

# 克卜勒定律的模擬

陳炳  
省立泰山高中

高二自然組的同學在學習牛頓萬有引力定律之前，總會先認識一位偉大的天文學家——克卜勒(Johannes Kepler, 1571-1630)。他悲劇的一生、刻苦勤奮的研究精神與他在天文學上的斐然成就，深深地讓人著迷。西元一六〇〇年，他投靠了一位在丹麥的天文觀察家第谷·布拉(Tycho Brahe, 1546-1601)，成為他的助手。克卜勒在天文觀察上的興趣，遠不及他在數學上的執著，他面對第谷留傳下來的詳盡天文觀測資料，孜孜矻矻的鑽研，企圖尋求其數學規則。其間，遭逢經濟不景氣，他在貧病交困之中，花了九年的時光，於一六〇九年首先出版了「新天文學」一書，詳述了克卜勒第一、二定律，又於一六一九年獲致第三定律。奠定了一六八七年牛頓推演萬有引力定律的基石。

克卜勒延續哥白尼(Nicolaus Copernicus, 1473-1543)以太陽為中心的理念，提出克卜勒第一定律(又名軌道定律)：

太陽系的行星，各在以太陽為焦點之一的橢圓形軌道上運行。

目前已知由近而遠分別為水星、金星、地球、火星、木星、土星、天王星、海王星與冥王星。除水星外，軌道愈小者愈近似圓形，軌道愈大者橢圓愈扁。

克卜勒第二定律(又名等面積定律)，則研究某一行星在其橢圓形軌道上的運行速率，發現行星離太陽愈近時，其速率愈快，反之則愈慢，且：

由太陽至某一行星的連線，於相等時間內掃過相等的面積。

由此，我們可以了解到為什麼地球在近日點的半年內(秋分至次年的春分)較在遠日點的半年內(春分至同年秋分)，少了三天(以平年計算)，就是因為地球在近日點的運行速率較快的緣故。

克卜勒第三定律(又名週期定律)，則討論太陽中的每一顆行星，推算其週期與軌道平均半徑，發現：

行星繞太陽的軌道平均半徑( $R$ )之立方，與行星繞太陽週期( $T$ )之平方的比值均相同。即  $R^3 / T^2 = K$

其中軌道平均半徑為行星於近日點與遠日點離太陽的平均距離(即橢圓軌道的半長軸)，而比值 $K$ 則決定於其中心球體——太陽。

同學們對於克卜勒的才華敬佩有餘，但是對於定律的內容，卻普遍缺乏具體的領會。

筆者利用模擬的技巧，製作一套應用軟體，冀望能增進同學們對此一定律的了解，並領略一下物理定律之美，茲簡介如后：

(圖一)是本軟體的歡迎畫面，圖中兩個本校校徽會在平面上作二度空間的彈性碰撞，就當作是一個噱頭吧。



(圖一) 歡迎畫面

本軟體的目的在生動呈現行星運動的精微過程，使學生能脫離抽象概念進而產生具體的印象。為方便學生觀察行星繞太陽運動的過程中，其位置隨時間變化的情形，可即時顯示其每一時刻之行星位置，並沿途留下其運動軌跡。

同時也希望引導學生了解在微小（相對於週期）的時距  $\Delta t$  內，行星的受力狀態可視為不變。如果所取的時距  $\Delta t$  愈小，則所模擬出的運動就愈接近理想狀態，故可藉此體會微積分的原理。(圖二)是簡單的原理說明與操作方法：模擬可分為三個步驟，在畫面中每隔二秒鐘，循環顯示。

步驟一：計算行星的加速度

$$a_x = F_x / m$$

$$a_y = F_y / m$$

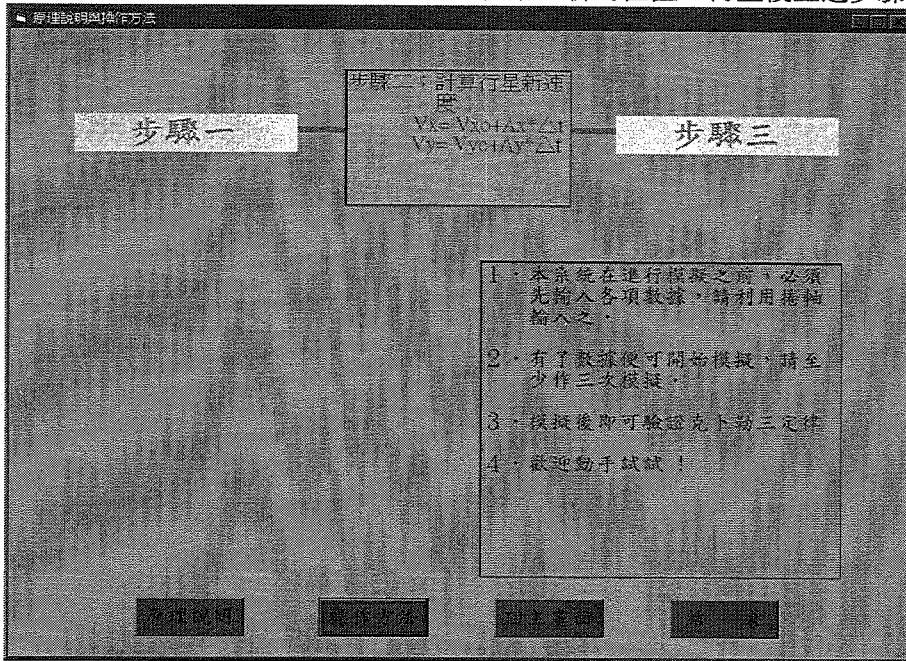
步驟二：計算行星的新速度

$$V_x = v_o + a_x \times \Delta t$$

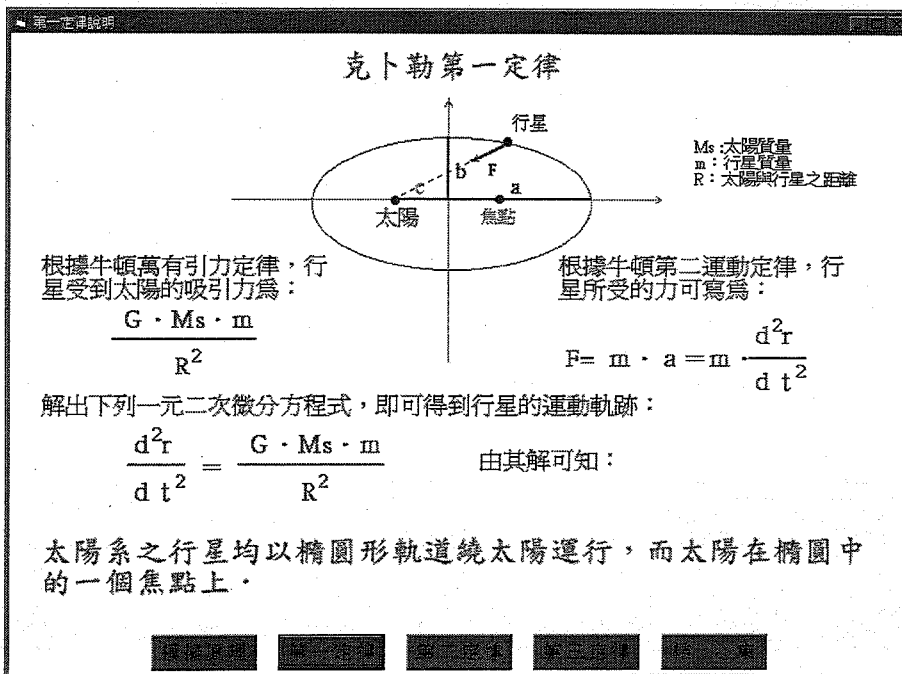
$$V_y = v_o + a_y \times \Delta t$$

步驟三：計算行星的新位置

依等加速度運動之方式，讓行星移動至新的位置，再重複上述步驟。



(圖二) 原理說明與操作方法



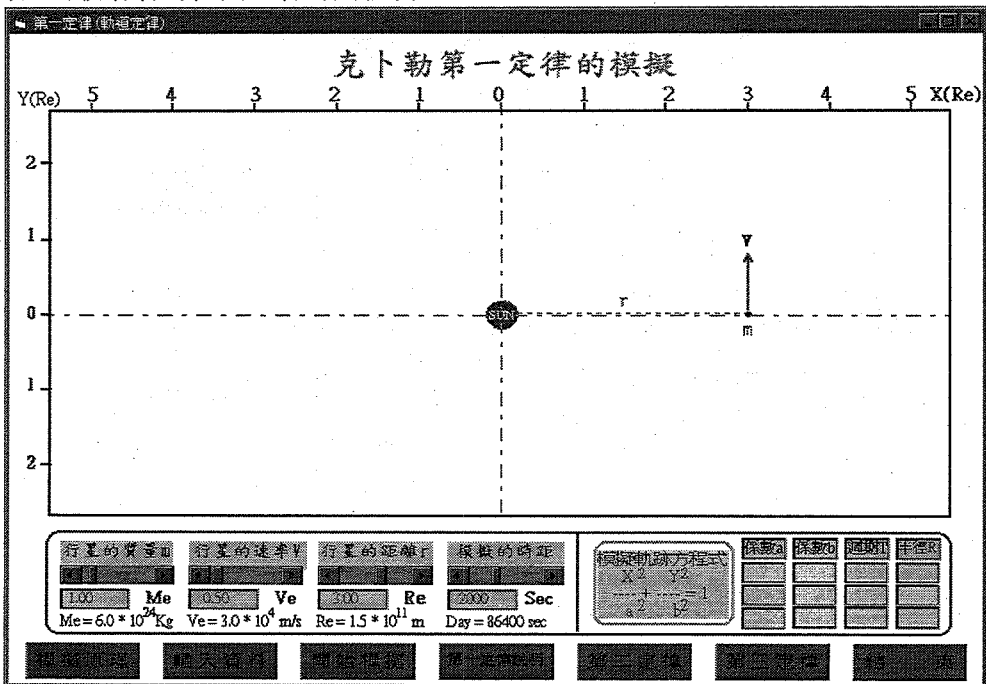
(圖三) 第一定律的說明

進入第一定律時，可先觀看第一定律的內容簡介，如（圖三）。基本上，要解出行星的軌跡方程式，只需要用到牛頓萬有引力及牛頓第二運動定律即可。但礙於高中數學課程尚未論及微分方程式，所以只交待其解題方向，待其數學能力提昇，問題自然迎刃而解。

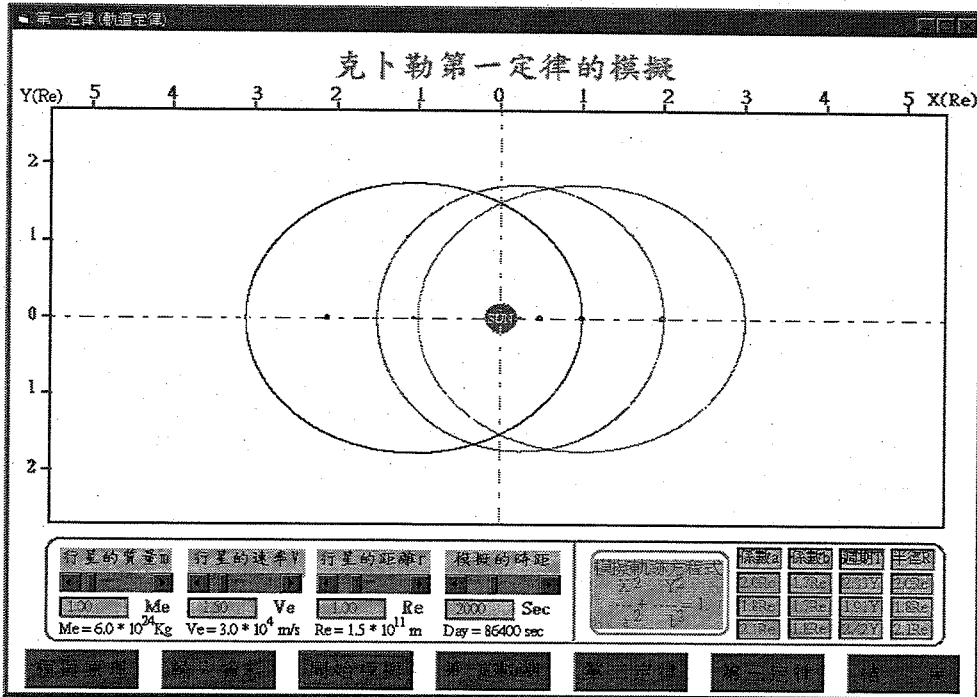
正式模擬時，可依學習者的意思輸入行星之質量（以  $6.0 \times 10^{24}$  公斤為單位）、起始速率（以  $3.0 \times 10^4$  公尺／秒為單位）、起始位置（以離太陽距離  $1.5 \times 10^{11}$  公尺為單位）與模擬的時距（以秒為單位，愈小愈精確，但費時愈久，這要視學習者的耐性而定）。

每回執行可釋放三顆行星，每顆行星的軌跡以不同的顏色顯示。其軌跡方程式（含半長軸、半短軸）、公轉週期（以年為單位），均可立即顯示出來。除了太陽在其中一個焦點上以外，我們也用同一顏色標示出另一個焦點。如（圖五）所示。同學在這過程中，可以得到不少樂趣，如：

- ◆ 行星的起始速率太小時，中途會相當靠近太陽，軌跡的誤差可能會很明顯，甚至於回不到出發點，或根本被拋出畫面之外。
- ◆ 行星的起始速率較大時，太陽可能會在右焦點；行星的起始速率較小時，太陽可能會在左焦點。
- ◆ 行星的軌跡有時甚圓，有時則較扁。



（圖四）第一定律模擬－輸入數據



(圖五) 第一定律的模擬結果

由模擬結果，可以看出其中位於中央的軌道較接近於一個正圓。

第二定律的說明(圖六)部分，我們提到行星與太陽連線在相等的時距內會掃過相等面積的原因，其實就是角動量守恆：

$$\tau = r \times p \quad \text{即} \quad |\tau| = r \cdot m v \cdot \sin \theta = \text{常數}$$

式中當角度為零時(近日點與遠日點)，速率(v)正好與距離(r)成反比。

同時，我們也介紹了每一片近乎扇形的面積是如何計算的？在程式中，我們就是利用這種方式將行星與太陽的連線掃過之面積逐一累加起來的。

在模擬第二定律時，使用者可以選擇方才模擬過的任一顆行星，並且指定一段時距(以週期的分數表示)，讓電腦計算每一段時距之內，行星、太陽的連線確實掃過了多少面積？除了顯示數據以外，其實使用者由圖形(圖七)上也可以一目了然。無論太陽在左焦點或右焦點，程式都可以自動判別。

第三定律足足花了克卜勒十年的時光，但在今天我們已經知道了牛頓萬有引力定律，如果是圓形軌道，可以簡單的利用向心力證明第三定律。(如圖八)。

在第三定律模擬時(圖九)，我們可以引進先前模擬過的三顆行星資料。在此，為了觀察方便，我們把太陽平移至座標原點，並分別計算每一顆行星的軌道平均半徑的三次方

與週期的平方。很明顯的，他們的比值是一樣的。在此，些微的差異是由模擬造成的，如果  $\Delta t$  夠小，其誤差是可以忽略的。

**克卜勒第二定律**

克卜勒根據其老師泰戈布拉的觀測數據，發現某一行星與太陽的連線在相同時間內，會掃過相同面積。(可用角動量守恆證明)

而在微小的時距  $\Delta t$  之內，行星與太陽連線掃過的面積可用三角形計算：

因此：
$$\Delta A = \text{底} \times \text{高} \div 2 = R \times V \times \Delta t \times \sin \theta \div 2$$

面積速率：
$$\frac{\Delta A}{\Delta t} = R \times V \times \sin \theta \div 2 = \text{定值}$$

所以由克卜勒定律亦得到：行星在軌道上二個點：

$$R_1 \times V_1 \times \sin \theta_1 = R_2 \times V_2 \times \sin \theta_2 = \text{定值}$$

若在近日點及遠日點上，則速率與距離成反比：
$$R_1 \times V_1 = R_2 \times V_2 = \text{定值}$$

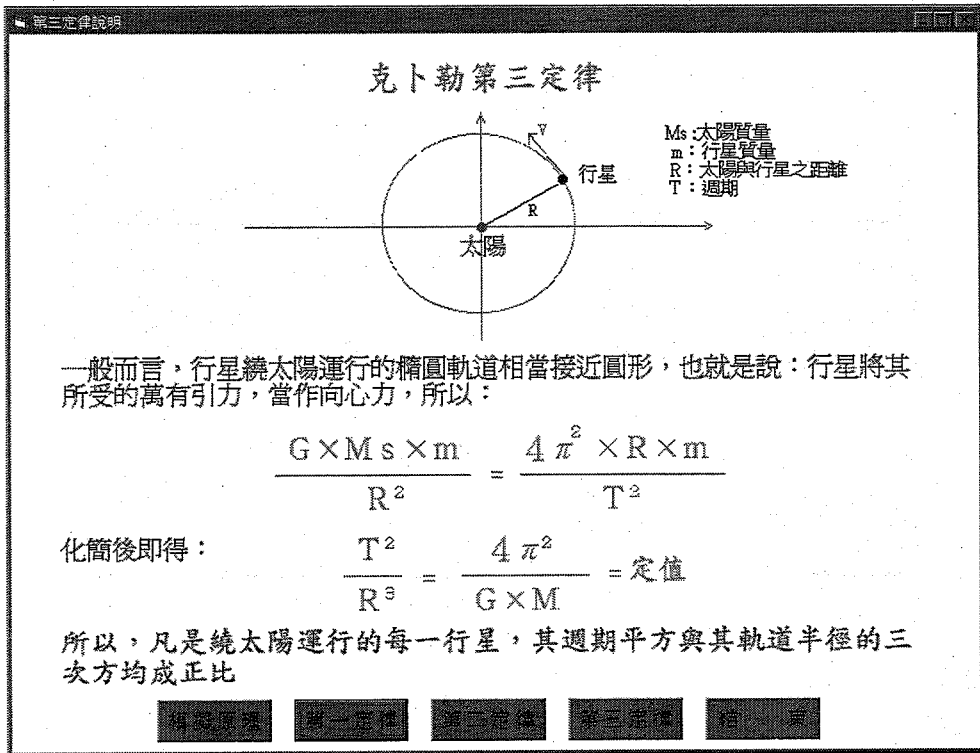
(圖六) 第二定律的說明

**克卜勒第二定律的模擬**

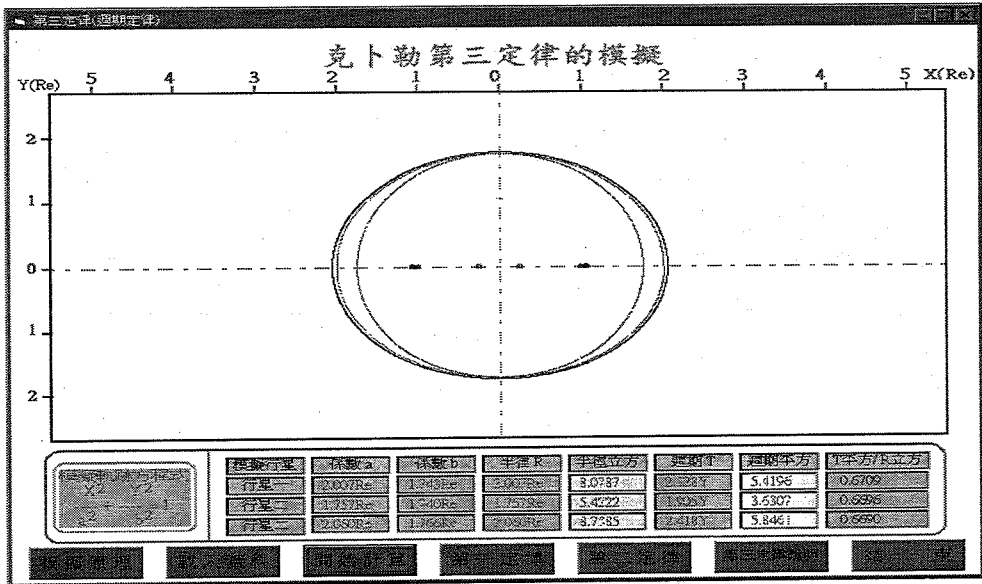
Y(Re) 5 4 3 2 1 0 1 2 X(Re)

掃描的時距	模擬的行星	橢圓軌道方程式	探軌	掃描面積(億平方公里)	面積速率(十萬平方公里/秒)
0.100	行星之一	$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$	探軌	244228989	244405306
	行星之二		探軌	244240438	244422291
	行星之三		探軌	244289351	2445266

(圖七) 第二定律的模擬

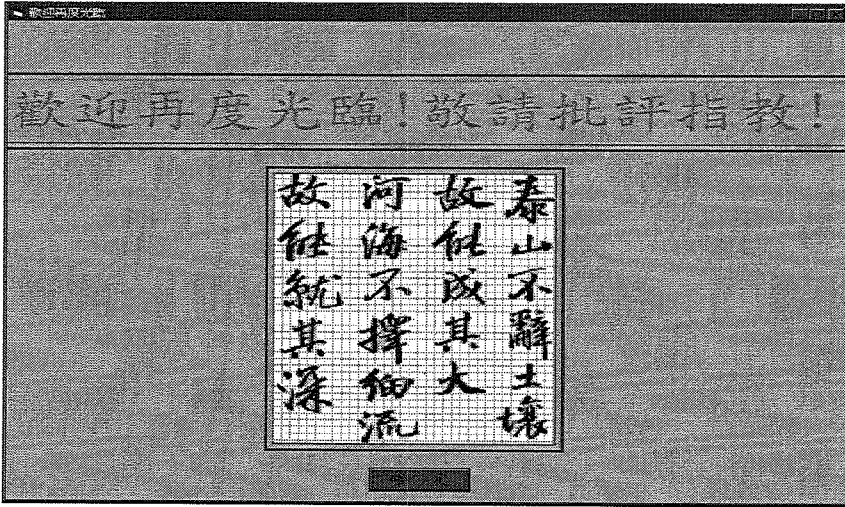


(圖八) 第三定律的說明



(圖九) 第三定律的模擬

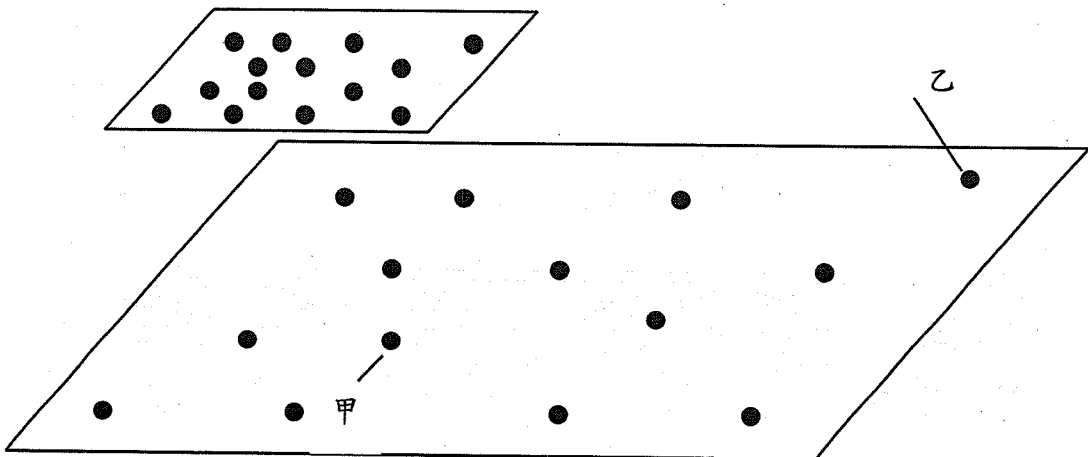
最後是一個結束畫面（圖十）。



(圖十) 結束畫面

隨著社會進步及資訊化的腳步加快，學生利用電腦設備的機會也愈來愈多，但難免有部分同學迷失於五光十色的電腦遊戲中而曠廢時日。本單元雖有動畫演示，但並不過分強調眩麗之聲光效果，以免喧賓奪主。學生在學習程式語言時，如能將所學與其他學科相互結合，不但可以提昇學習效果，亦能於學習中獲得其成就與樂趣，本校擬於校園網站中，提供本程式給同學們觀摩，以作為拋磚引玉的工作。

(上接 42 頁)



圖一 上圖為某一個時期的宇宙示意圖，下圖是膨脹後之示意圖。下圖中之甲星系與乙星系相距約一百億光年。

(待續)