第 29 屆（1998 年）國際物理奧林匹亞競賽理論試題參考答案（續）

林明瑞
國立臺灣師範大學　物理系

理論第三題參考解答

(a)在試題之圖 3-1 中，盡可能準確地標出輻射源的中心位置。令$\theta_1(t)$表示左邊輻射源中心相距X標記點，在 t 時刻的角距離；$\theta_2(t)$則是右邊輻射源中心角距離的時間函數。我們可利用一把直尺在圖上讀取這些角度數據，並按照比例尺轉換成弧秒，所的結果表列如下：

t（day）	θ_1（as）	θ_1（as）
0	0.319	0.076
7	0.253	0.139
13	0.354	0.190
20	0.468	0.253
27	0.601	0.316
34	0.709	0.367

以直尺讀取數據的誤差估計為± 0.5mm，這會對θ值造成± 0.013as 的誤差。上表中的數據繪圖如下：

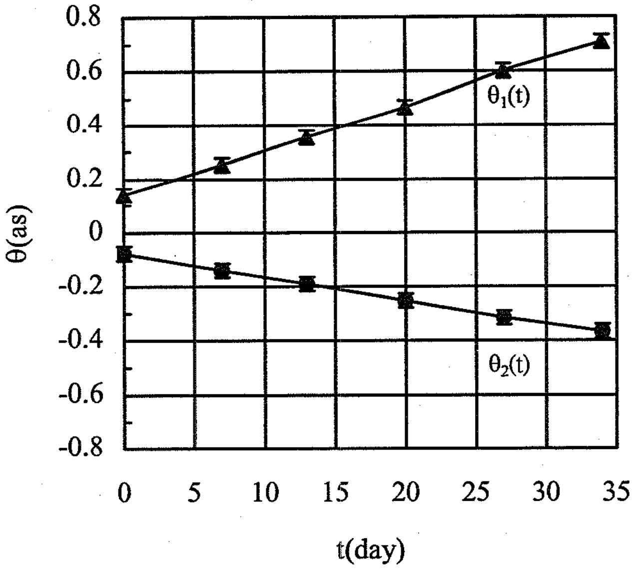


圖 3-1

由圖中通過數據點的配合直線，可得

$$\omega_1 = d\theta_1/dt = (17.0 \pm 1.0)\text{mas/day} = 9.54\times10^{-13}\,\text{rad/s} \quad \text{......(1)}$$

$$\omega_2 = d\theta_2/dt = (8.7 \pm 1.0)\text{mas/day} = 4.88\times10^{-13}\,\text{rad/s} \quad \text{......(2)}$$

$$v'_{1\perp} = \omega_1 R = 9.54\times10^{-13}\times(12.5\times3.09\times10^{19})$$

$$= 3.68\times10^{8}\,\text{m/s} \approx (1.23\pm0.07)c \quad \text{......(3)}$$

$$v'_{2\perp} = \omega_2 R = 4.88\times10^{-13}\times(12.5\times3.09\times10^{19})$$

$$= 1.89\times10^{8}\,\text{m/s} \approx (0.63\pm0.07)c \quad \text{......(4)}$$

(b)考慮輻射源的運動，在 Δt 時間內從 A 點移至 A'，如圖 3-2 所示。由圖中可得

$$\vec{r}_{AA'} = \vec{r}_{A'} - \vec{r}_A = \vec{v}\Delta t \quad \text{......(5)}$$

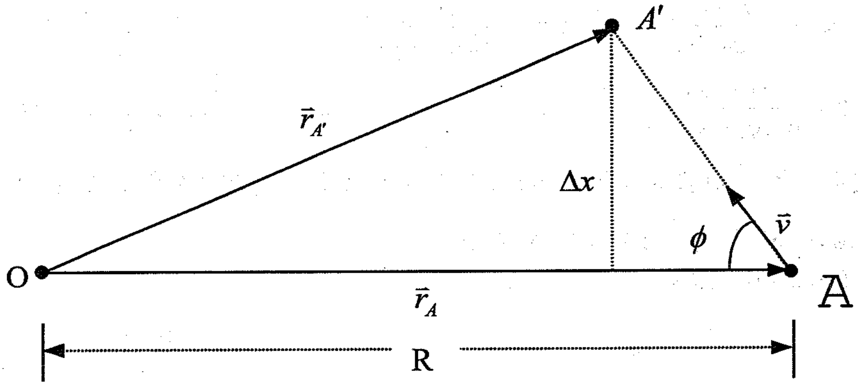


圖 3-2

設 $\Delta t'$ 表示訊號從 A 點和 A' 點到達 O 點的時間差。由於這兩點相距 O 點的距離不同，而且光速爲有限值，故

$$\Delta t' = \Delta t + (r_{A'} - r_A)/c \quad \text{......(6)}$$

就很小的 Δt 而言，$v\Delta t \ll r_A = R$，則

$$r_{A'} - r_A \approx -v\Delta t\cos\phi \quad \text{......(7)}$$

$$\Delta t' \approx \Delta t(1-\beta\cos\phi) \quad \text{......(8)}$$

式中 $\beta = v/c$。在 O 點的觀察者所看到的輻射源的橫向速率，即視橫向速率，爲

$$v'_\perp = \frac{\Delta x}{\Delta t'} = \frac{\Delta x}{\Delta t(1-\beta\cos\phi)} = \frac{c\beta\sin\phi}{(1-\beta\cos\phi)} \quad \text{......(9)}$$

上式中，我們已代入了在觀察者坐標系中的真正橫向速率，即 $v_\perp = \dfrac{\Delta x}{\Delta t} = c\beta\sin\phi$。

在 O 點處所觀察到的角速率為

$$\omega=\frac{v'_{\perp}}{R}=\frac{c\beta\sin\phi}{R(1-\beta\sin\phi)} \quad\text{......(10)}$$

(c)圖 3-3 顯示本題所假設的情況，兩物體以相同的速率在相反的方向上運動。由圖中可得 $\phi_1=\pi-\phi_2$ 。設 $\phi_1=\phi$ ，則 $\sin\phi_2=\sin\phi$ ， $\cos\phi_2=-\cos\phi$ ；又因 $v_1=v_2=v$ ，得 $\beta_1=\beta_2=\beta$ 。應用(10)式，可得下列兩式：

$$\omega_1=\frac{\beta c\sin\phi}{R(1-\beta\cos\phi)} \quad\text{......(11)}$$

$$\omega_2=\frac{\beta c\sin\phi}{R(1+\beta\cos\phi)} \quad\text{......(12)}$$

上式中 ω_1 、 ω_2 、和 R 皆為已知量，故可解出 ϕ 和 β ，即

$$\tan\phi=\frac{2R\omega_1\omega_2}{c(\omega_1-\omega_2)}\Rightarrow\phi=\tan^{-1}\left(\frac{2R\omega_1\omega_2}{c(\omega_1-\omega_2)}\right) \quad\text{......(13)}$$

$$\beta=\frac{\omega_1-\omega_2}{\cos\phi(\omega_1+\omega_2)} \quad\text{......(14)}$$

在上二式中，代入(a)題中所計算出的 ω_1 和 ω_2 ，以及所給予的 R 和 c 數值，可得

$$\phi=\tan^{-1}(2.57)=1.20\text{rad}=68.8^\circ\pm2^\circ$$
$$\beta=0.892\pm0.08$$

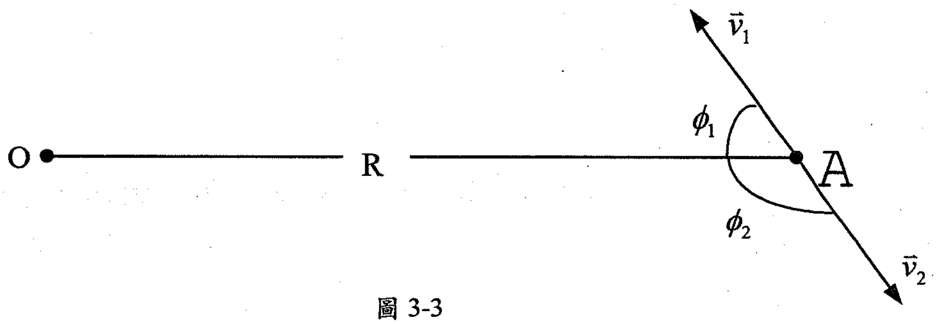


圖 3-3

(d) 由(9)式可知，如果下式成立，則在 O 點的觀察者將可看到輻射源的視橫向速率大於或等於光速。

$$\frac{\beta\sin\phi}{1-\beta\cos\phi}\geq1 \quad\text{......(15)}$$

若 $\beta<1$，則 $1-\beta\cos\phi>0$，(15)式可寫為

$$\beta\sin\phi\geq1-\beta\cos\phi \quad\Rightarrow\quad \beta(\sin\phi+\cos\phi)\geq1$$

$$\Rightarrow \beta\sqrt{2}\left(\sin\phi\cos\frac{\pi}{4}+\cos\phi\sin\frac{\pi}{4}\right)\geq 1$$

$$\Rightarrow \beta\sqrt{2}\sin\left(\phi+\frac{\pi}{4}\right)\geq 1$$

$$\Rightarrow \beta \geq \left(\sqrt{2}\sin(\phi+\pi/4)\right)^{-1} \quad\text{......(16)}$$

故視橫向速率大於或等於光速的條件為

$$\beta > f(\phi)=\left(\sqrt{2}\sin(\phi+\pi/4)\right)^{-1} \quad\text{......(17)}$$

在 (β,ϕ) -平面內具有物理意義的區域為

$$(\beta,\phi)\in[0,1]\times[0,\pi] \quad\text{......(18)}$$

但欲使(15)式其成立，則 (β,ϕ) 的範圍須受進一步的限制。由(15)式可得

$$1>\beta\sin\phi\geq 1-\beta\cos\phi \Rightarrow \cos\phi>0 \Rightarrow \pi/2>\phi>0$$

又由(16)式可得

$$\sin\left(\phi+\frac{\pi}{4}\right)\geq\frac{1}{\beta\sqrt{2}} \Rightarrow 1>\beta>\frac{1}{\sqrt{2}}$$

所以本題所求的 (β,ϕ) 範圍為

$$(\beta,\phi)\in\left[\frac{1}{\sqrt{2}},1\right]\times\left[0,\frac{\pi}{2}\right] \quad\text{......(19)}$$

在上述範圍內，且滿足(15)式的邊界方程式為

$$\beta\sin\left(\phi+\frac{\pi}{4}\right)=\frac{1}{\sqrt{2}} \quad\text{......(20)}$$

圖 3-4 所示的陰影部分即為上式曲線所圍裹的範圍。在此範圍內的 (β,ϕ) 所對應的視橫向速率 $v'_{\perp}>c$ 。

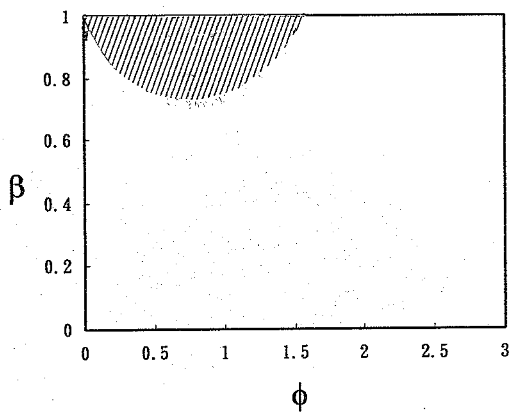


圖 3-4

(e) $v'_{\perp}$的極值可從微分(9)式求得，即

$$\frac{d}{d\phi}\left(\frac{v'_\perp}{c}\right)=\frac{\beta(\cos\phi-\beta)}{(1-\beta\cos\phi)^2} \quad \cdots\cdots (21)$$

設 $v'_\perp$ 的極值所對應的角度為 ϕ_m ，則

$$\left.\frac{d}{d\phi}\left(\frac{v'_\perp}{c}\right)\right|_{\phi_m}=0 \;\Rightarrow\; \cos\phi_m=\beta$$

$$\Rightarrow \phi_m=\cos^{-1}\beta\in[0,\pi/2] \quad \cdots\cdots (22)$$

欲證明 ϕ_m 所對應的極值為極大值，則須再微分(21)式，得

$$\frac{d^2}{d\phi^2}\left(\frac{v'_\perp}{c}\right)=-\beta\left(\frac{\sin\phi}{(1-\beta\cos\phi)^2}+2\frac{\beta\sin\phi(\cos\phi-\beta)}{(1-\beta\cos\phi)^3}\right) \quad \cdots\cdots (23)$$

$$\left.\frac{d^2}{d\phi^2}\left(\frac{v'_\perp}{c}\right)\right|_{\phi_M}=\frac{\beta\sin\phi_m}{(1-\beta^2)^2}<0 \quad \cdots\cdots (24)$$

這證明 ϕ_m 所對應的極值確為極大值，將 ϕ_m 代入(9)式，可得

$$(v'_\perp)_{max}=\frac{\beta c}{\sqrt{1-\beta^2}} \quad \cdots\cdots (25)$$

由上式和(22)式可知

$$(v'_\perp)_{max}\xrightarrow[\beta\to1]{}\infty \quad ; \quad \phi_m\xrightarrow[\beta\to1]{}0 \quad \cdots\cdots (26)$$

圖 3-5 為(9)式的立體圖，其曲面顯示 $v'_\perp/c$ 為 β 和 ϕ 在 $(\beta,\phi)\in\left[\frac{1}{\sqrt{2}},1\right]\times\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$ 區域內的函數關係圖。圖中的平面為 $v'_\perp/c=1$ ，由圖上可看出當 $\beta\to1$ ， $\phi\to0$ 時， $v'_\perp/c\to\infty$ 。

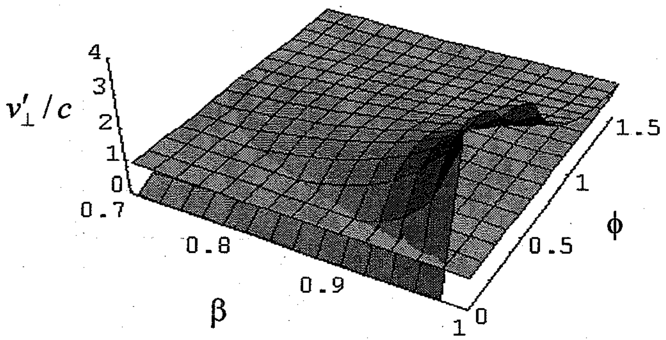


圖 3-5

(f)由相對論都卜勒頻移的公式，可得

$$\frac{\lambda_{1,2}}{\lambda_0}=\frac{1\mp\beta\cos\phi}{\sqrt{1-\beta^2}} \qquad (27)$$

$$\Rightarrow\frac{\lambda_1+\lambda_2}{\lambda_0}=\frac{2}{\sqrt{1-\beta^2}}$$

$$\Rightarrow\beta=\sqrt{1-\frac{4\lambda_0^2}{(\lambda_1+\lambda_2)^2}} \qquad (28)$$

$\Rightarrow\alpha=4$

由(13)、(14)、和(28)三個方程式聯立，可解得三個未知數 β、ϕ、和 R。例如從(28)式中可計算出 β，將之代入(14)式可解得 ϕ，然後從(13)式中可得出 R。按此方法，只要知道 ω_1和ω_2，則從都卜勒效應所偏移的波長測量中，便可估計出輻射源的距離。

第三題評分標準

(a) 2.0 分	從試題之圖 3-1 中利用直尺，讀出長度 x_1 和 x_2，轉換成弧秒所得的角度 θ_1和 θ_2，其多數數據和參考答案表列數值相較，其差值在+/-0.013as 以內者。(每一個角度配分 0.25 分，共 2× 0.25 分=0.5 分。) 【註】如果多數數據偏離上述的誤差範圍，但仍在+/-0.026as 以內者，則得 2× 0.1=0.2 分。	0.5 分
	清楚地繪出 θ_1和 θ_2對 t 的關係圖線，即答案之圖 3-1，標出所有的數據點。(每一圖線配分 0.15 分，共 2× 0.15 分=0.3 分。) 【註】有繪圖，但未完整，給 0.1 分。	0.3 分
	從圖線中定出ω_1和ω_2，及 v_1' 和 v_2' ：	
	ω_1 值在(16.5 至 17.5)mas/d 之間； 在(16.0 至 16.5)mas/d 或(17.5 至 18.0)mas/d 之間； 在以上範圍之外。	0.4 分 0.2 分 0 分
	ω_2 值在(8.2 至 9.2)mas/d 之間； 在(7.7 至 8.2)mas/d 或(9.2 至 9.7)mas/d 之間； 在以上範圍之外。	0.4 分 0.2 分 0 分
	$v'_{1\perp}$ 值在(1.16 至 1.30)c 之間； 在以上範圍之外。	0.2 分 0 分
	$v'_{2\perp}$ 值在(0.56 至 0.70)c 之間； 在以上範圍之外。	0.2 分 0 分
(b) 3.0 分	得出相當於答案之圖 3-2 和(5)式的解。	0.5 分
	推論出(6)式。	0.5 分
	得出(7)式。	0.5 分
	得出(8)式。	0.5 分
	得出(9)式。	0.5 分
	得出(10)式。	0.5 分

（c）1.0 分	得出相當於答案之圖 3-3 和(11)及(12)式的解。	0.2 分
	推論出(13)式。	0.2 分
	推論出(14)式。	0.2 分
	數值解：	
	ϕ 值在 67° 至 71° 之間； 在上述範圍之外。	0.2 分 0 分
	β 值在 0.81 至 0.97 之間； 在上述範圍之外。	0.2 分 0 分
（d）2.0 分	正確寫出(15)式或相當的方程式	0.2 分
	演算出(17)式或相當的方程式。	0.8 分
	正確推論出具有物理意義的 (β,ϕ) 區域。	0.2 分
	繪出答案之圖 3-4。	0.8 分
（e）1.0 分	微分(9)式，求出極值。	0.4 分
	寫出(9)式的二次導數，證明為極大值。	0.3 分
	寫出(25)式。	0.3 分
（f）1.0 分	導出(28)式，得出 α 值。	1.0 分

小小科玩

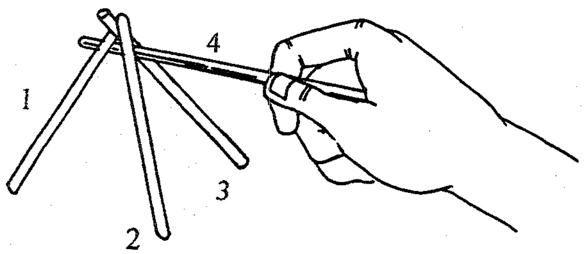
舉一挑三

（參考解答，題在本期第 6 頁）

蕭次融

步驟：

1. 如圖 C 手持另一段的竹筷子（圖 C 中的 4），從圖 B 中的 2 與 3 之間伸進三腳架，觸及三腳架的頂端 1、2、3 三股後，輕輕稍微上舉使 3 與 1 、2 分開，並且使 3 落在 4 之上後，往下移動，此時 4 之左側輕輕推移 1、2，使 3 在 1、2 之下如圖 D，則 4 可舉起三腳架離開桌面。
2. 用與步驟 1 相反的操作方式，即可將三腳架安放於桌上。



(D)