Fermat 極值問題及其推廣

趙文敏
國立臺灣師範大學　數學系

早在西元十七世紀，法國籍的業餘數學家 Pierre de Fermat 曾經提出下面的幾何問題：「給定一個銳角三角形△ABC，試討論平面上那個點 P 至三頂點的距離和 $\overline{PA}+\overline{PB}+\overline{PC}$ 為最小值。」這個問題隨後由義大利籍的 EvangelistaTorricelli 提出解答，它的第一個證明在西元 1659 年由其學生 Viviani 出版問世。往後的數學典籍中，通常將產生最小值的點 P 稱為△ABC 的 Fermat 點(Fermat's point)。但根據此點的其他性質，近代初等幾何中也將此點稱為△ABC 的（第一）等角中心(isogonic center)。Fermat 所提的問題，在幾何學上並非難題，但其問題本身以及其證明方法都很容易推廣到其他情形，本文中將朝著幾個不同方向討論 Fermat 問題的推廣。

甲、Fermat 問題與第一等角中心

在本文中，為使各定理易於做頂點間的輪換，我們將三角形以$\triangle A_1A_2A_3$ 的形式來命名，對應的邊長分別記為 a_1、a_2 與 a_3，對應的角的度數分別記為α_1、α_2 與α_3。例如：$\overline{A_2A_3}=a_1$，$\angle A_2A_1A_3=\alpha_1$。另外，為配合敘述上的需要，我們令 $A_4=A_1$ 且 $A_5=A_2$。

在 Fermat 問題的證明中，通常會引用以$\triangle A_1A_2A_3$ 的各邊為一邊向外作出的三個正三角形來確定最小點 P 的位置，所以，我們先討論這些正三角形所具備的性質。

定理 1：設$\triangle A_1A_2A_3$ 為任意三角形。若$\triangle A_2A_3P_1$、$\triangle A_3A_1P_2$ 與$\triangle A_1A_2P_3$ 為正三角形，且點 P_k 與點 A_k 在直線 $A_{k+1}A_{k+2}$ 異側，$k=1, 2, 3$，則直線 A_1P_1、A_2P_2 與 A_3P_3 都通過一定點 R，三個正三角形$\triangle A_2A_3P_1$、$\triangle A_3A_1P_2$ 與$\triangle A_1A_2P_3$ 的外接圓也都通過點 R，而且下述性質成立：

(1) 當α_1、α_2 與α_3 都小於 120° 時，點 R 在$\triangle A_1A_2A_3$ 內部。

(2) 當$\alpha_1=120^\circ$ 時，$R=A_1$。

(3) 當$\alpha_1>120^\circ$ 時，點 R 在$\triangle A_1A_2A_3$ 外部，而且與點 A_1 在直線 A_2A_3 同側。

證：因為α_1、α_2 與α_3 中至多只有一個$\geqq 120^\circ$，所以，我們可設$\alpha_2<120^\circ$ 且$\alpha_3<120^\circ$，則$\alpha_2+60^\circ<180^\circ$ 且$\alpha_3+60^\circ<180^\circ$。於是，$\square A_1A_2P_1A_3$ 為凸四邊形，其對角線 $\overline{A_1P_1}$ 與 $\overline{A_2A_3}$ 相交於一點 D_1。作$\triangle A_2A_3P_1$ 的外接圓，設圓心為點 Q_1。因為直線 A_1P_1 與外接圓 Q_1 有一交點 P_1，所以，它們必有另一交點 R。因為 $\overline{A_1P_1}$ 與 $\overline{A_2A_3}$ 的交點 D_1 在外接圓 Q_1 的內部，而點 P_1 在圓 Q_1 上，所以，直線 D_1P_1(即 A_1P_1)與外接圓 Q_1 的另一交點 R 必與點 P_1 在直線 A_2A_3

異側，亦即：點 R 與點 A_1 在直線 A_2A_3 同側，如圖 1(1)及圖 1(2)所示。

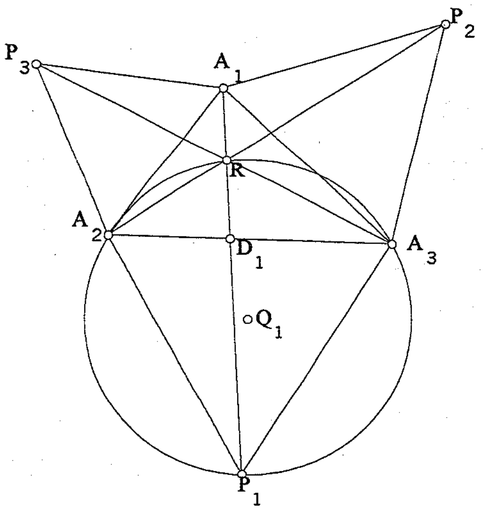
因爲 $\angle A_2RP_1 = \angle A_2A_3P_1$ 且 $\angle A_3RP_1 = \angle A_3A_2P_1$，所以，$\angle A_2RP_1 = \angle A_3RP_1 = 60^\circ$。因爲 $\angle A_3RP_1 = 60^\circ = \angle A_3P_2A_1$，所以，四點 A_1、P_2、A_3 與 R 共圓。同理，四點 A_1、P_3、A_2 與 R 共圓。於是，三個正三角形 $\triangle A_2A_3P_1$、$\triangle A_3A_1P_2$ 與 $\triangle A_1A_2P_3$ 的外接圓都通過點 R。

因爲點 A_1、P_2、A_3 與 R 共圓，所以，$\angle P_2RA_3 = \angle P_2A_1A_3 = 60^\circ$。於是，$\angle P_2RA_3 + \angle A_3RA_2 = 180^\circ$。由此可知：三點 A_2、R 與 P_2 共線。同理，三點 A_3、R 與 P_3 也共線。換言之，直線 A_1P_1、A_2P_2 與 A_3P_3 都通過點 R。

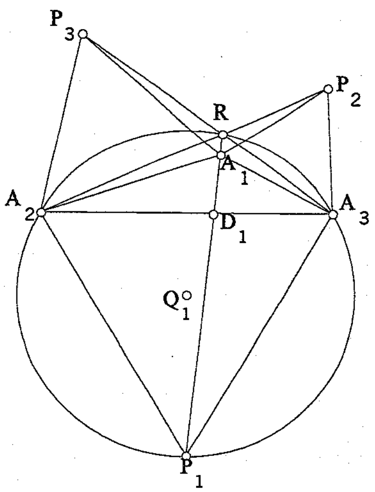
(1) 當 α_1、α_2 與 α_3 都小於 120° 時，根據第一段的結果，由 $\alpha_2 < 120^\circ$ 及 $\alpha_3 < 120^\circ$ 可得：點 R 與點 A_1 在直線 A_2A_3 同側；由 $\alpha_3 < 120^\circ$ 及 $\alpha_1 < 120^\circ$ 可得：點 R 與點 A_2 在直線 A_3A_1 同側；由 $\alpha_1 < 120^\circ$ 及 $\alpha_2 < 120^\circ$ 可得：點 R 與點 A_3 在直線 A_1A_2 同側。於是，點 R 在 $\triangle A_1A_2A_3$ 內部。

(2) 若 $\alpha_1 = 120^\circ$，則 $\angle A_2A_1A_3 + \angle A_3A_1P_2 = 180^\circ$。於是，直線 A_2P_2 通過點 A_1。同理，直線 A_3P_3 通過點 A_1。於是，點 R 就是點 A_1。

(3) 設 $\alpha_1 > 120^\circ$。因爲 $\angle A_2P_1A_3 + \angle A_2A_1A_3 > 180^\circ$，所以，點 A_1 在外接圓 Q_1 的內部。由此可知：在 $\triangle A_1A_2A_3$ 及其內部的所有點中，除點 A_2 與 A_3 在外接圓 Q_1 上之外，其餘各點都在圓 Q_1 內部。於是，點 R 在 $\triangle A_1A_2A_3$ 外部。 ‖



(1)



(2)

圖 1

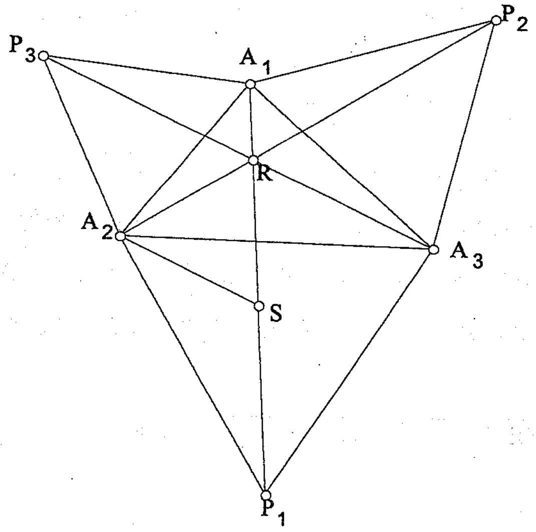
定理 1 中的點 R 通常稱爲 $\triangle A_1A_2A_3$ 的第一等角中心，因爲點 R 具有下述定理 2 中的性質。

定理 2：若$\triangle A_1A_2A_3$為任意三角形，而點 R 為定理 1 中直線 A_1P_1、A_2P_2與 A_3P_3的交點，則直線 A_1R、A_2R 與 A_3R 兩兩都有一交角為 60°，而且下述性質成立：

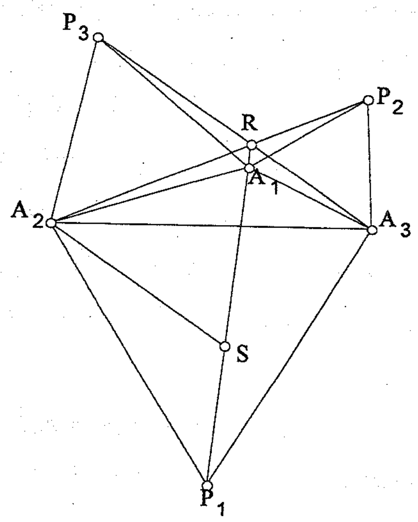
(1) 當α_1、α_2與α_3都小於 120°時，$\angle A_2RA_3=\angle A_3RA_1=\angle A_1RA_2=120^\circ$。

(2) 當$\alpha_1>120^\circ$時，$\angle A_2RA_3=120^\circ$，而$\angle A_3RA_1=\angle A_1RA_2=60^\circ$。

證：依定理 1 的證明立即可得。 ‖



(1)



(2)

圖 2

定理 3：若$\triangle A_1A_2A_3$為任意三角形，$\triangle A_2A_3P_1$、$\triangle A_3A_1P_2$與$\triangle A_1A_2P_3$是定理 1 所提的向外作出的正三角形，點 R 是直線 A_1P_1、A_2P_2與 A_3P_3的交點，則$\overline{A_1P_1}=\overline{A_2P_2}=\overline{A_3P_3}$，而且下述性質成立：

(1) 當α_1、α_2與α_3都小於 120°時，$\overline{A_1P_1}=\overline{A_1R}+\overline{A_2R}+\overline{A_3R}$。

(2) 當$\alpha_1\geqq 120^\circ$時，$\overline{A_1P_1}=\overline{A_2R}+\overline{A_3R}-\overline{A_1R}$。

證：由圖 1(1)與圖 1(2)易知$\triangle A_1A_2P_1\cong\triangle P_3A_2A_3$、$\triangle A_1A_3P_1\cong\triangle P_2A_3A_2$與$\triangle A_2A_1P_2\cong\triangle P_3A_1A_3$。由此可得$\overline{A_1P_1}=\overline{A_2P_2}=\overline{A_3P_3}$。

(1) 若α_1、α_2與α_3都小於 120°，則依定理 1(1)，點 R 是三線段$\overline{A_1P_1}$、$\overline{A_2P_2}$與$\overline{A_3P_3}$的交點。依圖 2(1)，在$\triangle RA_2P_1$中，因為$\angle RA_2P_1>60^\circ$而$\angle A_2RP_1=60^\circ$，所以，$\angle RP_1A_2<60^\circ$。於是，$\overline{RP_1}>\overline{RA_2}$。在$\overline{RP_1}$上選取一點 S 使得$\overline{RS}=\overline{RA_2}$，則$\triangle A_2RS$是一正三角形。由此可得$\overline{A_2R}=\overline{A_2S}$。因為$\overline{A_2A_3}=\overline{A_2P_1}$且$\angle RA_2A_3=60^\circ-\angle A_3A_2S=\angle SA_2P_1$，所以，$\triangle RA_2A_3\cong\triangle SA_2P_1$。於是，得$\overline{RA_3}=\overline{SP_1}$。進一步得

$$\overline{A_1P_1} = \overline{A_1R} + \overline{RS} + \overline{SP_1} = \overline{A_1R} + \overline{A_2R} + \overline{A_3R}\ 。$$

(2) 若$\alpha_1 \geqq 120^0$，則 R $= A_1$ 或依定理 1(3)，點 A_1 介於點 R 與點 P_1 之間(參看圖 2(2))。於是，$\overline{A_1P_1} = \overline{P_1R} - \overline{A_1R}$。我們只需證明 $\overline{P_1R} = \overline{A_2R} + \overline{A_3R}$。因為$\angle RA_2P_1 > 60^0$ 而$\angle RP_1A_2 < 60^0$，所以，仿(1)的證明，即可得等式 $\overline{P_1R} = \overline{A_2R} + \overline{A_3R}$。 ‖

下面的定理 4，就是 Fermat 問題的答案，我們所得的結果已將銳角三角形稍作推廣。

定理 4：若$\triangle A_1A_2A_3$的每個內角都小於 120^0，而點 R 為$\triangle A_1A_2A_3$的第一等角中心，則對於$\triangle A_1A_2A_3$上每個點 P，恆有

$$\overline{A_1R} + \overline{A_2R} + \overline{A_3R} \leqq \overline{A_1P} + \overline{A_2P} + \overline{A_3P}\ 。$$

證：因為α_1、α_2與α_3都小於 120^0，所以，依定理 3(1)，可知 $\overline{A_1P_1} = \overline{A_1R} + \overline{A_2R} + \overline{A_3R}$，其中，點 P_1 與 A_1 在直線 A_2A_3 異側，而且$\triangle A_2A_3P_1$是正三角形。其次，將$\triangle PA_2A_3$繞點 A_2 向外旋轉 60^0，使得點 A_3 旋轉至點 P_1，並設點 P 旋轉至點 Q，如圖 3 所示。因為$\triangle A_2PQ$是正三角形，所以，$\overline{A_2P} = \overline{PQ}$。因為$\triangle PA_2A_3 \cong \triangle QA_2P_1$，所以，$\overline{A_3P} = \overline{QP_1}$。於是，可得

$$\overline{A_1P} + \overline{A_2P} + \overline{A_3P} = \overline{A_1P} + \overline{PQ} + \overline{QP_1} \geqq \overline{A_1P_1} = \overline{A_1R} + \overline{A_2R} + \overline{A_3R}\ 。$$

這就證明了定理中的結果。 ‖

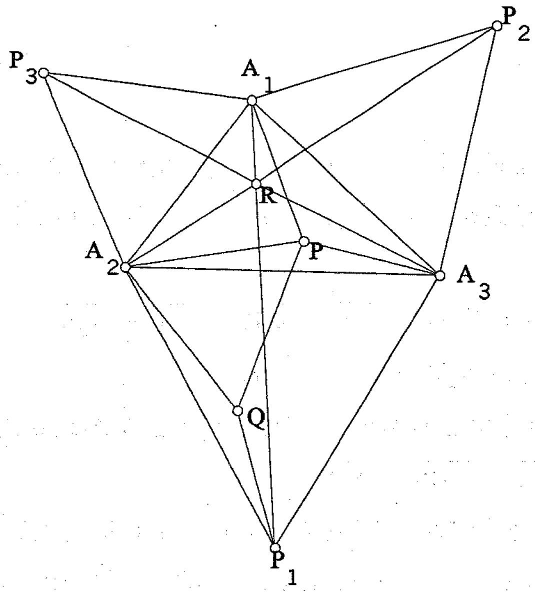


圖 3

定理 1 中所提的向外作出的三個正三角形，還具有進一步的性質。

定理 5：設$\triangle A_1A_2A_3$為任意三角形，$\triangle A_2A_3P_1$、$\triangle A_3A_1P_2$與$\triangle A_1A_2P_3$是向外作出的正三角

形。若點 Q_1、Q_2 與 Q_3 分別是這三個正三角形的中心，則

(1) $\triangle Q_1Q_2Q_3$ 是正三角形。

(2) 直線 A_1Q_1、A_2Q_2 與 A_3Q_3 共點。

(3) 直線 P_1Q_1、P_2Q_2 與 P_3Q_3 共點，其交點是 $\triangle A_1A_2A_3$ 的外心。

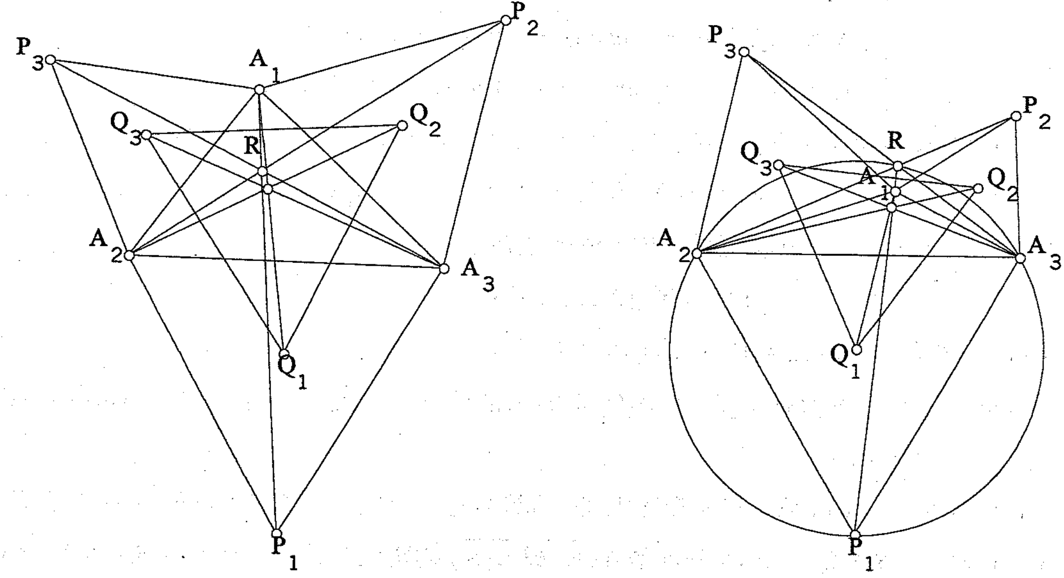


圖 4

證：(1) 先設 α_1、α_2 與 α_3 都不等於 120°。依定理 1，$\triangle A_3A_1P_2$ 與 $\triangle A_1A_2P_3$ 的外接圓相交於點 A_1 與第一等角中心 R。於是，兩圓的連心線段 $\overline{Q_2Q_3}$ 垂直平分公共弦 $\overline{A_1R}$ 於其中點 M_1。同理，$\overline{Q_3Q_1}$ 垂直平分 $\overline{A_2R}$ 於其中點 M_2，$\overline{Q_1Q_2}$ 垂直平分 $\overline{A_3R}$ 於其中點 M_3。於是，點 Q_1、M_2、M_3 與 R 四點共圓。若 $\alpha_2 < 120^\circ$ 且 $\alpha_3 < 120^\circ$，則不論 α_1 小於或大於 120°，恆有 $\angle A_2RA_3 = 120^\circ$ 而且點 Q_1 與點 R 在直線 M_2M_3 異側。由此得

$$\angle Q_2Q_1Q_3 = 180^\circ - \angle A_2RA_3 = 60^\circ。$$

若 $\alpha_2 > 120^\circ$，則 $\angle A_2RA_3 = 60^\circ$，而且點 Q_1 與點 R 在直線 M_2M_3 同側。由此得

$$\angle Q_2Q_1Q_3 = \angle A_2RA_3 = 60^\circ。$$

同理可得 $\angle Q_3Q_2Q_1 = \angle Q_1Q_3Q_2 = 60^\circ$。其次，設 $\alpha_1 = 120^\circ$，則 $\triangle A_3A_1P_2$ 與 $\triangle A_1A_2P_3$ 的外接圓互相外切於點 A_1 且其內公切線爲 $\angle A_2A_1A_3$ 的分角線。於是，直線 Q_2Q_3 是 $\angle A_2A_1A_3$ 的外角分角線，而且 $\overline{Q_1Q_2} \perp \overline{A_3A_1}$、$\overline{Q_3Q_1} \perp \overline{A_1A_2}$。由此得

$$\angle Q_2Q_1Q_3 = 180^\circ - \angle A_2A_1A_3 = 60^\circ，$$

$$\angle Q_3Q_2Q_1 = 90^\circ - \angle Q_2A_1A_3 = 60^\circ，$$

$$\angle Q_1Q_3Q_2=90^\circ-\angle Q_3A_1A_2=60^\circ。$$

(2) 設α_1、α_2與α_3 都不等於 150°。對每個 $k=1, 2, 3$，設直線 A_kQ_k與直線 $A_{k+1}A_{k+2}$相交於點 X_k，令點 X_k對 $\overline{A_{k+1}A_{k+2}}$ 的有向分比爲$[A_{k+1}A_{k+2}/X_k]$，則

$$\left|[A_2A_3/X_1]\right| = a_3\sin(\alpha_2+30^\circ)/a_2\sin(\alpha_3+30^\circ)，$$
$$\left|[A_3A_1/X_2]\right| = a_1\sin(\alpha_3+30^\circ)/a_3\sin(\alpha_1+30^\circ)，$$
$$\left|[A_1A_2/X_3]\right| = a_2\sin(\alpha_1+30^\circ)/a_1\sin(\alpha_2+30^\circ)。$$

於是，$\left|[A_2A_3/X_1][A_3A_1/X_2][A_1A_2/X_3]\right|=1$。若$\alpha_1$、$\alpha_2$與$\alpha_3$都小於 150°，則三個有向分比都是正數。若$\alpha_1>150^\circ$，則$[A_2A_3/X_1]$爲正、$[A_3A_1/X_2]$與 $[A_1A_2/X_3]$都爲負。因此，不論何種情況，三有向分比的乘積恆爲正數。依前述結果，可得

$$[A_2A_3/X_1][A_3A_1/X_2][A_1A_2/X_3]=1。$$

依 Ceva 定理，可知直線 A_1Q_1、A_2Q_2與 A_3Q_3共點。

若$\alpha_1=150^\circ$，則直線 A_2Q_2與 A_3Q_3都通過頂點 A_1。於是，直線 A_1Q_1、A_2Q_2與 A_3Q_3共點，其交點爲 A_1。

(3) 因爲$\triangle A_2A_3P_1$爲正三角形而點 Q_1爲其中心，所以，直線 P_1Q_1是$\overline{A_2A_3}$的垂直平分線。同理，直線 P_2Q_2與 P_3Q_3分別是$\overline{A_3A_1}$與$\overline{A_1A_2}$的垂直平分線。因此，直線 P_1Q_1、P_2Q_2與 P_3Q_3共點，其交點是$\triangle A_1A_2A_3$的外心。 ‖

定理 5 的(1)與下文中定理 10 的(1)通常稱爲 Napoleon 定理，定理 5 中的正三角形$\triangle Q_1Q_2Q_3$通常稱爲$\triangle A_1A_2A_3$的外 Napoleon 三角形，直線 A_1Q_1、A_2Q_2與 A_3Q_3的交點稱爲$\triangle A_1A_2A_3$的外 Napoleon 點。爲什麼有個“外”字呢？因爲還有內 Napoleon 三角形與內 Napoleon 點，這就是下面乙小節的討論主題。（未完）

小小科玩

自我調適

蕭次融

問題：如何在一張名片的邊緣上安放一枚 10 元硬幣如圖。

注意：放好 10 元後，名片邊緣必須筆直。(參考解答在本期第 69 頁)