Fermat 極值問題及其推廣（續）

趙文敏
國立臺灣師範大學　數學系

丙、Fermat 極小值問題的推廣

古典的 Fermat 極小值問題，除了推廣成定理 9 之外，在 [7]中，還考慮了一個較一般形式的極小值問題。

問題 1：設$\triangle A_1A_2A_3$爲任意三角形，b_1、b_2與 b_3爲三正數。試就$\triangle A_1A_2A_3$平面上的點 P 討論 $b_1\overline{A_1P}+b_2\overline{A_2P}+b_3\overline{A_3P}$的最小値及產生最小値的點。

要討論這個問題，我們先考慮 $b_1 \geqq b_2+b_3$的情形。在此種情形中，對於$\triangle A_1A_2A_3$平面上任意點 P，恆有

$$b_1\overline{A_1P}+b_2\overline{A_2P}+b_3\overline{A_3P} \geqq b_2(\overline{A_1P}+\overline{A_2P})+b_3(\overline{A_1P}+\overline{A_3P})$$
$$\geqq b_2\overline{A_1A_2}+b_3\overline{A_1A_3}\ 。$$

於是，當 $b_1 \geqq b_2+b_3$時，使 $b_1\overline{A_1P}+b_2\overline{A_2P}+b_3\overline{A_3P}$之値最小的點是 $P=A_1$。

設 $b_1<b_2+b_3$、$b_2<b_3+b_1$且 $b_3<b_1+b_2$，則三正數 b_1、b_2與 b_3可做爲一個三角形的三邊長。設$\triangle B_1B_2B_3$的三邊長分別爲：$\overline{B_2B_3}=b_1$、$\overline{B_3B_1}=b_2$及$\overline{B_1B_2}=b_3$；又設$\triangle B_1B_2B_3$的三個內角分別爲β_1、β_2及β_3。在本小節中，我們將以$\triangle B_1B_2B_3$的相似三角形取代定理 1 與定理 6 的正三角形來討論更一般化的 Fermat 問題。

定理 15：設$\triangle A_1A_2A_3$爲任意三角形。若$\triangle A_2A_3P_1$、$\triangle A_3A_1P_2$與$\triangle A_1A_2P_3$爲向外作出的三角形，而且$\triangle P_1A_2A_3 \sim \triangle A_1P_2A_3 \sim \triangle A_1A_2P_3 \sim \triangle B_1B_2B_3$ (此處的記號～表示相似且各對應頂點依序寫出)，則下述性質成立：

(1) $\triangle A_2A_3P_1$、$\triangle A_3A_1P_2$與$\triangle A_1A_2P_3$的外接圓交於一點 R。

(2) 直線 A_1P_1、A_2P_2與 A_3P_3都通過點 R。

(3) 當$\alpha_1+\beta_1<180^\circ$、$\alpha_2+\beta_2<180^\circ$且$\alpha_3+\beta_3<180^\circ$時，點 R 在$\triangle A_1A_2A_3$內部；$\angle A_1RP_2=\beta_3$、$\angle A_2RP_3=\beta_1$與$\angle A_3RP_1=\beta_2$；而且

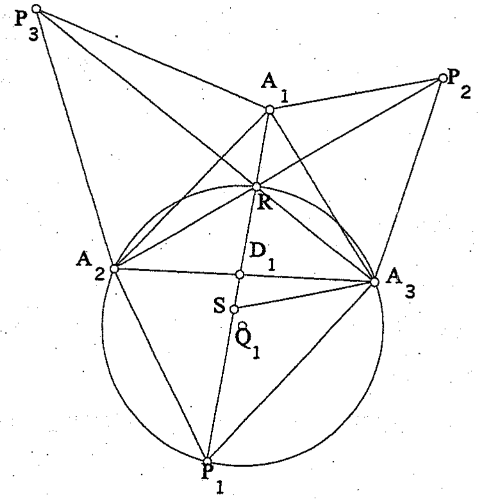
$$b_1\overline{A_1P_1}=b_2\overline{A_2P_2}=b_3\overline{A_3P_3}=b_1\overline{A_1R}+b_2\overline{A_2R}+b_3\overline{A_3R}\ 。$$

(4) 當$\alpha_1+\beta_1=180^\circ$時，$R=A_1$。

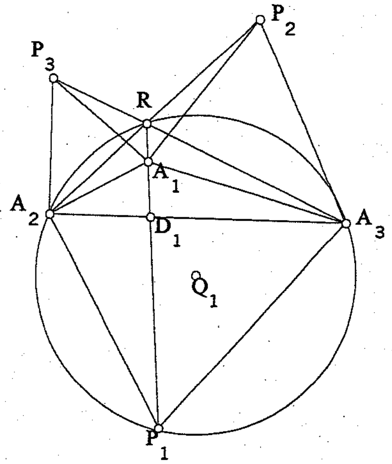
(5) 當$\alpha_1+\beta_1>180^\circ$時，點 R 在$\triangle A_1A_2A_3$外部且與點 A_1在直線 A_2A_3同側；$\angle A_2RP_1=\beta_3$、$\angle A_3RP_1=\beta_2$；而且

$$b_1\overline{A_1P_1}=b_2\overline{A_2P_2}=b_3\overline{A_3P_3}=-b_1\overline{A_1R}+b_2\overline{A_2R}+b_3\overline{A_3R}\ 。$$

證：參看圖9(1)與圖9(2)。



(1)



(2)

圖 9

(1) 因為$\alpha_1+\beta_1$、$\alpha_2+\beta_2$與$\alpha_3+\beta_3$三個和中至多只有一個$\geqq 180^{\circ}$，所以，我們可設$\alpha_2+\beta_2<180^{\circ}$且$\alpha_3+\beta_3<180^{\circ}$，則□$A_1A_2P_1A_3$為凸四邊形，其對角線$\overline{A_1P_1}$與$\overline{A_2A_3}$相交於一點$D_1$。作$\triangle A_2A_3P_1$的外接圓，設其圓心為點$Q_1$。設直線$A_1P_1$與外接圓$Q_1$的另一交點為R，仿定理1證明的第一段，可知點R與點A_1在直線A_2A_3同側。因為$\angle A_2RP_1=\angle A_2A_3P_1=\beta_3$且$\angle A_3RP_1=\angle A_3A_2P_1=\beta_2$，所以，$\angle A_2RP_1=\angle A_2P_3A_1$且$\angle A_3RP_1=\angle A_3P_2A_1$。於是，點$A_1$、$P_3$、$A_2$與R共圓且點$A_1$、$P_2$、$A_3$與R共圓。換言之，三個三角形$\triangle A_2A_3P_1$、$\triangle A_3A_1P_2$與$\triangle A_1A_2P_3$的外接圓交於一點R。

(2) 因為點A_1、P_2、A_3與R共圓，所以，$\angle P_2RA_3=\angle P_2A_1A_3=\beta_1$。於是，$\angle P_2RA_3+\angle A_3RA_2=\angle P_2RA_3+\angle A_3RP_1+\angle P_1RA_2=\beta_1+\beta_2+\beta_3=180^{\circ}$。由此可知：三點$A_2$、R與$P_2$共線。同理，三點$A_3$、R與$P_3$共線。換言之，直線$A_1P_1$、$A_2P_2$與$A_3P_3$都通過點R。

(3) 設$\alpha_1+\beta_1<180^{\circ}$、$\alpha_2+\beta_2<180^{\circ}$且$\alpha_3+\beta_3<180^{\circ}$。依(1)的證明，由$\alpha_2+\beta_2<180^{\circ}$及$\alpha_3+\beta_3<180^{\circ}$可得：點R與點$A_1$在直線$A_2A_3$同側。同理，由$\alpha_3+\beta_3<180^{\circ}$及$\alpha_1+\beta_1<180^{\circ}$可得：點R與點$A_2$在直線$A_3A_1$同側；由$\alpha_1+\beta_1<180^{\circ}$及$\alpha_2+\beta_2<180^{\circ}$可得：點R與點$A_3$在直線$A_1A_2$同側。於是，點R在$\triangle A_1A_2A_3$內部。其次，因為點$A_1$、$P_2$、$A_3$與R共圓，所以，可得$\angle A_1RP_2=\angle A_1A_3P_2=\beta_3$。同理可得$\angle A_2RP_3=\beta_1$與$\angle A_3RP_1=\beta_2$。

為證明有關$\overline{A_1P_1}$的長度的等式，我們先證明$\overline{P_1R}>(b_2/b_1)\overline{A_2R}$。在$\triangle A_2P_1R$中，設

$\angle RA_2A_3 = \angle RP_1A_3 = \gamma$，則依正弦定律，可得

$$\sin\beta_1 \sin(\beta_1-\gamma)\left\{\frac{\overline{P_1R}}{\overline{A_2R}}-\frac{b_2}{b_1}\right\} = \sin\beta_1 \sin(\beta_1-\gamma)\left\{\frac{\sin(\beta_2+\gamma)}{\sin(\beta_1-\gamma)}-\frac{\sin\beta_2}{\sin\beta_1}\right\}$$
$$= \sin\beta_1 \sin(\beta_2+\gamma) - \sin\beta_2 \sin(\beta_1-\gamma)$$
$$= (1/2)\{\cos(\beta_1+\beta_2-\gamma)-\cos(\beta_1+\beta_2+\gamma)\}$$
$$= \sin\gamma \sin(\beta_1+\beta_2) > 0 \text{。}$$

因爲上述不等式兩端的各個正弦值都是正數，所以，$\overline{P_1R} > (b_2/b_1)\overline{A_2R}$。由此可知：在 $\overline{P_1R}$ 上有一個點 S 使得 $\overline{P_1S} = (b_2/b_1)\overline{A_2R}$。因爲 $\angle RA_2A_3 = \angle SP_1A_3$ 而且 $\overline{A_2A_3} : \overline{P_1A_3} = \overline{A_2R} : \overline{P_1S} = b_1 : b_2$，所以，可知 $\triangle RA_2A_3 \sim \triangle SP_1A_3$。於是，$\angle RA_3A_2 = \angle SA_3P_1$ 而且 $\overline{RA_3} : \overline{SA_3} = \overline{A_2A_3} : \overline{P_1A_3} = b_1 : b_2$。因爲

$$\angle A_2A_3P_1 = \angle A_2A_3S + \angle SA_3P_1 = \angle A_2A_3S + \angle RA_3A_2 = \angle RA_3S\text{，}$$

而且 $\overline{RA_3} : \overline{SA_3} = \overline{A_2A_3} : \overline{P_1A_3} = b_1 : b_2$，所以，$\triangle RA_3S \sim \triangle A_2A_3P_1$。於是，$\overline{RS} : \overline{RA_3} = \overline{A_2P_1} : \overline{A_2A_3} = b_3 : b_1$。由此得

$$\overline{A_1P_1} = \overline{A_1R} + \overline{RS} + \overline{SP_1} = (1/b_1)(b_1\overline{A_1R} + b_2\overline{A_2R} + b_3\overline{A_3R})\text{，或}$$
$$b_1\overline{A_1R} + b_2\overline{A_2R} + b_3\overline{A_3R} = b_1\overline{A_1P_1}\text{。}$$

其次，因爲 $\triangle A_1A_3P_1 \sim \triangle P_2A_3A_2$，所以，$\overline{A_2P_2} : \overline{A_1P_1} = \overline{A_2A_3} : \overline{P_1A_3} = b_1 : b_2$。於是，$b_2\overline{A_2P_2} = b_1\overline{A_1P_1}$。同理，$b_3\overline{A_3P_3} = b_1\overline{A_1P_1}$。

(4) 若 $\alpha_1+\beta_1 = 180^\circ$，則 $\angle A_2A_1A_3 + \angle A_3A_1P_2 = 180^\circ$。於是，直線 A_2P_2 通過點 A_1。同理，直線 A_3P_3 通過點 A_1。由此知 $R = A_1$。

(5) 若 $\alpha_1+\beta_1 > 180^\circ$，則 $\alpha_2+\beta_2 < 180^\circ$ 且 $\alpha_3+\beta_3 < 180^\circ$。依(1)的證明，可知點 R 與點 A_1 在直線 A_2A_3 同側，而且 $\angle A_2RP_1 = \beta_3$、$\angle A_3RP_1 = \beta_2$。另一方面，因爲 $\angle A_2P_1A_3 + \angle A_2A_1A_3 > 180^\circ$，所以，點 A_1 在 $\triangle A_2A_3P_1$ 外接圓的內部。由此可知：在 $\triangle A_1A_2A_3$ 及其內部的點中，只有點 A_2 與點 A_3 在外接圓 Q_1 上，其餘各點都在外接圓 Q_1 的內部。於是，點 R 在 $\triangle A_1A_2A_3$ 外部。其次，因爲點 A_1 介於點 R 與點 P_1 之間，所以，$\overline{A_1P_1} = \overline{P_1R} - \overline{A_1R}$。仿(3)的證明，即可得所欲證的等式。 ‖

下面的定理 16，就是問題 1 的答案。在[7]中，作者漏了定理 16 的條件：$\alpha_1+\beta_1 < 180^\circ$、$\alpha_2+\beta_2 < 180^\circ$ 且 $\alpha_3+\beta_3 < 180^\circ$。

定理 16：承續定理 15 所用的記號。若 $\alpha_1+\beta_1 < 180^\circ$、$\alpha_2+\beta_2 < 180^\circ$ 且 $\alpha_3+\beta_3 < 180^\circ$，則對於 $\triangle A_1A_2A_3$ 平面上每個點 P，恆有

$$b_1\overline{A_1R} + b_2\overline{A_2R} + b_3\overline{A_3R} \leq b_1\overline{A_1P} + b_2\overline{A_2P} + b_3\overline{A_3P}\text{。}$$

證：因為 $\alpha_1+\beta_1<180^\circ$、$\alpha_2+\beta_2<180^\circ$ 且 $\alpha_3+\beta_3<180^\circ$，所以，依定理 15(3)，可知 $b_1\overline{A_1P_1}=b_1\overline{A_1R}+b_2\overline{A_2R}+b_3\overline{A_3R}$。將 $\triangle PA_2A_3$ 繞點 A_2 向外旋轉 β_2 角，使得射線 $\overrightarrow{A_2A_3}$ 與射線 $\overrightarrow{A_2P_1}$ 重合。接著，在射線 $\overrightarrow{A_2P}$ 旋轉 β_2 角後所得的射線上選定一個點 Q，使得 $\overline{A_2Q}:\overline{A_2P}=b_3:b_1$。於是，$\angle QA_2P_1=\angle PA_2A_3$、$\angle PA_2Q=\angle A_3A_2P_1$ 且 $\overline{A_2Q}:\overline{A_2P}=\overline{A_2P_1}:\overline{A_2A_3}$。由此知 $\triangle QA_2P_1\sim\triangle PA_2A_3$ 且 $\triangle PA_2Q\sim\triangle A_3A_2P_1$。因此，可得 $\overline{QP_1}:\overline{A_3P}=\overline{A_2P_1}:\overline{A_2A_3}=b_3:b_1$ 以及 $\overline{PQ}:\overline{A_2P}=\overline{A_3P_1}:\overline{A_2A_3}=b_2:b_1$。於是，得

$$\begin{aligned}b_1\overline{A_1P}+b_2\overline{A_2P}+b_3\overline{A_3P}&=b_1\overline{A_1P}+b_1\overline{PQ}+b_1\overline{QP_1}\\&\geqq b_1\overline{A_1P_1}=b_1\overline{A_1R}+b_2\overline{A_2R}+b_3\overline{A_3R}\text{。}\end{aligned}$$

這就是欲證的結果。 ‖

將定理 15 與 16 視為定理 1 至 4 的直接推廣，那麼，定理 5 也有類似的直接推廣嗎？且看下面的定理 17。

定理 17：設 $\triangle A_1A_2A_3$ 為任意三角形。若 $\triangle A_2A_3P_1$、$\triangle A_3A_1P_2$ 與 $\triangle A_1A_2P_3$ 為向外作出的三角形，而且 $\triangle P_1A_2A_3\sim\triangle A_1P_2A_3\sim\triangle A_1A_2P_3\sim\triangle B_1B_2B_3$， 令 Q_1、Q_2 與 Q_3 分別表示 $\triangle A_2A_3P_1$、$\triangle A_3A_1P_2$ 與 $\triangle A_1A_2P_3$ 的外心，Z_1、Z_2 與 Z_3 分別表示 $\triangle A_2A_3P_1$、$\triangle A_3A_1P_2$ 與 $\triangle A_1A_2P_3$ 的內心，則下述性質成立：

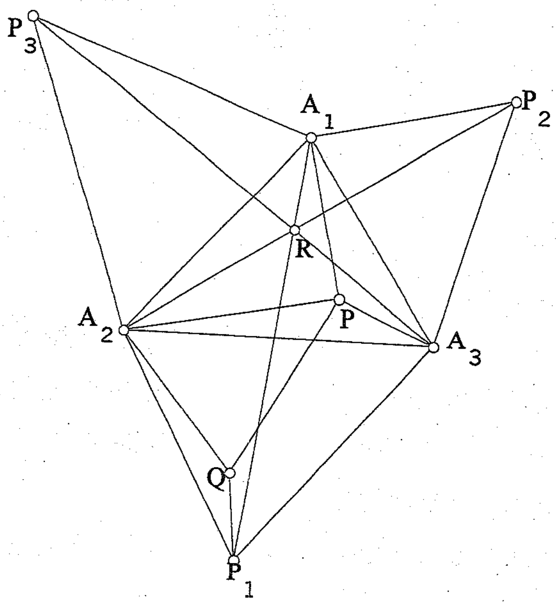
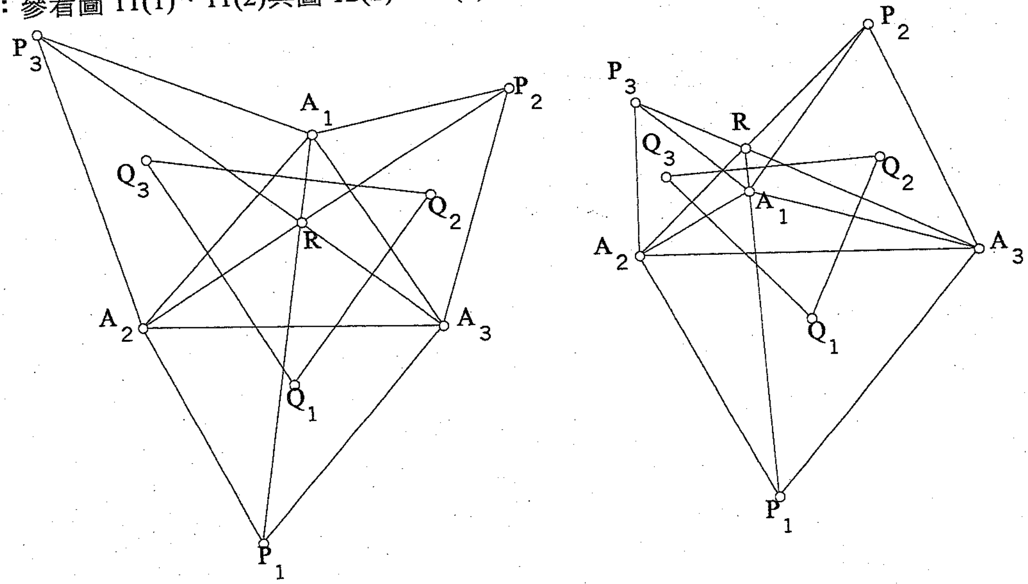


圖 10

(1) $\triangle Q_1Q_2Q_3\sim\triangle B_1B_2B_3$。

(2) 直線 A_1Z_1、A_2Z_2 與 A_3Z_3 共點。

證：參看圖 11(1)、11(2)與圖 12(1)、12(2)。



(1) (2)

圖 11

(1) 首先，假設$\alpha_1+\beta_1$、$\alpha_2+\beta_2$與$\alpha_3+\beta_3$都不等於180°。依定理 15，可知$\triangle A_3A_1P_2$與$\triangle A_1A_2P_3$的外接圓相交於點 A_1 與點 R 且 $R\neq A_1$。於是，兩圓的連心線段$\overline{Q_2Q_3}$垂直平分公共弦$\overline{A_1R}$於其中點 M_1。同理，$\overline{Q_3Q_1}$垂直平分$\overline{A_2R}$於其中點 M_2，$\overline{Q_1Q_2}$垂直平分$\overline{A_3R}$於其中點 M_3。於是，點 Q_1、M_2、M_3與 R 共圓。若$\alpha_2+\beta_2<180^{\circ}$且$\alpha_3+\beta_3<180^{\circ}$，則不論$\alpha_1+\beta_1$小於或大於 180°，恆有$\angle A_2RA_3=\beta_2+\beta_3$而且點 Q_1 與點 R 在直線 M_2M_3 異側。由此得

$$\angle Q_2Q_1Q_3=180^{\circ}-\angle A_2RA_3=\beta_1。$$

若$\alpha_2+\beta_2>180^{\circ}$，則$\angle A_2RA_3=\beta_1$且點 Q_1 與點 R 在直線 M_2M_3 同側。由此得

$$\angle Q_2Q_1Q_3=\angle A_2RA_3=\beta_1。$$

同理，可得$\angle Q_3Q_2Q_1=\beta_2$及$\angle Q_1Q_3Q_2=\beta_3$。其次，若$\alpha_1+\beta_1=180^{\circ}$，則$\triangle A_3A_1P_2$與$\triangle A_1A_2P_3$的外接圓互相外切於點 A_1，且其內公切線爲直線 A_1P_1。於是，直線 Q_2Q_3 與直線 A_1P_1 垂直於 A_1，而且$\overline{Q_1Q_2}\perp\overline{A_3A_1}$、$\overline{Q_1Q_3}\perp\overline{A_1A_2}$。依圓心角與圓周角的關係，可得

$$\angle Q_2Q_1Q_3=180^{\circ}-\angle A_2A_1A_3=\beta_1，$$

$$\angle Q_3Q_2Q_1=(1/2)\ \angle A_1Q_2A_3=\angle A_1P_2A_3=\beta_2，$$

$$\angle Q_1Q_3Q_2=(1/2)\ \angle A_2Q_3A_1=\angle A_2P_3A_1=\beta_3。$$

由此可知：不論何種情形，都可得$\triangle Q_1Q_2Q_3\sim\triangle B_1B_2B_3$。

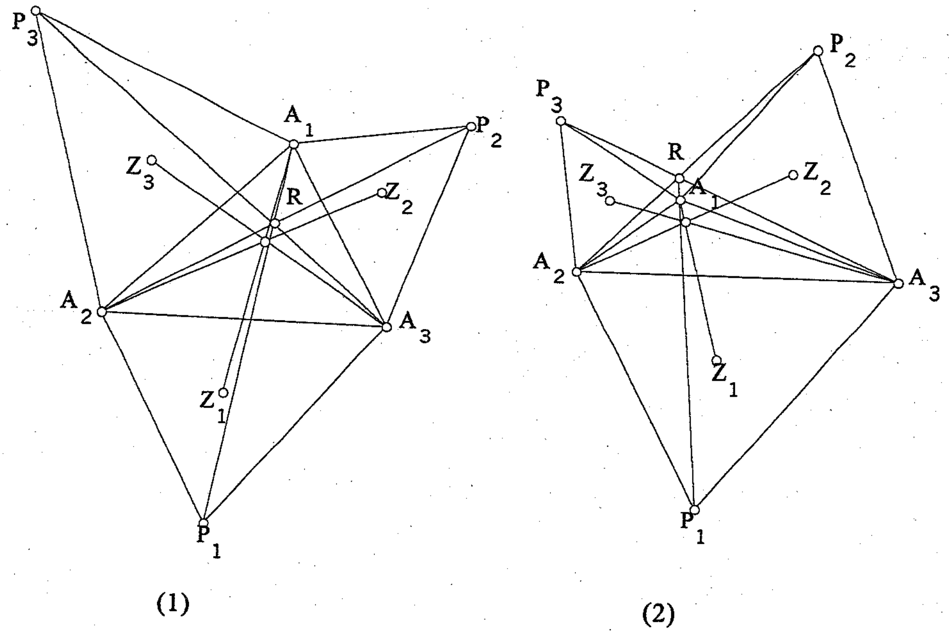


圖 12

(2) 因爲$\triangle A_2A_3Z_1$、$\triangle A_3A_1Z_2$與$\triangle A_1A_2Z_3$是向外作出的三角形，而且$\angle A_2A_1Z_3=\angle A_3A_1Z_2$、$\angle A_1A_2Z_3=\angle A_3A_2Z_1$、$\angle A_1A_3Z_2=\angle A_2A_3Z_1$，所以，依後文的定理 28，可知直線 A_1Z_1、A_2Z_2與 A_3Z_3 共點或兩兩平行。其次，因爲$\angle A_2A_1Z_3$、$\angle A_3A_2Z_1$與$\angle A_1A_3Z_2$都是銳角，所以，仍依定理 28，可知直線 A_1Z_1、A_2Z_2與 A_3Z_3 共點。(定理 28 的證明只使用 Ceva 定理而不必使用本文其他結果。) ‖

前面三個定理，乃是向外作相似三角形。若改成向內作相似三角形，是否也可得出類似定理 6 至定理 10 的結果呢？且看下面的定理 18。

定理 18：設$\triangle A_1A_2A_3$是與$\triangle B_1B_2B_3$不相似的任意三角形。若$\triangle A_2A_3P_1'$、$\triangle A_3A_1P_2'$與$\triangle A_1A_2P_3'$爲向內作出的三角形，且$\triangle P_1'A_2A_3\sim\triangle A_1P_2'A_3\sim\triangle A_1A_2P_3'\sim\triangle B_1B_2B_3$，則下述性質成立：

(1) $\triangle A_2A_3P_1'$、$\triangle A_3A_1P_2'$與$\triangle A_1A_2P_3'$的外接圓交於一點 R'。

(2) 直線 A_1P_1'、A_2P_2'與 A_3P_3'都通過點 R'。

(3) 當$\alpha_1>\beta_1$、$\alpha_2<\beta_2$、$\alpha_3<\beta_3$或$\alpha_1<\beta_1$、$\alpha_2>\beta_2$、$\alpha_3>\beta_3$時，點 R' 在$\triangle A_1A_2A_3$外部，而且點 R' 與點 A_1 在直線 A_2A_3 異側；

$$\angle A_2R'A_3=\beta_2+\beta_3、\angle A_3R'A_1=\beta_2、\angle A_1R'A_2=\beta_3。$$

(4) 若$\alpha_1>\beta_1$、$\alpha_2<\beta_2$、$\alpha_3<\beta_3$，則

$$b_1\overline{A_1P_1'}=b_2\overline{A_2P_2'}=b_3\overline{A_3P_3'}=b_2\overline{A_2R'}+b_3\overline{A_3R'}-b_1\overline{A_1R'}。$$

若 $\alpha_1<\beta_1$、$\alpha_2>\beta_2$、$\alpha_3>\beta_3$，則

$$b_1\overline{A_1P_1'}=b_2\overline{A_2P_2'}=b_3\overline{A_3P_3'}=b_1\overline{A_1R'}-b_2\overline{A_2R'}-b_3\overline{A_3R'}\text{。}$$

(5) 若 $\alpha_1=\beta_1$，則 $R'=A_1$。

證：參看圖 13(1)與圖 13(2)。

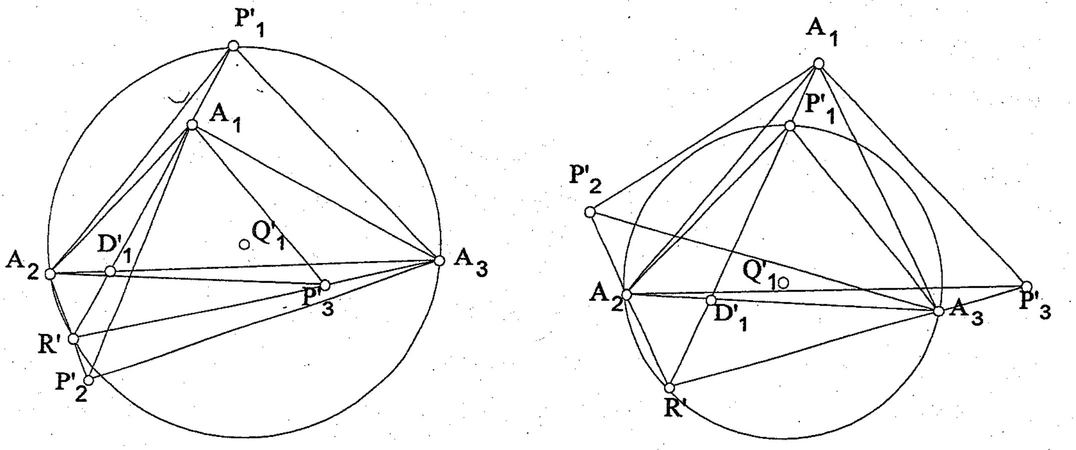
(1) 因爲 $\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3=\beta_1+\beta_2+\beta_3$，而且 $\triangle A_1A_2A_3$ 與 $\triangle B_1B_2B_3$ 不相似，所以，$\alpha_1-\beta_1$、$\alpha_2-\beta_2$ 與 $\alpha_3-\beta_3$ 三個差中至多只能有一個等於 0。若 $\alpha_1=\beta_1$，則四點 A_1、A_2、A_3 與 P_1' 共圓。因此，$\triangle A_2A_3P_1'$、$\triangle A_3A_1P_2'$ 與 $\triangle A_1A_2P_3'$ 的外接圓都通過點 A_1。若 $\alpha_1\neq\beta_1$、$\alpha_2\neq\beta_2$ 且 $\alpha_3\neq\beta_3$，則 $\alpha_1-\beta_1$、$\alpha_2-\beta_2$ 與 $\alpha_3-\beta_3$ 三個差必是兩負一正或是兩正一負，設 $\alpha_1>\beta_1$、$\alpha_2<\beta_2$、$\alpha_3<\beta_3$ 或 $\alpha_1<\beta_1$、$\alpha_2>\beta_2$、$\alpha_3>\beta_3$。若 $\alpha_1>\beta_1$、$\alpha_2<\beta_2$、$\alpha_3<\beta_3$，則點 A_1 位於 $\triangle A_2A_3P_1'$ 的內部。若 $\alpha_1<\beta_1$、$\alpha_2>\beta_2$、$\alpha_3>\beta_3$，則點 P_1' 位於 $\triangle A_1A_2A_3$ 的內部。在這兩種情形中，直線 A_1P_1' 與 $\overline{A_2A_3}$ 相交於一點 D_1'。作三角形 $A_2A_3P_1'$ 的外接圓，設其圓心爲 Q_1'。因爲直線 A_1P_1' 與外接圓 Q_1' 有一交點 P_1'，所以，它們必有另一交點 R'。因爲直線 A_1P_1' 與 $\overline{A_2A_3}$ 的交點 D_1' 在外接圓 Q_1' 的內部，而點 P_1' 在外接圓 Q_1' 上，所以，另一交點 R' 必與點 P_1' 在直線 A_2A_3 異側，亦即：點 R' 與點 A_1 在直線 A_2A_3 異側，也因此點 R' 在 $\triangle A_1A_2A_3$ 的外部。

因爲 $\angle A_2R'P_1'=\angle A_2A_3P_1'=\beta_3$ 且 $\angle A_3R'P_1'=\angle A_3A_2P_1'=\beta_2$，所以，可得 $\angle A_2R'A_1=\angle A_2R'P_1'=\angle A_2P_3'A_1$ 且 $\angle A_3R'A_1=\angle A_3R'P_1'=\angle A_3P_2'A_1$。於是，四點 A_1、A_2、P_3' 與 R' 共圓，而且四點 A_1、A_3、P_2' 與 R' 也共圓。換言之，三個三角形 $\triangle A_2A_3P_1'$、$\triangle A_3A_1P_2'$ 與 $\triangle A_1A_2P_3'$ 的外接圓交於一點 R'。

(2) 設 $\alpha_1>\beta_1$、$\alpha_2<\beta_2$ 且 $\alpha_3<\beta_3$。因爲 $\angle A_1R'A_2=\beta_3$ 且四點 A_1、A_3、P_2' 與 R' 共圓，所以，$\angle A_1R'P_2'=180°\beta_3$，$\angle A_1R'A_2+\angle A_1R'P_2'=180°$。於是，點 A_2、P_2' 與 R' 共線，如圖 13(1)所示。設 $\alpha_1<\beta_1$、$\alpha_2>\beta_2$ 且 $\alpha_3>\beta_3$。因爲 $\angle A_1R'A_2=\angle P_1'A_3A_2=\beta_3$ 且 $\angle A_1R'P_2'=\angle A_1A_3P_2'=\beta_3$，所以，點 A_2、P_2' 與 R' 共線，如圖 13(2)所示。同理，點 A_3、P_3' 與 R' 共線。換言之，直線 A_1P_1'、A_2P_2' 與 A_3P_3' 都通過點 R'。設 $\alpha_1=\beta_1$，則點 P_2' 在直線 A_1A_2 上且點 P_3' 在直線 A_1A_3 上，所以，直線 A_1P_1'、A_2P_2' 與 A_3P_3' 都通過點 A_1 (= R')。

(3) 當 $\alpha_1>\beta_1$、$\alpha_2<\beta_2$、$\alpha_3<\beta_3$ 或 $\alpha_1<\beta_1$、$\alpha_2>\beta_2$、$\alpha_3>\beta_3$ 時，依前面(1)的證明，知點 R' 在 $\triangle A_1A_2A_3$ 的外部而且點 R' 與點 A_1 在直線 A_2A_3 異側。更進一步地，可得 $\angle A_2R'A_3=\angle A_2R'P_1'+\angle P_1'R'A_3=\beta_2+\beta_3$，$\angle A_3R'A_1=\angle A_3P_2'A_1=\beta_2$，$\angle A_1R'A_2=\angle A_1P_3'A_2=\beta_3$。

(4) 仿定理 15(3)的證明，可得 $\overline{R'P_1'}=(1/b_1)(b_2\overline{A_2R'}+b_3\overline{A_3R'})$。由此立即可得欲證的等式。



(1)　　　　(2)

圖 13

(5) 依(1)的證明立即可得。 ‖

在適當的條件下，定理 18 中的點 R' 也是某個極值問題的最小點，我們寫成定理 19。

定理 19：承續定理 18 的記號。若 $\alpha_1<\beta_1$、$\alpha_2>\beta_2$ 且 $\alpha_3>\beta_3$，則對於三角形 $\triangle A_1A_2A_3$ 平面上每個點 P，恆有

$$-b_1\overline{A_1R'}+b_2\overline{A_2R'}+b_3\overline{A_3R'}\leqq -b_1\overline{A_1P}+b_2\overline{A_2P}+b_3\overline{A_3P}\text{。}$$

證：因爲 $\alpha_1<\beta_1$、$\alpha_2>\beta_2$ 且 $\alpha_3>\beta_3$，所以，依定理 18(4)，知 $-b_1\overline{A_1P_1'}=-b_1\overline{A_1R'}+b_2\overline{A_2R'}+b_3\overline{A_3R'}$。另一方面，對於 $\triangle A_1A_2A_3$ 平面上每個點 P，對點 P_1'、A_2、P 與 A_3 引用廣義 Ptolemy 定理，即得 $\overline{A_2P_1'}\times\overline{A_3P}+\overline{A_3P_1'}\times\overline{A_2P}\geqq\overline{A_2A_3}\times\overline{P_1'P}$。因爲 $\triangle P_1'A_2A_3\sim\triangle B_1B_2B_3$，所以，乘以適當的比值，即得

$$b_3\overline{A_3P}+b_2\overline{A_2P}\geqq b_1\overline{P_1'P}\text{。}$$

於是，得

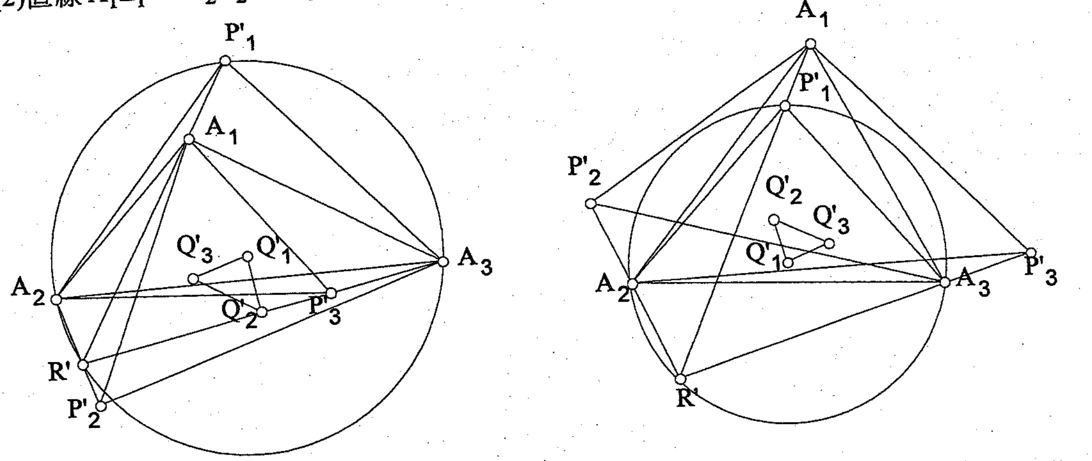
$$\begin{aligned}-b_1\overline{A_1P}+b_2\overline{A_2P}+b_3\overline{A_3P}&\geqq b_1\overline{P_1'P}-b_1\overline{A_1P}\\&\geqq -b_1\overline{A_1P_1'}=-b_1\overline{A_1R'}+b_2\overline{A_2R'}+b_3\overline{A_3R'}\text{。}\end{aligned}$$

這就是欲證的不等式。 ‖

定理 20：設 $\triangle A_1A_2A_3$ 是與 $\triangle B_1B_2B_3$ 不相似的任意三角形。若 $\triangle A_2A_3P_1'$、$\triangle A_3A_1P_2'$ 與 $\triangle A_1A_2P_3'$ 爲向內作出的三角形，且 $\triangle P_1'A_2A_3\sim\triangle A_1P_2'A_3\sim\triangle A_1A_2P_3'\sim\triangle B_1B_2B_3$，令 Q_1'、Q_2' 與 Q_3' 分別表示 $\triangle A_2A_3P_1'$、$\triangle A_3A_1P_2'$ 與 $\triangle A_1A_2P_3'$ 的外心，Z_1'、Z_2' 與 Z_3' 分別表示 $\triangle A_2A_3P_1'$、$\triangle A_3A_1P_2'$ 與 $\triangle A_1A_2P_3'$ 的內心，則

(1)$\triangle Q'_1Q'_2Q'_3 \sim \triangle B_1B_2B_3$。

(2)直線 $A_1Z'_1$、$A_2Z'_2$ 與 $A_3Z'_3$ 共點。



(1) (2)

圖 14

證：本定理的(1)可仿定理 17 的證法來證明，但我們仿定理 10 的證法，同時考慮本定理中及定理 17 中的各個三角形。因為 $\overline{A_1Q_2}$ 與 $\overline{A_1Q'_2}$ 分別為兩全等三角形 $\triangle A_3A_1P_2$ 與 $\triangle A_3A_1P'_2$ 的外接圓半徑，所以，$\overline{A_1Q_2} = \overline{A_1Q'_2} = a_2/(2\sin\beta_2)$。同理，$\overline{A_1Q_3} = \overline{A_1Q'_3} = a_3/(2\sin\beta_3)$。另一方面，因為 $\angle Q_2A_1A_3 + \angle A_2A_1Q_3 = \beta_1$，所以，$\angle Q_2A_1Q_3 = \alpha_1 + \beta_1$。同理，$\angle Q'_2A_1Q'_3 = |\alpha_1 - \beta_1|$。於是，就 $\triangle A_1Q_2Q_3$ 與 $\triangle A_1Q'_2Q'_3$ 引用餘弦定律，可得

$$\begin{aligned}\overline{Q_2Q_3}^2 - \overline{Q'_2Q'_3}^2 &= 2\,\overline{A_1Q_2} \times \overline{A_1Q_3} \times [\cos(\alpha_1 - \beta_1) - \cos(\alpha_1 + \beta_1)]\\ &= a_2a_3 \sin\alpha_1 \sin\beta_1 \csc\beta_2 \csc\beta_3。\end{aligned}$$

由此進一步得

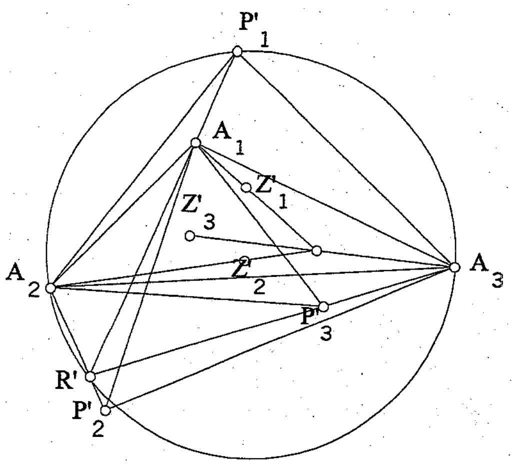
$$(\overline{Q_2Q_3}^2 - \overline{Q'_2Q'_3}^2)\csc^2\beta_1 = 2\csc\beta_1 \csc\beta_2 \csc\beta_3 \times (\triangle A_1A_2A_3\text{的面積})。$$

同理可得 $\overline{Q_3Q_1}$、$\overline{Q'_3Q'_1}$ 與 $\overline{Q_1Q_2}$、$\overline{Q'_1Q'_2}$ 的對應等式。因為 $\triangle Q_1Q_2Q_3 \sim \triangle B_1B_2B_3$，所以，依正弦定律，可得 $\overline{Q_2Q_3}\csc\beta_1 = \overline{Q_3Q_1}\csc\beta_2 = \overline{Q_1Q_2}\csc\beta_3$。(它們的共同值等於 $\triangle Q_1Q_2Q_3$ 的外接圓直徑。)於是，由上述三個等式可得

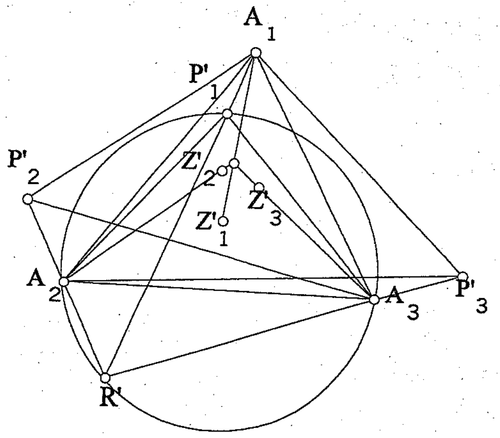
$$\overline{Q'_2Q'_3}\csc\beta_1 = \overline{Q'_3Q'_1}\csc\beta_2 = \overline{Q'_1Q'_2}\csc\beta_3。$$

依正弦定律，可知 $\triangle Q'_1Q'_2Q'_3$ 的三內角分別為 β_1、β_2 與 β_3，亦即：$\triangle Q'_1Q'_2Q'_3$ 與 $\triangle B_1B_2B_3$ 相似。

(2) 仿定理 17(2)並根據後文的定理 33 立即可得。 ‖



(1)



(2)

圖 15

系理 21：若$\triangle A_1A_2A_3$是與$\triangle B_1B_2B_3$不相似的任意三角形，而$\triangle Q_1Q_2Q_3$與$\triangle Q_1'Q_2'Q_3'$是依定理 17 與定理 20 所作出的三角形，則這兩個三角形的面積之差恆等於$\triangle A_1A_2A_3$的面積。（請注意：面積之差不受$\triangle B_1B_2B_3$的影響。）

證：設$\triangle Q_1Q_2Q_3$的外接圓半徑為 r，則 $\overline{Q_2Q_3}=2r\sin\beta_1$，而且

$$\triangle Q_1Q_2Q_3\text{的面積}=2r^2\sin\beta_1\sin\beta_2\sin\beta_3$$
$$=(1/2)\ \overline{Q_2Q_3}^2\csc\beta_1\sin\beta_2\sin\beta_3。$$

同理可得$\triangle Q_1'Q_2'Q_3'=(1/2)\ \overline{Q_2'Q_3'}^2\csc\beta_1\sin\beta_2\sin\beta_3$。將兩式代入定理 20 的等式立即可得所欲證的結果。 ‖

（待續）

（上接 72 頁）

```
p[npt].Y > p[npt].y)) /*  當  p[npt]  存在  */
        if (p[npt].x == p[k].x && p[npt].X
== p[k].X &&
            p[npt].y == p[k].y &&
p[npt].Y == p[k].Y)    {
            npt = k;
/* p[k]  完全被  p[j]  覆蓋則捨棄  p[k] */
            break;
        } else
            npt++;
    }
  }
 fclose(f);
  for (i = 0; i < npt; i++)
     perim += (long)p[i].sign * 2 * (p[i].X -
p[i].x + p[i].Y - p[i].y);
  printf ("Perimeter=%ld\n", perim);
  f = fopen("PICTURE.OUT", "w");
  fprintf (f, "%ld\n", perim);
  fclose(f);
  return 0;
}
```