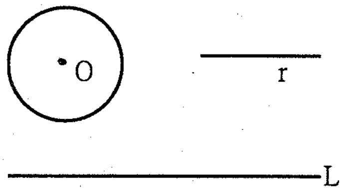
圓的尺規作圖系列探討（續）

鄭再添
國立臺灣師大附中

〔題型七〕

已知：一圓 O 外一直線 L，一線段長 r

求作：一圓同時與圓 O 及 L 相切，且其半徑爲 r。

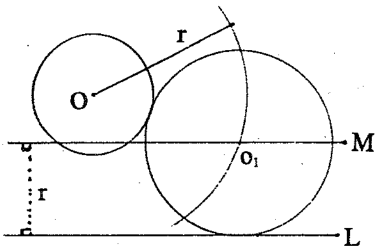


解析：由題型二經驗知，可將 L 平移一個 r 距作直線 M；又由題型四知，將半徑和爲半徑作圓 O 的同心圓；如此得圓和 M 的交點即爲圓心。

作法：1.作直線 M//L，且與 L 相距 r

2.以圓 O 半徑及 r 的和爲半徑畫一同心圓，與 M 交於 O_1

3.以 O_1 爲圓心，r 爲半徑畫圓即所求。



討論：1.一般而言，有二圓可與圓 O 外切（步驟 2 有兩個交點）；若以半徑差爲半徑畫圓與 M 相交，則可得內切之圓。

2.r 須夠大（r 和圓 O 半徑的和須大於 O 點到 L 的距離）方能有解；解的個數端視其所作同心圓與 M 之交點數而定。

從上述七種題型的解析心得，已對指定點及已知所求圓半徑爲已知這兩類條件的運用思考模式可見一斑：

1.已知直線上某點爲切點時，通常是要過此點作垂線的，因爲圓心在這垂線上；若已知圓上某點爲切點，則可能利用“兩圓相切的切點必在其連心線上”或過此點作垂線（即兩圓公切線）來解題。

2.所求圓半徑爲已知時，處理通則有二：平移已知直線此半徑之距，或以半徑和（或差）爲半徑作已知圓的同心圓。

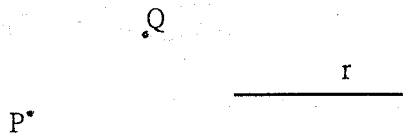
另外如題型五的作兩切線夾角的平分線，及題型六的作等腰三角形底邊的中垂線，這些解題經驗都是很有意義的。它們在解題思考上可以提供我們一個正確的可能方向，對解相關的作圖問題極有幫助。

下面我們再由二點一線、二點一圓等題型繼續探討：

〔題型八〕

已知：二定點P及Q，一線段長r

求作：以r爲半徑作一圓同時過P及Q點

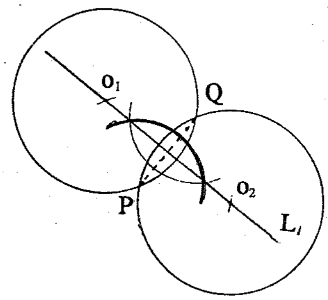


解析：依據題意知$\overline{PQ}$爲一弦，故圓心必在$\overline{PQ}$的中垂線上；以P（或Q）爲圓心，r爲半徑畫弧與中垂線交點即圓心。

作法：1.作$\overline{PQ}$之中垂線L

2.以P爲圓心，r爲半徑畫弧，交L於O_1及O_2

3.以O_1、O_2爲圓心，r爲半徑畫圓皆爲所求。

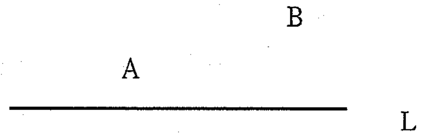


討論：一般而言，此題有二解。但若r小於$\frac{1}{2}\overline{PQ}$則無解；若恰等於$\frac{1}{2}\overline{PQ}$，則恰有一圓爲解。此時$\overline{PQ}$爲圓之直徑。

〔題型九〕

已知：一直線L外兩點A、B（在L的同側）

求作：過A及B作一圓與L相切



解析：因A、B在圓上，L爲其切線，則$\overleftrightarrow{AB}$及L之相交將引發“切割線定理”的內涵。內於兩點A、B與直線L的相對位置確定，故$\overleftrightarrow{AB}$及L的交點P亦隨之確定。若能決定L上的切點位置，則由“三點決定一圓”即可得解；因過A及B任作一圓皆可得自P引出的切線長，故L上的切點亦可尋得。

作法：1.連$\overleftrightarrow{AB}$，交L交P

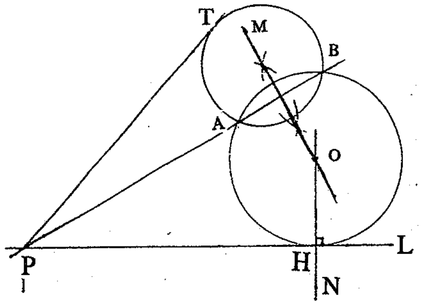
2.作$\overline{AB}$的中垂線M

3.在M上任取一點爲圓心畫圓過A及B兩點

4.自P作上圓的切線，得切點T

5.在L上取$\overline{PH}=\overline{PT}$，過H作L的垂線N

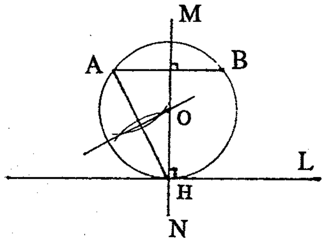
6.設N與M交於O，則以O爲圓心$\overline{OA}$爲半徑畫圓即所求。



討論：1.切割線定理的運用是同時對兩圓發揮效用的，因此有$\overline{PT}^2=\overline{PA}\times\overline{PB}=\overline{PH}^2$，而借$\overline{PT}$長來決定H點位置。

2.本題作法利用“三點決定一圓”來突破難以直接求取圓心位置的困境，是完全不同於前的新解題策略。

3.A 與 B 須在 L 同側且 $\overline{AB}$ 不平行於 L 時方有解；一般而言有二解，上圖的另一解可由 P 的左側找 L 上一點 $H'(\overline{PH'}=\overline{PT})$ 求得。

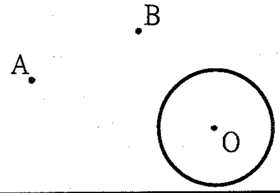


4.若 $\overline{AB}$//L，則 M 與 N 重合，此時恰有一解。只須作 $\overline{AH}$（或 $\overline{BH}$）之中垂線與 M 相交即得圓心 O。

〔題型十〕

已知：一圓 O 外兩點 A、B

求作：過 A 及 B 作一圓與圓 O 相切



解析：由上一題型之經驗，設法將切割線定理再運用出來：若過 A 及 B 作圓與圓 O 相交，可由兩交點引出一割線來；它與 $\overleftrightarrow{AB}$ 的交點對圓 O 作切線後，所得切點與 A、B 即能確定出圓來。

作法：1.連 $\overleftrightarrow{AB}$，作 $\overline{AB}$ 的中垂線 L

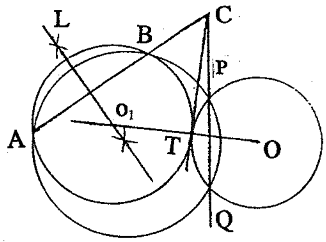
2.在 L 上任取一點為圓心畫圓，使與圓 O 交於 P、Q 兩點

3.連 $\overleftrightarrow{PQ}$，交 $\overleftrightarrow{AB}$ 於 C

4.過 C 引圓 O 的切線 $\overleftrightarrow{CT}$，T 為切點

5.連 $\overleftrightarrow{OT}$，交 L 於 O_1

6.以 O_1 為圓心，$\overline{O_1T}$（或 $\overline{O_1A}$、$\overline{O_1B}$）為半徑畫圓即所求

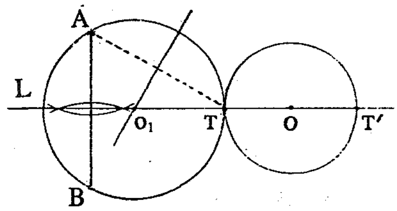


討論：1.若步驟 4 過 C 引的是另一條切線，則將可作出呈內切關係之圓；但若 $\overleftrightarrow{AB}$ 與圓 O 相切，則僅剩一解。

2.此處與上題在利用切割線定理方面，是大同中有小異的：上題使用了一割線兩切線，這裡則是一切線兩割線。

3.步驟 5 運用公切點在連心線上來處理 O_1 的尋求：也是不同於上題的地方。

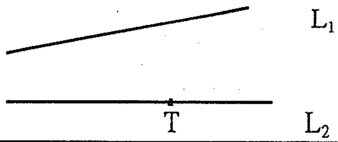
4.若 L 線過 O 點，則 $\overline{PQ}$ // $\overline{AB}$，步驟 2 到 4 都可省略，情況類似上題的討論 4，但內外切並存。



〔題型十一〕

已知：二直線 L_1、L_2，其一線上某定點 T

求作：過 T 作一圓同時與 L_1 及 L_2 相切

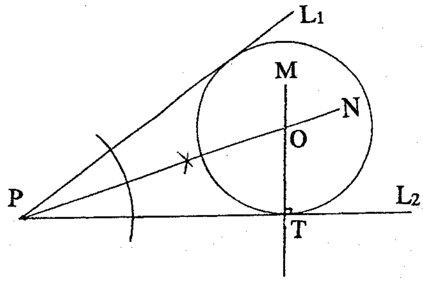


解析：因 T 會是切點，故圓心在過 T 的 L_2 的垂線上；又因 L_1 及 L_2 都是圓的切線，據題型五經驗知，圓心亦在兩線交角的平分線上。

作法：1.過 T 作 L_2 的垂線 M

2.設 L_1 及 L_2 交於 P，作 ∠P 的平分線 N，交 M 於 O 點

3.以 O 為圓心，$\overline{OT}$ 為半徑畫圓即所求。

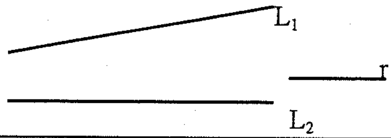


討論：若 $L_1 // L_2$，則以 M 被 L_1 及 L_2 的截線段 $\overline{TQ}$ 的中點為圓心即可。

〔題型十二〕

已知：二直線 L_1、L_2，一線段長 r

求作：以 r 為半徑作一圓同時與二線相切

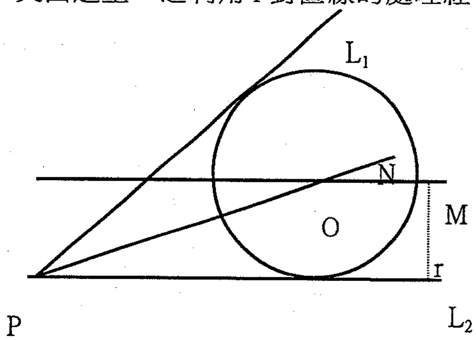


解析：如上題，圓心必在 L_1 及 L_2 交角的平分線上；又由題型二之利用 r 對直線的處理經驗知，圓心亦在 L_1（或 L_2）的平移 r 距遠的直線上。

作法：1.作 L_1 及 L_2 的交角 ∠P 的平分線 N

2.作 L_2 的平行線 M 距 L_2 為 r

3.以 M 及 N 的交點 O 為圓心，r 為半徑畫圓即所求。

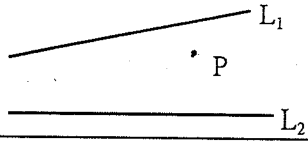


討論：亦可同時作 L_1 及 L_2 的平行線（平移 r 之距）來找出圓心 O 位置。若 L_1 及 L_2 不平行，應有四解。

〔題型十三〕

已知：二直線 L_1、L_2，線外一定點 P

求作：過 P 作一圓同時與 L_1 及 L_2 相切



解析：圓心顯然是在 L_1 及 L_2 交角的平分線上。問題是：角平分線上那一點會與 L_1（或 L_2）及 P 等距？這樣的點就是圓心了。事實上，一角內可夾住任意半徑長的圓，

而角的頂點就是它們的縮放中心；因此，我們可以利用相似原理來作圖找到圓心。

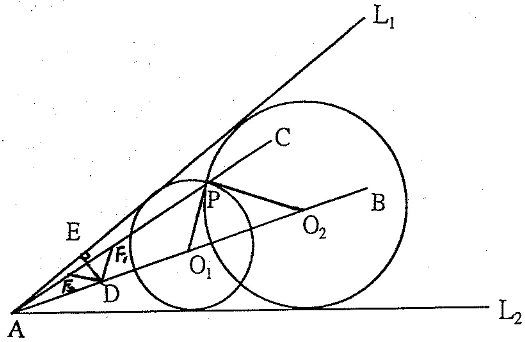
作法：1.連 $\overrightarrow{AP}$

2.作 L_1 及 L_2 交∠A 的平分線 $\overrightarrow{AB}$

3.在 $\overrightarrow{AB}$ 上任取一點 D 對 L_1（或 L_2）$\overline{ED}\perp\overline{AE}$

4.以 D 爲圓心，$\overline{DE}$ 爲半徑畫弧，與 $\overrightarrow{AP}$ 交於 F_1、F_2

5.過 P 作 $\overline{DF_1}$、$\overline{DF_2}$ 的平行線交 $\overrightarrow{AB}$ 於 O_1、O_2



6.分別以 O_1 及 O_2 爲圓心，$\overline{PO_1}$、$\overline{PO_2}$ 爲半徑畫圓，兩圓皆爲所求。

討論：1.當 P 在角平分線 $\overrightarrow{AB}$ 上時，改作 $\overline{EF_1}$ 及 $\overline{EF_2}$ 的平行線即可得解。

2.P 點越靠近角平分線時，兩圓 O_1 及 O_2 越分開；若 P 在角的邊上（L_1 或 L_2），則成題型十一之狀況。

3.本題使用相似原理作圖爲其解題新策略，若利用切割線定理來處理，則可如下作圖一。

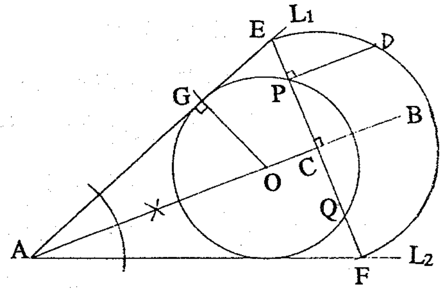
另解：1.作∠A 的平分線 $\overrightarrow{AB}$

2.過 P 作 $\overrightarrow{AB}$ 的垂線交 L_1、L_2 於 E、F，交 $\overrightarrow{AB}$ 於 C

3.以 C 爲圓心，$\overline{CD}$（或 $\overline{CF}$）爲半徑畫半圓；過 P 作 $\overline{EF}$ 的垂線交半圓於 D，則 $\overline{PD}^2=\overline{EP}\times\overline{FP}\,(=\overline{EP}\times\overline{EQ})$

4.在 L_1 上取 $\overline{EG}=\overline{PD}$，過 G 作 L_1 的垂線交 $\overrightarrow{AB}$ 於 O

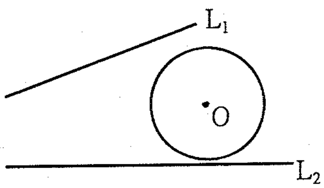
5.以 O 爲圓心，$\overline{OG}$ 爲半徑畫圓即爲所求；上一步驟在 $\overrightarrow{EG}$ 的反向上亦可取得一 H 點使 $\overline{EH}=\overline{EG}=\overline{PD}$，H 點提供另一圓爲解。

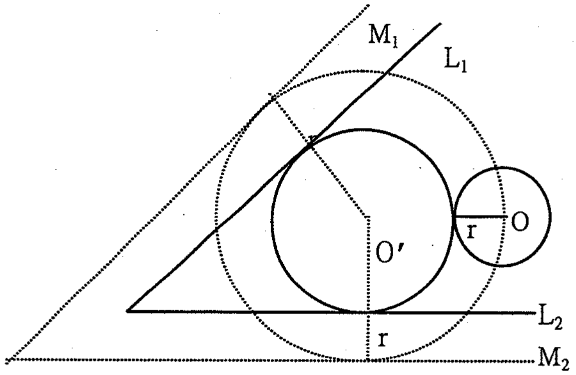


〔題型十四〕

已知：二直線 L_1、L_2，一已知圓 O

求作：一圓同時與 L_1、L_2 及圓 O 相切





解析：假定你已畫出要求的圓，如右圖之圓 O'；則以兩半徑和爲半徑所畫的同心圓，也必與 M_1、M_2（L_1、L_2 平移 r 距）相切。所以本題可視爲過 O 點作圓與 M_1 及 M_2 相切的上一題型。

作法：1.分別以圓 O 半徑爲距作 L_1 及 L_2 的平行線 M_1、M_2 交於 A 點

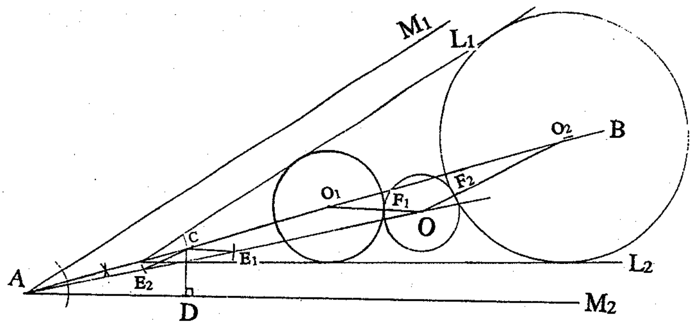
2.作 $\angle A$ 的平分線 $\overrightarrow{AB}$

3.在 $\overrightarrow{AB}$ 上任取一點 C，過 C 作 M_2（或 M_1）的垂線 $\overline{CD}$

4.連 $\overrightarrow{AO}$；以 C 爲圓心，$\overline{CD}$ 爲半徑畫弧交 $\overrightarrow{AO}$ 於 E_1、E_2

5.過 O 作 $\overline{CE_1}$、$\overline{CE_2}$ 的平行線交 $\overrightarrow{AB}$ 於 O_1、O_2

6.分別以 O_1、O_2 爲圓心，$\overline{O_1F_1}$、$\overline{O_2F_2}$ 爲半徑畫圓皆所求。



討論：1.若 M_1 及 M_2 改爲靠近圓 O 方向平移，則畫出來的圓將與圓 O 呈內切關係。

2.當 O 在 $\overrightarrow{AB}$ 上時，改作 $\overline{DE_1}$、$\overline{DE_2}$ 的平行線即可。

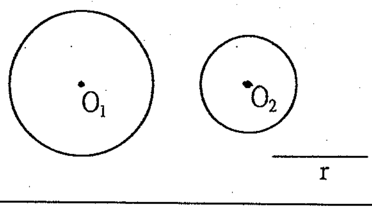
3.若 L_1 及 L_2 與圓 O 皆不相交，則外切、內切各有二解；若有一線與圓 O 相切，則內切僅剩一解；若有一線與圓 O 交於二點，則僅剩外切二解。

4.步驟 3 以下亦可改用上題之另解作法來完成。

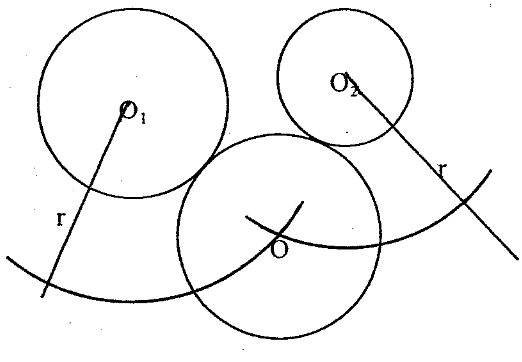
〔題型十五〕

已知：二已知圓 O_1、O_2，一線段長 r

求作：以 r 爲半徑畫圓與圓 O_1、O_2 相切



解析：由題型四經驗得知，可對圓 O_1 試作以半徑和爲半徑的同心圓；而兩圓的地位是對等的，因此同時考慮對兩圓作同心圓，圓心位置立即浮現。



作法：1.以 O_1 爲圓心，原半徑與 r 之和爲半徑畫一同心圓

2.仿上作圓 O_2 的同心圓，與上圓交點爲 O 及 O′（O′點未畫出）

3.以 O 爲圓心，r 爲半徑畫圓即所求

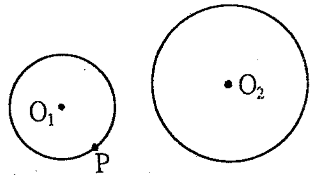
討論：1.一般而言，可作二圓與已知圓皆外切；但若 $\overline{O_1O_2}=r_1+r_2+2r$（$r_1$、$r_2$ 分別爲兩已知圓的半徑），則僅剩一圓；若 $\overline{O_1O_2}>r_1+r_2+2r$，則無解。

2.若改以半徑差作同心圓，則可得內切之圓，但 r 須夠大（$2r \geq \overline{O_1O_2}+r_2+2r$）方有解。當然，若兩圓外離，亦可作出與一圓內切而與另一圓外切者；如此則最多可有八解。

〔題型十六〕

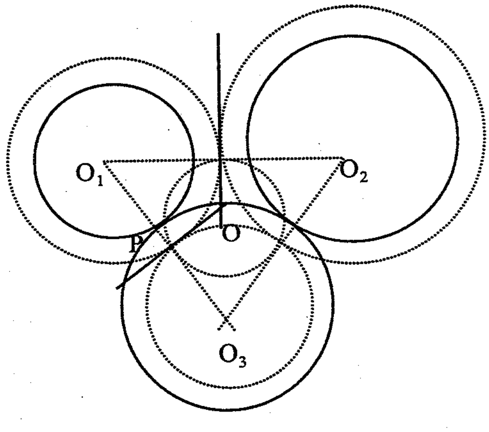
已知：二已知圓 O_1、O_2，一圓上某定點 P

求作：以 P 爲切點作出同時與兩圓相切的圓



解析：由題型三知 $\overleftrightarrow{O_1P}$ 會通過欲求之圓心。

假定已求得該圓，如右圖中之圓 O_3，則考慮這三圓的同心圓；因彼等兩兩外切，三切點恰爲 $\Delta O_1O_2O_3$ 與內切圓之切點（*註 1），故可由此確定出圓心的位置（從內切圓引出切線與 $\overleftrightarrow{O_1P}$ 相交）。



作法：1.連 $\overline{O_1O_2}$，與兩圓分別交於 A、B

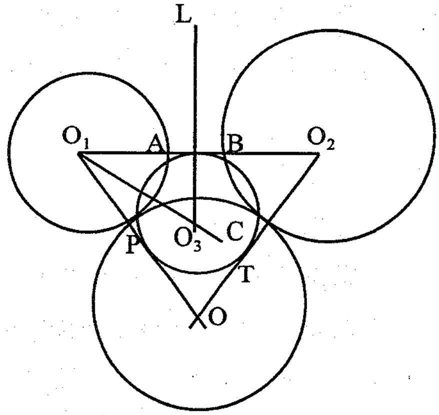
2.作 $\overline{AB}$ 的中垂線 L

3. 連 $\overleftrightarrow{O_1P}$，作 $\angle O_2O_1P$ 的平分線 $\overrightarrow{O_1C}$，與 L 交於 O_3

4.以 O_3 爲圓心，$\overline{O_3M}$ 爲半徑畫圓

5.過 O_2 對圓 O_3 引切線 $\overleftrightarrow{O_2T}$ 交 $\overleftrightarrow{O_1P}$ 於 O

6.以 O 爲圓心，$\overline{OP}$ 爲半徑畫圓即所求。



討論：1.步驟 5 亦可改由 $\overline{O_2M}$ 爲半徑、O_2 爲圓心畫弧與圓 O_3 交點得切點 T，再進一步得圓心 O

2.兩圓不限於外離方有解；即使是相交於兩點，只要定點 P 在交疊範圍之外，解仍可存在。

3.定點 P 在兩圓外公切線之外時，存在一圓與其內切；在兩圓內公切線之內時，存在一圓與其外切；當然，亦可能與一圓內（或外）切，而與另一圓外（內）切。但至多有二解。

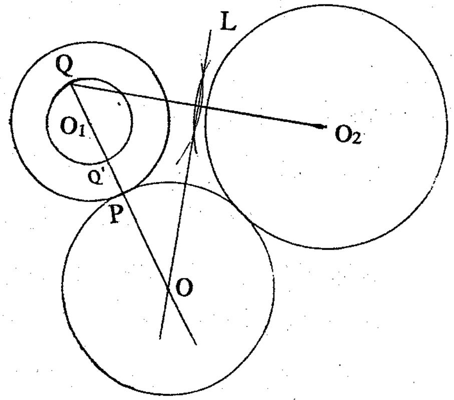
4.若運用極端化原則（參見[8]）進行解題，將圓 O_2 的半徑縮小至趨近於零，則問題幾近於題型三，就可以用類似的作法處理－

另解一：1.以 O_1 爲圓心，兩半徑差 $|r_1-r_2|$ 爲半徑畫一同心圓

2.連 $\overleftrightarrow{O_1P}$，與上圓交於 Q、Q′

3.因 $r_2>r_1$，故連 $\overline{QO_2}$（若 $r_1>r_2$ 改連 $\overline{Q'O_2}$），作其中垂線 L 與 $\overleftrightarrow{O_1P}$ 交於 O

4.以 O 爲圓心，$\overline{OP}$ 爲半徑畫圓即所求。

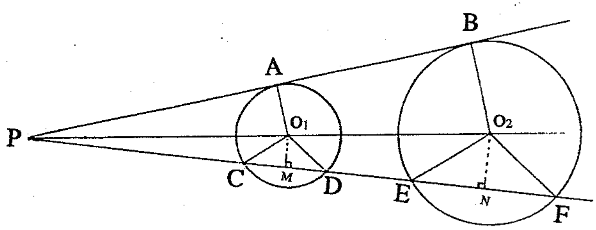


事實上，在極端化的觀點裡，一點是"半徑為零的圓"，而一直線則是"半徑為無限大的圓"！從這種角度思考問題是正當而有效的－有時，甚至是必要的。上述的另解就顯得比原作法簡明多了。下文中我們將進一步發揮它的解題功效。

關於題型十六，還有一種也很簡明的作法，就是下面的另解二。只是它須運用到一

則定理，我們有必要在此先做解說：

〔定理〕如圖所示，P 為兩圓 O_1、O_2 之外公切線 $\overleftrightarrow{AB}$ 及連心線 $\overleftrightarrow{O_1O_2}$ 的交點；自 P 任引一直線 L 與兩圓分別交於 C、D 及 E、F，則有 $\overline{O_1C} // \overline{O_2E}$、$\overline{O_1D} // \overline{O_2F}$，且 $\overline{PC} \times \overline{PF} = \overline{PD} \times \overline{PE}$。



證明：(1) $\because \overleftrightarrow{AB}$ 為兩圓切線，

$\therefore \overline{O_1A} \perp \overline{PA}$、$\overline{O_2B} \perp \overline{PB}$

$\therefore \Delta O_1AP \sim \Delta O_2BP \quad \Rightarrow \overline{PA} : \overline{PB} = \overline{PO_1} : \overline{PO_2} = \overline{AO_1} : \overline{BO_2}$

(2)作 $\overline{O_1M} \perp \overline{CD}$、$\overline{O_2N} \perp \overline{EF}$，則

$\Delta O_1MP \sim \Delta O_2NP \quad \overline{PM} : \overline{PN} = \overline{PO_1} : \overline{PO_2} = \overline{O_1M} : \overline{O_2N}$

(3) $\dfrac{\overline{O_1C}}{\overline{O_2E}} = \dfrac{\overline{AO_1}}{\overline{BO_2}} = \dfrac{\overline{PO_1}}{\overline{PO_2}} = \dfrac{\overline{O_1M}}{\overline{O_2N}}$ 且 $\angle M = \angle N = 90°$

$\therefore \Delta O_1CM \sim \Delta O_2EN \quad \Rightarrow \overline{CM} : \overline{EN} = \overline{O_1C} : \overline{O_2E} \Rightarrow \overline{CM} : \overline{EN} = \overline{PO_1} : \overline{PO_2}$

(4)由上可知 $\dfrac{\overline{PO_1}}{\overline{PO_2}} = \dfrac{\overline{PM}}{\overline{PN}} = \dfrac{\overline{CM}}{\overline{EN}} = \dfrac{\overline{PM} - \overline{CM}}{\overline{PN} - \overline{EN}} = \dfrac{\overline{PC}}{\overline{PE}}$

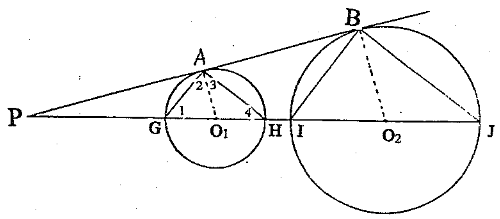
故知：$\overline{O_1C} // \overline{O_2E}$，同理可證 $\overline{O_1D} // \overline{O_2F}$

(5) $\because \overline{PC} : \overline{PE} = \overline{PO_1} : \overline{PO_2} = \overline{PD} : \overline{PF}$

$\therefore \overline{PC} \times \overline{PF} = \overline{PD} \times \overline{PE}$ 得證。

從定理又可以進一步推得兩則有用的“系理”，我們簡述如下：

(系理一)
定理中之一特例，連心線 $\overleftrightarrow{O_1O_2}$ 與兩圓分別交於 G、H 及 I、J，則有 $\overline{PG} \times \overline{PJ} = \overline{PH} \times \overline{PI} = \overline{PA} \times \overline{PB}$ 且 A、B、H、I 四點共圓。



說明：1. $\angle GAH = 90° = \angle PAO_1$ 且 $\angle 1 = \angle 2$，$\angle 3 = \angle 4$

$\therefore \angle PAG = \angle 4 \quad \Rightarrow \quad \Delta PAG \sim \Delta PHA$

2.同理可證 $\Delta PBI \sim \Delta PJB$

3.又因 $\overline{AG} // \overline{BI}$ ， $\overline{AH} // \overline{BJ}$ $\Rightarrow \Delta PAG \sim \Delta PBI$，$\Delta PHA \sim \Delta PJB$

$\therefore \Delta PAG \sim \Delta PHA \sim \Delta PBI \sim \Delta PJB$

$\therefore \overline{PA} \times \overline{PB} = \overline{PG} \times \overline{PJ} = \overline{PH} \times \overline{PI}$

4. $\angle PBI = \angle PAG = \angle 4$ $\therefore$ A、B、H、I 四點共圓得證。

這個系理的前半結果有切割線定理的推廣味道，對兩割線而論時，則有外冪性質的聯想；至於後半，我們將在下面的題型中利用到它（公切線可推廣到一般割線）。

（系理二）

如定理之圖所示，若分別延長 $\overleftrightarrow{O_1D}$ 及 $\overleftrightarrow{O_2E}$ 相交於一點 O，則必有 $\overline{OD} = \overline{OE}$；同理亦可對 $\overleftrightarrow{O_1C}$ 及 $\overleftrightarrow{O_2F}$ 作出類似之結果。

說明：$\because \angle O_1CP = \angle O_2EP$（同位角）且 $\angle O_1CD = \angle O_1DC$

$\therefore \angle O_1DE = \angle O_2ED \Rightarrow \angle ODE = OED \Rightarrow \overline{OD} = \overline{OE}$ 得證。

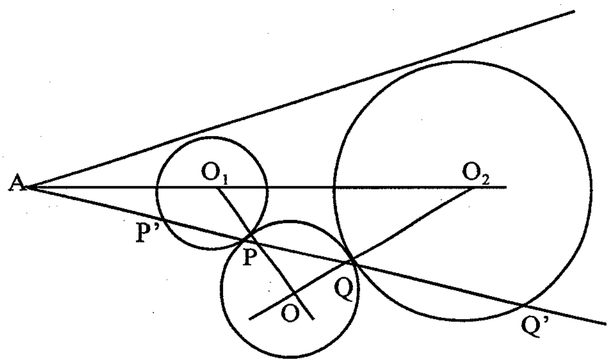
有了這個系理，我們可以安心地提出題型十六的另解二了—

另解二：1.連 $\overleftrightarrow{O_1O_2}$

2.作兩圓外公切線與 $\overleftrightarrow{O_1O_2}$ 交於點 A

3.連 $\overleftrightarrow{AP}$，與圓 O_2 交於 Q

4.以 $\overrightarrow{O_1P}$、$\overrightarrow{O_2Q}$ 之交點 O 爲圓心，$\overline{OP}$ 爲半徑畫圓即可



討論：1.若取 $\overleftrightarrow{AP}$ 與兩圓的另二交點 P′、Q′ 作圖，則將得一同時與兩圓呈內切的圓。

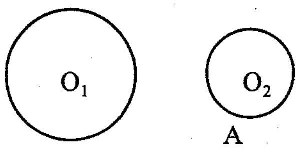
2.同理，可作內公切線再仿上作法得與一圓內切而與另一圓外切之圓。

3.若外公切線平行於連心線，即 A 點不存在，此時兩圓爲等圓，原問題已簡化。

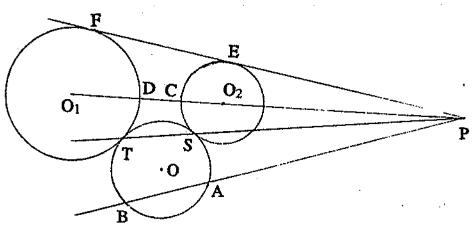
〔題型十七〕

已知：二已知圓 O_1、O_2，圓外一點 A

求作：過 A 作一圓同時與兩已知圓相切



解析：假想你已作出此圓，則由系理一知 $\overline{PC} \times \overline{PD} = \overline{PE} \times \overline{PF}$（參見下圖），又 $\overline{PS} \times \overline{PT} = \overline{PE} \times \overline{PF}$，故知 $\overline{PS} \times \overline{PT} = \overline{PC} \times \overline{PD}$；由外冪性質知



$\overline{PS}\times\overline{PT}=\overline{PA}\times\overline{PB}$，所以有 $\overline{PA}\times\overline{PB}=\overline{PC}\times\overline{PD}$。這告訴我們 A、B、C、D 四點是共圓的，因此可由 A、C、D 三點來決定 B 的位置。從而要得到圓 O，可利用題型十，視之為 A、B 兩點對圓 O_1 或 O_2 的情形都能畫出圓 O

作法：1.連 $\overleftrightarrow{O_1O_2}$，與外公切線 $\overleftrightarrow{T_1T_2}$ 交於 S 點

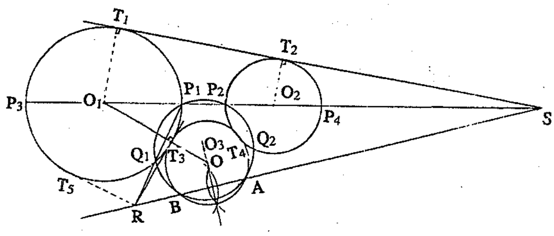
2.過 A、P_1、P_2 三點作一圓 O_3，與 $\overleftrightarrow{SA}$ 交於 B

3.連 $\overleftrightarrow{P_1Q_1}$，與 $\overleftrightarrow{SA}$ 交於 R

4.自 R 對圓 O_1 引切線 $\overleftrightarrow{RT_3}$

5.連 $\overleftrightarrow{O_1T_3}$，與 $\overline{AB}$ 的中垂線交於點 O

6.以 O 為圓心，$\overline{OT_3}$ 為半徑畫圓即所求



討論：1.圖中隱含關係式 $\overline{ST_1}\times\overline{ST_2}=\overline{SP_1}\times\overline{SP_2}=\overline{ST_3}\times\overline{ST_4}=\overline{SA}\times\overline{SB}$ 及 $\overline{RP_1}\times\overline{RQ_1}=\overline{PT_3}^2=\overline{RA}\times\overline{RB}$

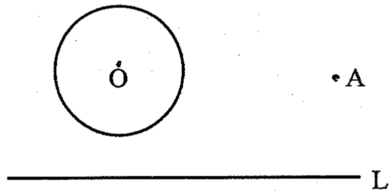
2.步驟 2 亦可改由 P3、P4 與 A 三點畫圓來決定 B 點。

3.若步驟 4 改作另一切線 $\overleftrightarrow{O_1T_5}$，則所得之圓將呈內切。

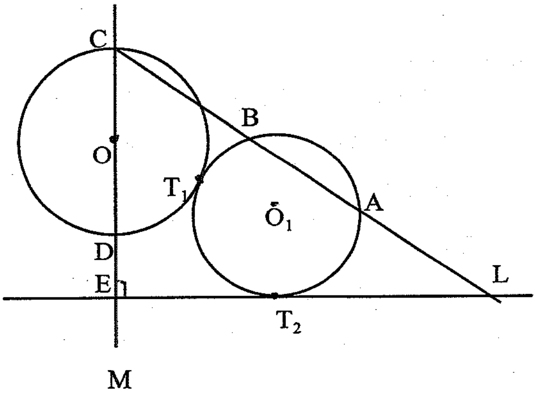
〔題型十八〕

已知：一圓 O 外一定點 A，在一直線 L 同側

求作：過 A 作一圓同時與 L 及圓 O 相切



解析：倒著想回來仍是有效而必要的，從完成圖裡觀察出解題的端倪是我們常用的策略。如下圖所示，若過 O 作一 L 的垂線 M，交圓 O 於 C、D，交 L 於 E，則 D、E、T_1 及 T_2 會四點共圓（*註 2）。再由 A、B、T_1 及 T_2 也共圓知，A、B、D 及 E 將四點共圓。故可利用 A、D、E 三點來決定 B 的位置。剩下的問題如同上一題型，已轉化成 A 與 B 兩點對圓 O 的題型十解法了。或者，將之視為 A、B 兩點對直線 L 的題型九來處理亦可。



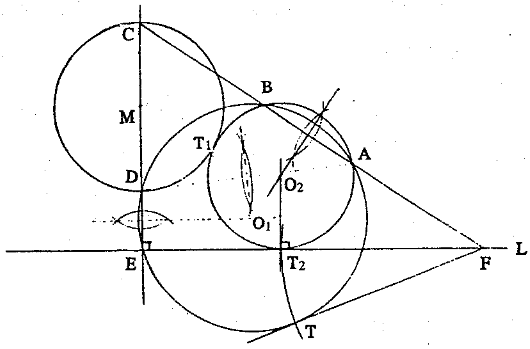
作法：1.過 O 作 L 的垂線，交圓 O 於 C、D，交 L 於 E

2.連 $\overleftrightarrow{AC}$，交 L 於 F

3.過 A、D、E 三點作一圓 O_1，交 $\overleftrightarrow{AC}$ 於 B

4.自 F 對圓 O_1 引一切線 $\overleftrightarrow{FT}$

5.在 L 上取一點 T_2，使得 $\overline{FT_2}=\overline{FT}$



6.過 A、B、T_2 三點作一圓 O_2 即為所求。

討論：1.步驗 4、5 除如解析中而言，可改用題型十方式替代外，亦可利用等比中項作圖法求得切線長 $\overline{FT}$。

2.若 $\overleftrightarrow{AC}$//L，則 $\overline{AB}$ 的中垂線過 T_2 點，可與 $\overline{AT_2}$ 或 $\overline{BT_2}$ 的中垂線相交尋得 O_2 位置。

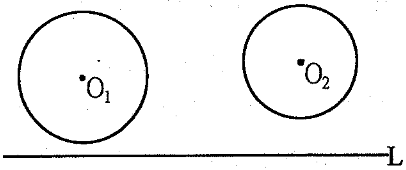
3.若 A 點恰為圓 O_1 之切點時，B 點將不存在，則由 $\overleftrightarrow{AO_1}$ 與 L 在 T_2 上的垂線交點即可得 O_2 點。

4.圓 O 及直線 L 相交時仍可有解，在圓 O 與 L 不相交時，若將 C、D 兩點角色互易，則可得出與圓 O 呈內切且同時與 L 相切的圓 O_2 來。

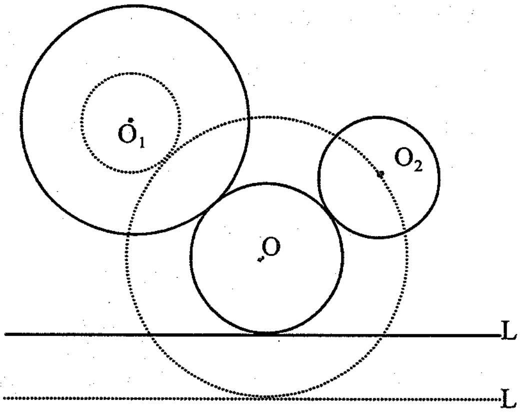
〔題型十九〕

已知：二已知圓外一直線 L

求作：一圓同時與 L 及兩圓相切



解析：本題可採用類似於題型十六的解題策略，透過極端化把題型轉變成已知解法之類型，問題即可迎刃而解。如圖所示，實線部分的圓 O 為問題之解；若將圓 O_2 之半徑縮小成零，則圓 O_1 之半徑縮減成 r_1-r_2，L 則同時平移 r_2 距；於是問題轉化成虛線部分顯示者；一圓 O_1、一點 O_2 及一線 L′ 之上題型，而虛圓 O 提供了正確圓心位置！



作法：1.以 O_1 為圓心，半徑差 r_1-r_2 為半徑畫同心圓

2.作 L 的平行線 L′ 與 L 相距 r_2

3.仿上題型作法可得正確圓心位置 O

4.以 O 為圓心，O 至 L 之距為半徑畫圓即所求。

討論：1.同上題討論 4，欲作內切之圓方法類同；當然，亦可作出與一已知圓外切而與另一圓內切者。本題最多可有四解。

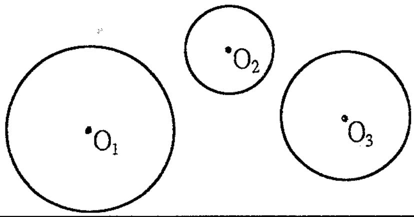
2.若兩圓 O_1、O_2 的半徑相等，則問題如同題型九。

行文至此，本文的探討工作已近尾聲。最後的壓軸好戲是三已知圓的情境。另有三點及三直線者未曾論及，因為那相當於“過三點作一圓”及“作三角形的內切圓”的問題，在國中數學選修教材（參見[6]P.49,142～144)裡已有述及，是以就此略過。

〔題型二十〕

已知：三外離圓 O_1、O_2、O_3

求作：一圓同時與三已知圓相切

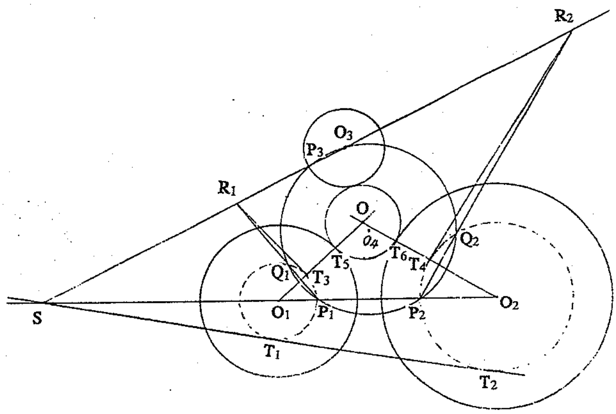


解析：延續上題的成功經驗，若將三已知圓的半徑同步縮小至其中一圓的半徑成零，則問題即轉換成二已知圓外一定點的題型十七狀態了！因此作法如下—

作法：1.分別以 O_1、O_2 為圓心，$|r_1-r_3|$、$|r_2-r_3|$ 為半徑畫同心圓

2.作上述兩圓的公切線 $\overleftrightarrow{T_1T_2}$ 與連心線 $\overleftrightarrow{O_1O_2}$ 交於 S 點

3.過 P_1、P_2、O_3 三點作一圓 O_4，分別與上二圓交於 Q_1、Q_2



4.連 $\overleftrightarrow{SO_3}$，與圓 O_4 交於 P_3

5.連 $\overleftrightarrow{P_1Q_1}$，與 $\overleftrightarrow{SO_3}$ 交於 R_1，自 R_1 對虛圓 O_1 引切線 $\overleftrightarrow{R_1T_3}$；同法作得 R_2 及 T_4

6.連 $\overleftrightarrow{O_1T_3}$ 及 $\overleftrightarrow{O_2T_4}$，兩線交於 O 點（亦可作 $\overline{O_3P_3}$ 的中垂線得）

7.以 O 為圓心，$\overline{OT_5}$（或 $\overline{OT_6}$）為半徑畫圓即所求。

討論：所求圓與三圓間呈內、外切之不同組合共計 $2^3=8$ 種；內切之作圖法大同小異，請

參考前文各類題之討論，不再一一贅述。若已知圓間非外離，則解答數自然減少。又當問題情境特殊化時，譬如三已知圓呈兩兩外切，則作法亦可相對簡化，限於篇幅，我們把它留給讀者自行體味。

結　語

至聖先師孔子說"登高必自卑，行遠必自邇"，於西諺中則有"羅馬不是一天造成的"；在各題型裡，最後兩題的難度，無疑是最高的；然而，依仗著第十七、十八題的解決，使得它們可被一舉攻克。 但若無第九、十等題的解題經驗爲後盾，恐怕題型十七、十八兩則就夠令人傷透腦筋了！回顧這一系列的問題探討，從應用平行線、垂直線、角平分線等基本的尺規作圖就可得解的題型，到進一步須利用切割線定理、縮放相似原理才能解題的深度，再更進一步衍生到達用極端化，特殊化來處理問題轉型的層次，一路行來頗有"登峰造極"的刻苦銘心感受。當中最令我沉湎留連的，應屬切割線定理的利用以至外冪性質的推廣這段歷程了。

從極端化原理裡，筆者領悟到作同心圓即相當於作直線的平移般；作圓的切線，亦如同在畫一個半徑為無限大的相切圓那樣；而眼看各圓半徑在和差間的消長，竟能因此尋得解題之路，不覺聯想到代數裡運用等量公理能化簡方程而致得解般的神奇。本文之所以不厭其煩的由淺入深逐題漸進而論，是希望讀者也能清楚地體認筆者所感受到的解題層次，並對相關問題作一次澈底的掌握與瞭解。

各題型間的順序安排亦屬不易。本文採用情境相似、難度相近者並舉的方式呈現，再輔以補充論述做爲脈絡間的串連，希望讓內容能更可讀易懂。

幾何學的起源甚早，發展到古希臘時期，已似燦爛年華，成果輝煌豐碩。時至今日，雖有座標解析等利器可以另闢途徑，但堅守演繹推理所蘊含的特有旨趣及創意，使得數學的特質與美感更能表露無遺。在中學的數學課程裡，幾何教材略顯不足，令人頗覺遺憾，筆者以珍惜古蹟的心情悠遊於幾何世界中，也盼望能有更多的學子一起來分享與再造。如果讓幾何的殿堂荒蕪成一片廢墟，恐將是人類未來的一大夢魘。謹此呼籲有識之士群起共勉。

參考文獻：

[1]九章編輯部（民77）：數學誕生的故事。台北市
[2]凡異出版社（民76）：世界數學簡史。新竹市

[3]李天華、許濟華編著（民 84）：數學奇觀。台北市・九章

[4]李文漢編著（民 79）：科學的發現（三）六大數學難題的故事。台北市・謙謙

[5]吳英格等譯（民 61）：數學是什麼。台北市・徐氏基金會

[6]國立編譯館（民 85）：國民中學選修數學上冊。改編本六版。台北市

[7]教育部編印（民 80）：80 學年度高中職五專數學科聯考試題分析彙編。台北市。台灣書店

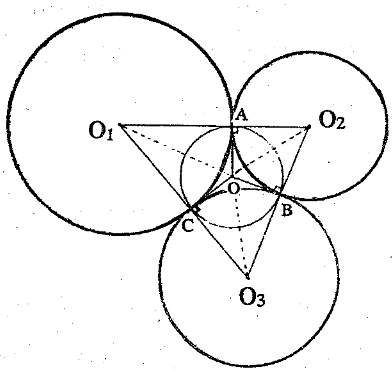
[8]黃敏昆（民 68）：數學裡的極端化原則。數學傳播季刊第三卷第三期。PP.2~7

[9]蔡哲夫編著（民 62）：作圖題。六版。台北市。中央書局

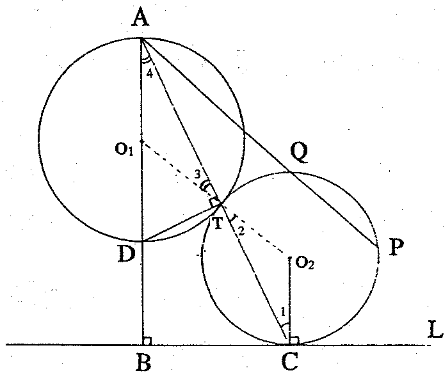
[10]龔緂（民 81）：探索數學的故事。二版。新竹市。凡異

[11]Kline, Morris (1972)：Mathematical Thought from Ancient to Modern Times. New York. Oxford University Press.

附註：



(1)如右圖所示，若三已知圓兩兩外切，切點設為 A、B 及 C；過 A 作 $\overline{O_1O_2}$ 的垂線，亦過 B 作 $\overline{O_2O_3}$ 的垂線，設兩垂線交點為 O，則由 $\overline{OA}$、$\overline{OB}$ 皆為圓 O_2 切線長知：$\overline{OA}=\overline{OB}$，故 O 點必在 $\angle O_2$ 的平分線上；同理可證 $\overline{OB}=\overline{OC}$，且 O 亦在 $\angle O_3$ 的平分線上。因此可知：圓 O 是為 $\Delta O_1O_2O_3$ 的內切圓，而 A、B 及 C 恰為其切點。



(2)若圓 O_2 與圓 O_1 切於 T 點，與直線 L 切於 C 點，則 $\overline{O_2C}\perp L$；若 $\overline{AB}$ 為過 O_1 點對 L 所作的垂線，則 $\overline{AB}//\overline{O_2C}$。由此知 $\angle 1=\angle 4$（內錯角）。又因 $\angle 1=\angle 2$，$\angle 3=\angle 4$，故得 $\angle 2=\angle 3$，顯示 T 點在 $\overline{AC}$ 上（或謂 A、T、C 三點共線）。由於 $\angle DTC=\angle ATD=90°$，且 $\angle B=90°$，即 $\angle DTC+\angle B=180°$，故知 D、B、C、T 四點共圓。若進一步由圓的外冪性質推論，則 $\overline{AB}\times\overline{AD}=\overline{AC}\times\overline{AT}=\overline{AP}\times\overline{AQ}$，這告訴我們：D、B、P、Q 四點亦共圓！