a_1,a_2,\cdots,a_{1999}$是一滿足下列條件的非負整數數列:對任意正整數i,j,當$i+j\le 1999$時,恆有

$$a_i+a_j\le a_{i+j}\le a_i+a_j+1.$$

試證:存在一實數x,使得對任意正整數$n=1,2,\cdots,1999$,恆有$a_n=[nx]$,其中$[nx]$表示不超過nx的最大整數.

1999年4月26日 9:00 - 13:30

第二階段模擬試題(五)

問題13：設O為ΔABC的外心，M為ΔABC內部一點，且$\overline{AO}\ge 2\overline{AM}$.若$M$在三邊$BC,CA,AB$上的投影點各為$A_1,B_1,C_1$,試證：$\Delta A_1B_1C_1$的面積不超過$\Delta ABC$面積的$\frac{3}{16}$.

問題14：對任意的正整數x,y,我們定義

$$f(x,y)=\frac{1}{2}\Big[(x+y)^2-3(x+y)+2\Big]+x.$$

試證:對任意的正整數k,方程式$f(x,y)=k$都恰有一組正整數解(x,y).

問題15：某電檢處聘請8位委員負責審查n部影片$(n\ge 2)$,審查時採簽名方式圈選,每位委員在他喜愛的影片上簽名圈選.審查之後,發現每一部影片都有委員圈選,而任意兩部影片的圈選委員都不完全相同,且對任意一羣部分委員(即少於8人),他們圈選的影片數總和都是偶數(注意:同一部影片只計算一次).試求n之值.

三、選訓營模擬試題參考解答

[問題1參考解答]:(清華數學系林哲雄教授設計提供)

令多項式$g(x)=x^3+ax^2+bx+c\in Z[x]$.則易知對每一正整數$n$, $g(n)-g(n+2)$都是偶數.假設對每一正整數n, $g(n)$都是完全平方數,則$g(n)\equiv g(n+2)\pmod 4$.即

$$n^3+an^2+bn+c\equiv (n+2)^3+a(n+2)^2+b(n+2)+c \pmod 4.$$

從而得$2n+2b\equiv 0 \pmod 4$.?n + b ≡ 0 (mod 2).於是可得

$$n\equiv -b\equiv b \pmod 2.$$

因此,每一正整數n都與b同奇或同偶,矛盾!

[問題2參考解答]:(1996 IMO國手吳柏樟同學設計提供)

因為等腰ΔABC與半圓都對直線AO對稱,所以，$\angle BOD=\angle COE$.因為D與F是半圓過P兩切線的切點,故$\angle POD=\angle POF$.同理，$\angle QOE=\angle QOF$.於是,得$\angle POF+\angle QOF+\angle COE=90^o$.由此可知

$$\angle POQ = \angle POF + \angle QOF = 90^o - \angle COE = \angle C = \angle B,$$

$$\angle COQ = \angle OQP = 180^o - \angle QPO - \angle POQ = 180^o - \angle OPB - \angle B = \angle BOP.$$

因此,依AA相似定理,可得$\Delta BOP \sim \Delta CQO$.於是,$BO : CQ = BP : CO$,即$BP \cdot CQ = BO \cdot CO$.依算幾不等式,進一步得

$$BP + CQ \geq 2\sqrt{BP \cdot CQ} = 2\sqrt{BO \cdot CO} = BC.$$

[問題3參考解答]:(台師大數學系朱亮儒教授設計提供)

令$n = 1999$.首先,我們分析:每五個點中至少有三個金三角形.對任意的五點A, B, C, D, E,我們考慮其凸包(convex hull):

(1)若其凸包是一三角形ABC,則由鴿籠原理知,$\angle ADB, \angle BDC, \angle CDA$中至少有兩個角不小於$90^o$,故$\Delta ADB, \Delta BDC, \Delta CDA$中至少會有兩個金三角形.同理,$\Delta AEB, \Delta BEC, \Delta CEA$中至少也會有兩個金三角形.

(2)若其凸包是一凸四邊形$ABCD$,則由鴿籠原理知其中至少有一內角不小於90^o,故這四點A, B, C, D至少可決定一金三角形.又E在四邊形$ABCD$的內部,不失一般性可令E在ΔBCD的內部.由(1)知$\Delta BEC, \Delta CED, \Delta DEB$中至少有兩個金三角形.

(3)若其凸包是一凸五邊形$ABCDE$,則易知五個內角中至少有兩個內角不小於90^o,且若僅有兩內角不小於90^o時,這兩內角和必超過270^o. (i)若$\angle A, \angle B \geq 90^0, \angle A + \angle B > 270^0$,則由$\angle CAB + \angle ABC < 180^o$,得$\angle CAE \geq 90^o$.故$\Delta EAC, \Delta EAB, \Delta ABC$都是金三角形. (ii)若$\angle A, \angle C \geq 90^0, \angle A + \angle C > 270^0$,則$\Delta EAB, \Delta BCD$都是金三角形.又由(2)知,四點$A, C, D, E$至少可決定另一金三角形.

現在,因爲n點共可組成C_5^n個五點組,而每一組中至少有三個金三角形,所以排除可能重覆計算的情況後(依我們的計數方式,每一金三角形至多重覆C_2^{n-3}次),可知不同的金三角形之個數至少

$$\frac{3 \cdot C_5^n}{C_2^{n-3}} = \frac{n(n-1)(n-2)}{20}.$$

另一方面,令k表示對任意兩點A, B,以$\overline{AB}$爲一邊的金三角形個數之最大值.則由已知條件可知不同的金三角形之個數至多

$$k \cdot \frac{C_2^n}{3} = \frac{kn(n-1)}{6}.$$

因此,

$$\frac{kn(n-1)}{6} \geq \frac{n(n-1)(n-2)}{20}.$$

於是可得

$$k \geq \left\lceil \frac{3(n-2)}{10} \right\rceil \geq \left\lceil 599\frac{1}{10} \right\rceil = 600.$$

[問題4參考解答]:(台師大數學系朱亮儒教授設計提供)

原不等式等價於

$$3\left(\frac{a}{b}+\frac{b}{c}+\frac{c}{a}\right) \geq \frac{(a+b)+(c+a)}{b+c}+\frac{(a+b)+(b+c)}{c+a}+\frac{(b+c)+(c+a)}{a+b}+3$$
$$=\left(1+\frac{a+b}{b+c}+\frac{b+c}{a+b}\right)+\left(1+\frac{b+c}{c+a}+\frac{c+a}{b+c}\right)+\left(1+\frac{c+a}{a+b}+\frac{a+b}{c+a}\right).$$

因此,我們僅須證明以下三個不等式:

$$\frac{a}{b}+\frac{b}{c}+\frac{c}{a} \geq 1+\frac{a+b}{b+c}+\frac{b+c}{a+b}$$
$$\frac{a}{b}+\frac{b}{c}+\frac{c}{a} \geq 1+\frac{b+c}{c+a}+\frac{c+a}{b+c}$$
$$\frac{a}{b}+\frac{b}{c}+\frac{c}{a} \geq 1+\frac{c+a}{a+b}+\frac{a+b}{c+a}$$

然而,這三個不等式均等價於:

$$x+y+z \geq 1+\frac{1+x}{1+xz}+\frac{1+xz}{1+x},$$

其中x,y,z都是正數且$xyz=1$. 但上式又等價於:

$$x^3z+y+xz^2+xy+z \geq 2xz+x+2.$$

事實上,利用算幾不等式及$xyz=1$, 我們可得

$$\text{左式} = \frac{1}{2}(x^3z+y)+\frac{1}{2}(x^3z+y+xz^2+xz^2)+(xy+z)$$
$$\geq x+2xz+2 = \text{右式}.$$

故原不等式成立(而等號成立之充要條件爲$x=y=z=1$, 亦即$a=b=c$).

[問題5參考解答]: (1998 IMO國手陳明揚同學設計提供)

可觀察出: 若$f(x_1)=f(x_2)$, 則$|x_1|=|x_2|$. 因爲

$$x_1^2+f(x)=f(x+f(x_1)^2)=f(x+f(x_2)^2)=x_2^2+f(x),\ \forall\, x \in R.$$

令$x=0$代入原方程可導出$f(f(y)^2)=y^2+f(0)$. 令$y=0$代入可導出$f(0)=0$. 因此, $f(f(y)^2)=y^2$. 於是可得

$$f(x+f(y)^2)=f(f(y)^2)+f(x),\ \forall\, x,y \in R.$$

又對每一非負的實數z, 取$y=f(z^{\frac{1}{4}})^2$, 得$f(y)^2=z$. 故由上式可得, 對非負的實數x,y, 都有

$$f(x+y)=f(y)+f(x).$$

另一方面,對每一非負的實數$x > y \geq 0$,取$x_0 = f((x-y)^{\frac{1}{4}})^2$,得$f(x_0) = \sqrt{x-y}$.於是有

$$f(x) = f(y + (x-y)) = f(y + f(x_0)^2) = x_0^2 + f(y) > f(y).$$

因此,函數f在$[0,\infty)$上是一嚴格遞增.故由柯西方程知有一實數a,使得

$$f(x) = ax,\ \forall\, x \in [0,\infty).$$

代回檢驗知$a^3 = 1$,得$a = 1$.因此,$f(x) = x, \forall\, x \geq 0$.因爲

$$f(f(x)^2) = x^2 = (-x)^2 = f(f(-x)^2),$$

由前面的觀察可得$f(x)^2 = f(-x)^2$.故有

$$|f(x)| = |f(-x)|,\ \forall\, x \in R.$$

因此,對$x < 0$, $f(x) = x$或$f(x) = -x$.若有一數$b < 0$,使得$f(b) = -b$,則可取一足夠大的正數y,使得$f(y)^2 + b = y^2 + b > 0$.於是得

$$b + y^2 = b + f(y)^2 = f(b + f(y)^2) = y^2 + f(b) = y^2 - b.$$

矛盾!故

$$f(x) = x,\ \forall\, x < 0.$$

因此,滿足問題的函數僅有單位函數,即$f(x) = x,\ \forall\, x \in R$.代回原方程檢驗成立.

[問題6參考解答]:(台師大數學系朱亮儒教授設計提供)

令Q表示所有滿足條件的質數p所成的集合,且令

$$T = \{M_2, M_3, M_5, M_7, M_{13}\},$$

其中$M_p = 2^p - 1$是Mersenne質數.我們將證明$Q = T$.

(1)若存在$p \in Q$,但$p \notin T$,則取X的子集合$S = T$.因$p \in Q$且$p \notin S$,故必有一$q \in X$,但$q \notin S$,使得$q + 1$是$(M_2+1)(M_3+1)(M_5+1)(M_7+1)(M_{13}+1) = 2^{30}$的因數.於是可得$q = 2^r - 1$,其中$r \leq 30$.但$q$是質數,故$q$是一Mersenne質數,即$q = M_r$,其中$r \leq 30$且是質數.因Mersenne質數$M_r$,其中$r \leq 30$,只有$M_2, M_3, M_5, M_7, M_{13}, M_{17}, M_{19}$,而$M_{19} > M_{17} > 10000$,故$r \leq 13$.由此導出$q = M_r \in T = S$,矛盾!故知$Q \subset T$.

(2)若存在$p \in T$,但$p \notin Q$,則必有一X的子集合$S = \{p_1, p_2, \cdots, p_k\}$,其中$k \geq 2$,使得$p \notin S$,且當$q \in X$,而$q + 1$是$(p_1+1)(p_2+1)\cdots(p_k+1)$的因數時,我們就有$q \in S$.因$k \geq 2$,故有

$$4 = M_2 + 1 \ \mid\ (p_1+1)(p_2+1) \Longrightarrow M_2 = 3 \in S$$

再由

$$8 = M_3 + 1 \ \mid\ (3+1)(p_2+1) \Longrightarrow M_3 = 7 \in S.$$

$$32 = M_5 + 1 \ \mid\ (3+1)(7+1) \Longrightarrow M_5 = 31 \in S.$$

$$128 = M_7 + 1 \ \mid\ (3+1)(31+1) \Longrightarrow M7 = 127 \in S.$$

$$8192 = M_{13}+1 \mid (31+1)(127+1) \Longrightarrow M_{13} = 8191 \in S.$$

於是可得$p \in T \subset S$,矛盾!故知$T \subset Q$.

因此,所有滿足條件的質數p爲

$$M_2 = 3,\ M_3 = 7,\ M_5 = 31,\ M_7 = 127,\ M_{13} = 8191.$$

[問題7參考解答]:(台師大數學系趙文敏教授設計提供)

設PR與AC相交於點X.在ΔAPX與ΔCRX中引用正弦定律,則得

$$\frac{AP}{AX} = \frac{\sin\angle AXP}{\sin\angle APX},\quad \frac{CR}{CX} = \frac{\sin\angle CXR}{\sin\angle CRX}.$$

顯然地,$\angle AXP = \angle CRX$, $\sin\angle AXP = \sin\angle CXR$.因爲$\angle BPX = \angle CRX$,所以,$\angle APX = 180^o - \angle CRX$,由此得$\sin\angle APX = \sin\angle CRX$.於是

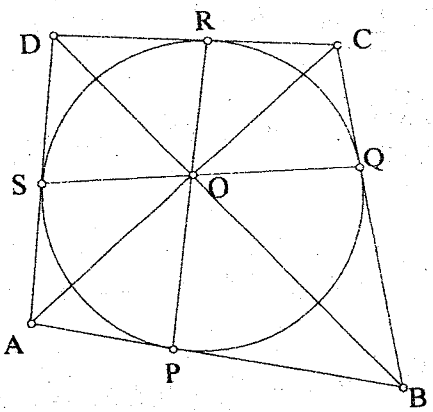
$$\frac{AP}{AX} = \frac{CR}{CX},\quad \frac{AP}{CR} = \frac{AX}{CX}.$$

其次,設QS與AC相交於點Y.則同理可證得

$$\frac{AS}{AY} = \frac{CQ}{CY},\quad \frac{AS}{CQ} = \frac{AY}{CY}.$$

因爲$AP = AS$且$CR = CQ$,所以,可得$\frac{AX}{CX} = \frac{AY}{CY}$.進一步得$X = Y$,亦即:$PR, QS$與$AC$共點.同理可證:$PR, QS$與$BD$共點.由此可知$AC, BD, PR, QS$共點且其交點爲$O$.最後在$\Delta APO$與$\Delta CRO$中引用正弦定律,則得

$$\frac{AP}{AO} = \frac{\sin\angle AOP}{\sin\angle APO} = \frac{\sin\angle COR}{\sin\angle CRO} = \frac{CR}{CO},\quad \frac{AO}{CO} = \frac{AP}{CR}.$$



[問題8參考解答]：(台師大數學系陳昭地教授設計提供)

爲了方便,我們令

$$f_{m,n}(k)=\left[\frac{k}{m}\right]+\left[\frac{k}{n}\right].$$

則

$$S(m,n):=\sum_{k=0}^{mn-1}(-1)^{[\frac{k}{m}]+[\frac{k}{n}]}=\sum_{k=0}^{mn-1}(-1)^{f_{m,n}(k)}.$$

(1) 若m與n都是奇數,則$S(m,n)$是由奇數個(mn項) 1與-1之和,故$S(m,n)\neq 0$.

(2) 若m與n是一奇一偶數,則由恆等式

$$\left[\frac{i}{m}\right]+\left[k-\frac{i+1}{m}\right]=k-1,\ \forall\, i,k,m,$$

可得

$$\left[\frac{i}{m}\right]+\left[\frac{mn-i-1}{m}\right]=n-1,\quad \text{且}\quad \left[\frac{i}{n}\right]+\left[\frac{mn-i-1}{n}\right]=m-1.$$

由此可得

$$f_{m,n}(i)+f_{m,n}(mn-i-1)=m+n-2\ \ \text{爲一奇數}.$$

因此,

$$(-1)^{f_{m,n}(i)}=-(-1)^{f_{m,n}(mn-1-i)},\ \forall\, i.$$

故當m與n是一奇一偶數時, $S(m,n)=0$.

(3) 若$m=2k$與$n=2l$都是偶數,則由恆等式

$$\left[\frac{2i}{2k}\right]=\left[\frac{2i+1}{2k}\right],\ \left[\frac{2i}{2l}\right]=\left[\frac{2i+1}{2l}\right],\ \forall\, i,$$

及利用$f_{2k,2l}(2i)=f_{k,l}(i)$與$f_{k,l}(kl+i)=(l+k)+f_{k,l}(i)$,可得

$$S(m,n)=S(2k,2l)=\sum_{i=0}^{2kl-1}\left((-1)^{f_{2k,2l}(2i)}+(-1)^{f_{2k,2l}(2i+1)}\right)=2\sum_{i=0}^{2kl-1}(-1)^{f_{2k,2l}(2i)}$$

$$=2\sum_{i=0}^{2kl-1}(-1)^{f_{k,l}(i)}=2\left(\sum_{i=0}^{kl-1}(-1)^{f_{k,l}(i)}+\sum_{i=0}^{kl-1}(-1)^{f_{k,l}(kl+i)}\right)=2S(k,l)\left(1+(-1)^{k+l}\right).$$

如此,

$$S(m,n)=0\iff S(k,l)\left(1+(-1)^{k+l}\right)=0\iff S(k,l)=0\ \text{或}\ 1+(-1)^{k+l}=0.$$

但

$$1+(-1)^{k+l}=0\iff k+l\ \text{是奇數}\implies S(k,l)=0,$$

故

$$S(m,n)=0\iff S(k,l)=0.$$

現在,對任意滿足條件的正整數解(m,n),可令$m=2^pk, n=2^ql$,其中$p,q\geq 0$,且k,l是奇數.不失一般性,可令$p\geq q$.則由(iii)可得

$$S(m,n)=0 \iff S(2^{p-q}k,l)=0.$$

若$p=q$,由(i)知$S(2^{p-q}k,l)=S(k,l)\neq 0$,矛盾.於是有$p\neq q$.反之,若$p\neq q$,可令$p>q$,由(ii)知$S(2^{p-q}k,l)=0$,故得$S(m,n)=0$.由對稱性可知,$p<q$的情況亦同.因此,所有的正整數解$(m,n)$爲

$$m=2^pk,\ n=2^ql,\ \text{其中}\ p,q\geq 0, p\neq q,\ \text{且}\ k,l\ \text{是奇數}.$$

[問題9參考解答]:(中研院數研所葉永南研究員設計提供)

將這1999人分成兩類:

$$X=\{x;\ \text{與}\ x\ \text{握過手的人數}\ \leq 1958\}$$

$$Y=\{y;\ \text{與}\ y\ \text{握過手的人數}\ \geq 1959\}.$$

假設$|X|<41$,則$|Y|=1999-|X|\geq 1959$.令$N(z)$表示所有與z握過手的人所成的集合.令$y_1\in Y$,則$|N(y_1)|\geq 1959$,且

$$|N(y_1)\cap Y|=|N(y_1)|+|Y|-|N(y_1)\cup Y|$$

$$\geq 1959+1959-1999=2\cdot 1959-1999>0.$$

取$y_2\in N(y_1)\cap Y$,則$|N(y_2)|\geq 1959$,且

$$|N(y_1)\cap N(y_2)\cap Y|=|N(y_1)\cap Y|+|N(y_2)|-|(N(y_1)\cap Y)\cup N(y_2)|$$

$$\geq 2\cdot 1959-1999+1959-1999=3\cdot 1959-2\cdot 1999>0.$$

可取$y_3\in N(y_1)\cap N(y_2)\cap Y$.依此下去,假設我們可選出$y_1,y_2,y_3,\cdots,y_j,(j\leq 48)$,令

$$B_j=N(y_1)\cap N(y_2)\cap\cdots\cap N(y_j).$$

則

$$|B_j|\geq j\cdot 1959-(j-1)\cdot 1999\geq 79,\ \forall\, j=1,2,\cdots,48.$$

因此,$B_j\cap Y\neq\emptyset$(因爲$|B_j|+|Y|>1999$).故可選出$y_{j+1}\in B_j\cap Y$.由此可得

$$|B_{j+1}|=|B_j|+|N(y_{j+1})|-|N(y_{j+1})\cup B_j|$$

$$\geq (j+1)\cdot 1959-j\cdot 1999>0,\ \forall\, j=1,2,3,\cdots,48.$$

因此,

$$|B_{49}|\geq 49\cdot 1959-48\cdot 1999>0.$$

於是知$B_{49}\neq\emptyset$,亦即存在一個y_{50}使得$y_{50}\in N(y_1)\cap N(y_2)\cap\cdots\cap N(y_{49})$.此式告訴我們,$y_1,y_2,\cdots,y_{50}$兩兩都握過手,矛盾!故$|X|\geq 41$.

[問題10參考解答]：(台師大數學系朱亮儒教授設計提供)

若$p=2$,則可得$n=2$,故命題成立.若$p\geq 3$是一奇質數,則$(p-1)^n+1$也是奇數,故n必爲奇數.爲了方便,我們令$h=p-1$,則h爲偶數且n^h是h^n+1的因數.令k是n的最小質因數,則k爲奇數,於是有$k\geq 3$,且k與h互質.令q是滿足$k\mid h^q+1$的最小正整數.若$q\geq k-1$,則可令$q=(k-1)a+r$,其中$0\leq r<k-1$.由費瑪小定理可得

$$h^q+1=\left(h^{k-1}\right)^a\cdot h^r+1\equiv h^r+1 \pmod k.$$

因$k\mid h^q+1$,故有$k\mid h^r+1$.由$k\geq 3$,可得$r\neq 0$.於是有一比q小的正整數r滿足$k\mid h^r+1$,此與q是最小正整數矛盾.因此,$1\leq q<k-1<n$.令$n=qb+s,0\leq s<q$.則有

$$k\mid h^n+1=((h^q+1)-1)^b\cdot h^s+1.$$

因爲$k\mid h^q+1$,故得$k\mid(-1)^bh^s+1$.若b是偶數,則$k\mid h^s+1$.由q之最小性質,得$s=0$.於是可得k是$h^s+1=2$的因數,矛盾!故b是奇數.因此可得$k\mid h^s-1$.若$s>0$,可令$q=s+c$,其中$1\leq c<q$,則有

$$h^q+1=(h^s-1)h^c+h^c+1\equiv h^c+1 \pmod k.$$

由q之最小性質,得$c=0$,矛盾!故$s=0$,亦即$n=qb$.但$1\leq q<k-1$,且k是n的最小質因數,故$q=1$(否則q有一個比k小的質因數,而且是n的因數).由此可得k是$h^q+1=p$的因數.因爲k,p都是質數,故$k=p$,即得證n是p的倍數.

[問題11參考解答]：(台師大數學系朱亮儒教授設計提供)

(1)若$m=3$,則$A=\{1,2,3\}$.顯然,最小正整數$k=1$.

(2)若$m=2n,n\geq 2$.當刪除A中所有的奇數$1,3,5,\cdots,2n-1$後,剩餘的n個元素都是偶數,故每兩個元素和都是一合成數.以下我們用數學歸納法證明最小正整數$k=n$,亦即從集合A中至少要刪除n個適當的元素後,才能使得在剩餘的$2n-k$個元素中,每兩個元素和都是一合成數.

當$n=2$時,由$1+4=2+3=5$不是合成數,故$\{1,4\}$及$\{2,3\}$中各自至少要刪除1個元素後,才能達成目標.故$n=2$時,命題成立.假設$n\leq r-1$時,命題均成立.當$n=r$時,由Bertrand定理知,存在一質數$p=2r+2l+1\in(2r,4r)$,其中$0\leq l\leq r-1$.令

$$B=\{1,2,3,\cdots,2l\}\ ,\ C=\{2l+1,2l+2,2l+3,\cdots,2r\}.$$

則$A=B\cup C$,且$B\cap C=\emptyset$.由歸納法的假設,欲達成目標我們至少要刪除B中的l個元素.至於集合C,我們將它分成$r-l$組$\{s,p-s\}$, $s=2l+1,2l+2,\cdots,l+r$.因爲在任一組中的兩元素和都是p,不是一合成數,故各組至少要刪除1個元素後,才能達成目標.因此,至少要刪除C中的$r-l$個元素後,才能達成目標.於是得知至少要刪除A中的$(r-l)+l=r$個元素後,才能達成目標,故得證.

(3)若$m=2n+1,n\geq 2$.當刪除A中所有的偶數$2,4,6,\cdots,2n$後,剩餘的$n+1$個元素都是奇數,故每兩個元素和都是合成數,得知最小正整數$k\leq n$.但因集合A包含$\{1,2,3,\cdots,2n\}$,由(2)的結果可知,$k\geq n$.因此,最小正整數$k=n$.

綜合上述的討論可知,最小正整數$k=[\frac{m}{2}]$.

[問題12參考解答]:(中研院統研所傅承德副研究員設計提供)

僅須證明存在一實數x,使得

$$x \in \left[\frac{a_n}{n}, \frac{a_n+1}{n}\right), \ \forall\, n = 1, 2, \cdots, 1999.$$

令

$$L = \max\{\frac{a_n}{n};\ n = 1, 2, 3, \cdots, 1999\} = \frac{a_p}{p},$$

$$U = \min\{\frac{a_n+1}{n};\ n = 1, 2, 3, \cdots, 1999\} = \frac{a_q+1}{q}.$$

若可得證

$$\frac{a_n}{n} < \frac{a_m+1}{m}, \ \forall\, n, m = 1, 2, 3, \cdots, 1999,$$

即

$$ma_n < n(a_m+1), \ \forall\, n, m = 1, 2, 3, \cdots, 1999, \qquad (*)$$

則有$L < U$.事實上,若$L \geq U$,則取$n = p$及$m = q$,即可導出與$(*)$式矛盾.因此,任意實數$x \in [L, U)$均滿足所求.最後,我們對$m + n = k \geq 2$,利用數學歸納法來證明$(*)$式:當$m = n = 1$時,$(*)$式顯然成立.假設當$m + n < k$時,$(*)$式均成立,則當$m + n = k$時,我們分以下三種情況討論:

(1) 若$m = n$,則$(*)$式恆成立.

(2) 若$m > n$,則由歸納假設得$(m-n)a_n < n(a_{m-n}+1)$.又由已知條件可知

$$n(a_{m-n} + a_n) \leq na_m,$$

故合併這兩不等式,則可得知$(*)$式成立.

(3) 若$m < n$,則由歸納假設得$ma_{n-m} < (n-m)(a_m+1)$.又由已知條件可知

$$ma_n \leq m(a_m + a_{n-m} + 1),$$

故合併這兩不等式,則可得知$(*)$式成立.

[問題13參考解答]:(台師大數學系朱亮儒教授設計提供)

令A', B', C'分別為AM, BM, CN與ΔABC的外接圓O之交點.則$AO = R$,且

$$MA \cdot MA' = MB \cdot MB' = MC \cdot MC' = |t| = R^2 - OM^2,$$

其中$t = R^2 - OM^2$為點M對圓O的點冪,而R為圓O的半徑.因為$\Delta MAB \sim \Delta MB'A'$,故

$$\frac{MA}{MB'} = \frac{MB}{MA'} = \frac{AB}{A'B'}.$$

於是有

$$A'B' = AB \cdot \frac{MB'}{MA} = AB \cdot \frac{MB' \cdot MB}{MA \cdot MB} = AB \cdot \frac{t}{MA \cdot MB}.$$

同理,

$$B'C' = BC \cdot \frac{t}{MB \cdot MC},$$

$$C'A' = CA \cdot \frac{t}{MC \cdot MA}.$$

另一方面,因爲A_1, C, B_1, M四點共圓,且MC是ΔA_1B_1C的外接圓直徑,由正弦定理可得

$$A_1B_1 = MC \cdot \sin C = \frac{AB \cdot MC}{2R}.$$

於是有

$$\frac{A_1B_1}{A'B'} = \frac{\frac{AB \cdot MC}{2R}}{AB \cdot \frac{|t|}{MA \cdot MB}} = \frac{MA \cdot MB \cdot MC}{2Rt}.$$

同理,

$$\frac{B_1C_1}{B'C'} = \frac{C_1A_1}{C'A'} = \frac{MA \cdot MB \cdot MC}{2Rt}.$$

於是可知$\Delta A_1B_1C_1 \sim \Delta A'B'C'$,且面積比

$$\frac{\Delta A_1B_1C_1}{\Delta A'B'C'} = \frac{MA^2 \cdot MB^2 \cdot MC^2}{4R^2t^2}.$$

又由面積公式知

$$\frac{\Delta A'B'C'}{\Delta ABC} = \frac{\frac{A'B' \cdot B'C' \cdot C'A'}{4R}}{\frac{AB \cdot BC \cdot CA}{4R}} = \frac{t^3}{MA^2 \cdot MB^2 \cdot MC^2},$$

故得

$$\frac{\Delta A_1B_1C_1}{\Delta ABC} = \frac{t}{4R^2} = \frac{R^2 - OM^2}{4R^2} \leq \frac{R^2 - (AO - AM)^2}{4R^2} \leq \frac{3}{16}.$$

[問題14參考解答]:(台師大數學系張幼賢教授設計提供)

注意: $f(x,y) = \frac{1}{2}(x+y-1)(x+y-2) + x \in N,\ \forall\, x, y \in N$. 對任意的正整數$k$,必有唯一的$n \in N$,使得

$$\frac{1}{2}(n-1)(n-2) < k \leq \frac{1}{2}n(n-1).$$

令

$$x = k - \frac{1}{2}(n-1)(n-2) \quad 且 \quad y = n - x. \tag{*}$$

則(x,y)是方程式$f(x,y) = k$的一組正整數解.事實上,

$$0 < x \leq \frac{1}{2}n(n-1) - \frac{1}{2}(n-1)(n-2) = n-1,$$

$$y = n - x \geq n - (n-1) = 1,$$

而且

$$k = x + \frac{1}{2}(n-1)(n-2) = \frac{1}{2}(x+y-1)(x+y-2) + x = f(x,y).$$

另一方面,若存在方程式$f(x,y)=k$的一另組正整數解(x_1,y_1).即$f(x_1,y_1)=f(x,y)=k$,但$(x_1,y_1,)\neq(x,y)$,其中(x,y)爲$(*)$所定義.

(1)若$x+y=x_1+y_1$,則由函數f之定義可知$x=x_1$,因而$y=y_1$,矛盾!

(2)若$x+y<x_1+y_1$,則由$(*)$可知$x_1+y_1>x+y=n$,因而$x_1+y_1\geq n+1$.因爲

$$k \leq \frac{1}{2}n(n-1) \leq \frac{1}{2}(x_1+y_1-1)(x_1+y_1-2) = f(x_1,y_1) - x_1 = k - x_1,$$

故得$x_1\leq 0$,矛盾!

(3)若$x+y>x_1+y_1$,則由$(*)$可知$x_1+y_1\leq x+y-1=n-1$,因而$x_1+y_1-1\leq n-2$且$x_1+y_1-2\leq n-3$.由此可得

$$x_1 = f(x_1,y_1) - \frac{1}{2}(x_1+y_1-1)(x_1+y_1-2) \geq k - \frac{1}{2}(n-2)(n-3)$$

$$\geq \frac{1}{2}(n-1)(n-2) - \frac{1}{2}(n-2)(n-3) = n-2.$$

又因爲$2\leq x_1+y_1\leq n-1$,故得$x_1=n-2, y_1=1$.於是,

$$k = f(x_1,y_1) = \frac{1}{2}(n-2)(n-3) + (n-2) = \frac{1}{2}(n-1)(n-2).$$

再由$(*)$可得

$$x = k - \frac{1}{2}(n-1)(n-2) = 0,$$

矛盾!

因此,由$(*)$式所定義的(x,y)是方程式$f(x,y)=k$唯一的正整數解.

[問題15參考解答]:(中研院數研所葉永南研究員設計提供)

令a表示圈選同一影片的委員人數之最小值,並令A表示這組圈選委員所成的集合,而α表示他們圈選的影片,則$|A|=a$,且$1\leq a\leq 7$.若$B=X-A$,其中X表示這8位審查委員所成的集合,則集合B的成員除影片α外,他們都圈選其他的每一部影片.故由已知條件得$n-1$是偶數,即n是奇數.

(1)證明每一位委員都單獨圈選到某一部影片:若某委員P沒有單獨圈選到某一部影片,則每一部影片一定被P以外的某些委員圈選到.故由已知條件得n是偶數,矛盾!

(2)證明每一羣部分委員都同時圈選到某一部影片:假設有某一羣部分委員沒同時圈選到同一部影片,令k表示這樣的委員數之最小值,並令Y表示這羣委員所成的集合,則$8>|Y|=k\geq 2$.對任一元素個數少於k個的非空子集$Z\subset X$,由k之最小值,可得Z中的所有委員同時圈選到同一部影片.於是可得,對Y的任一非空的眞子集W,W中的所有委員會圈選到同一部影片.因此,$X-Y$中的所有委員圈選到的影片數爲$n-(2^k-2)$,此數爲奇數,矛盾!

因爲不同影片的圈選委員不完全相同,再利用上面的結果可知影片數n至少$2^8-2=254$.但$n\leq 2^8=256$,且爲奇數,故$n=255$.