圓的尺規作圖系列探討

鄭再添
國立臺灣師大附中

緒 言

(1)圓與直線是人類文明的表徵

回想起孩提時光，在北台灣臨海的一個小鄉鎮－金山，筆者常和先祖父（我的數學啓蒙教育者，從小教我打算盤、背九九乘法表）迎著晨曦到海邊看日出；一輪火紅的大圓盤自海天一線下方冉冉昇起，天空中朵朵幻化的雲彩，海面上起伏不定的波浪，相互暉映著瞬息萬變的金黃霞光，不禁引發無限的思親及念鄉之情。臆想人類最早認識“圓”及“直線”這兩種號稱最簡單而又最完美的幾何圖形（參見[3]P.37）之初，是否正如筆者兒時憶往般的感人心弦?!

何僅止於自然界，直線和圓更是人類文明的一種重要表徵。當你抓住一條繩子的兩端，用點力把它撐緊，擺在眼前的就是直線的一段；如果繩子的一端綁上石子之類重物，使力甩動重物讓它繞著一定點旋轉，就可以得到一個圓形的運動軌跡了！由直線和圓所搭配建構出的多采繽紛的幾何世界，更是不勝枚舉。這從一些交通標誌、國旗上的青天白日徽，或市面的許多商標圖案設計都可獲致印證。

(2)尺規作圖的沿革概述

直尺和圓規是人類製造用來畫直線與圓的作圖工具。關於尺規作圖的相關規定,可以遠溯自二千多年前幾何學興盛的古希臘時期。最先明確提出限定直尺、圓規爲合法作圖工具的，可能是思諾皮德斯（Oenopides，約 465B.C.），經過柏拉圖(Plato, 427-347?B.C.)的大力提倡，而由歐幾里得(Euclid 450-380 B.C.)總結，形成金科玉律般的地位（參見[2]，P.44）。在歐幾里得的《幾何原本》裡即有如下的規定（參見[4]，P.20～22）:

直尺的用法－經過已知兩點連一直線；或無限制地延長一直線。

圓規的用法－以任意一點爲中心，過其他任意一點畫一個圓。

古希臘人所謂的直尺，是沒有刻度的。由於因地區風俗習性的差異，度量單位極不易統一；再加上希臘的幾何學者重於演繹推理，自然不需要直尺上的刻度。至於圓規，在後來的幾何書上，一般都規定爲：以任意一點爲中心（即圓心），任意給定的長爲半徑，畫一個圓或一段弧。作圖時，不能把直與圓規合併使用，也不能無限次地使用下去。這些都是必須遵守的規定，被稱爲“尺規作圖公法”。

(3)阿波羅尼(Apollonius 262-190 B.C.)問題

與圓有關的尺規作圖難題可說是五花八門、不勝枚舉的，像"化圓爲方"那樣高知名度的只是其中之一。據說，連威震歐洲的法國名將拿破崙也常沉迷於尺規作圖的樂趣中（參見[3]，P.63），還曾出了一道題向全法國的數學家挑戰："只准使用圓規如何可將一已知圓心的圓周四等分？"而本文所要討論的，著眼在給定一些已知點，或線段、直線，或已知圓的情況下，如何利用尺規作圖畫出欲求的圓來。古希臘幾何學家阿波羅尼在他的著作《On Contacts》裡，即曾提過此類相關的問題（參見[11]，P.99）：**已知任意三點、直線或圓或它們三個之任意組合，作一圓過已知點，且與已知直線及圓相切。**這一系列饒富趣味而變化莫測的問題，在圓內所圈住的，似乎盡是一個個的謎。

阿波羅尼問題的處理方式是可選擇的。用解析幾何的觀點來看，在三個圓的二次方程間求取一個與彼等相切的圓半徑及圓心位置，其處理過程中所需用到的僅有理運算及平方根（參見[5]，P.107～109），因此可知問題解答的存在性與可尺規作圖都是毋庸置疑的（參見[10]，P.89～90）；透過反演變換(inversion)的應用，也可以圓滿解決阿波羅尼問題（參見[5]，P.139～140）。許多數學家都曾爲此提供過解答（參見[11]，P.99），其中包括維塔（Francois Vieta 1540-1603，將《On Contacts》內容加以重寫者）及牛頓(Isaac Newton 1643-1727)在內。筆者未曾在相關文獻上進一步深究，惟因其尺規作圖的處理方式對中學師生的教與學上有一定的助益，卻又不易得閱這類文獻。本文欲就此做一層次漸進的系列探討，提供大家參考及指引。並順此就教於學界賢達，懇請不吝斧正。

本 文

圓的要素有二：圓心決定圓的位置，半徑則掌控圓的大小。因此，一切有關畫圓的作圖問題，不外乎如何尋求其圓心及半徑。而阿波羅尼問題欲求之圓與已知直線、已知圓間都是相切的關係，是故在確定圓心位置後，由連心線長等於兩半徑的和或差的密切關聯知，其所求半徑亦將隨之確定，解題的重心自然而然的放在圓心位置的決定上。這個認知有助於我們掌握問題的核心。

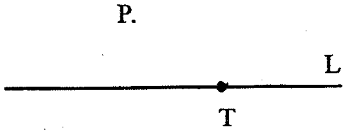
就阿波羅尼問題看來，在點、直線、及圓中可重複選取三個的任意組合總數爲 $H_3^3 = C_3^5 = \dfrac{5\times4\times3}{3\times2\times1} = 10$，故問題的條件共有十類：①一點一直線一圓②二點一直線③二點一圓④二直線一點⑤二直線一圓⑥二圓一點⑦二圓一直線⑧三點⑨三直線⑩三圓。但若指定已知直線或圓上一點爲切點時，可取代條件之一；又當問題給定欲求圓之半徑時，亦可取代其一，相關問題也因此衍生出更多的題型來。本文大致依此分門別類、由簡入繁

概述於下。每一題型在作法之前先行解析，讓問題與解法間有一脈絡可尋；在作法之後再加點必要的討論，以補足作法中未盡之處。

〔題型一〕

已知：一直線 L 上一點 T，L 線外一點 P。

求作：過 P 作一圓與 L 相切於 T。

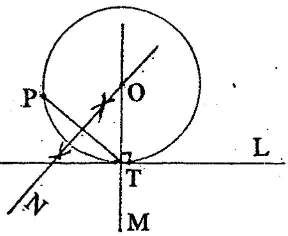


解析：因 T 爲切點，故圓心必在以 T 爲垂足的 L 的垂線上；又 $\overline{PT}$ 爲一弦，故圓心又在 $\overline{PT}$ 中垂線上。由上二直線交點即得圓心。

作法：1.過 T 作一直線 M⊥L。

2.連 $\overline{PT}$，作中垂線 N，與 M 交於 O。

3.以 O 爲圓心，$\overline{OT}$ 爲半徑畫圓即爲所求。



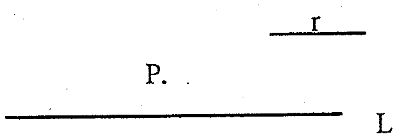
討論：1.本題恰有一解；

2.若 $\overline{PT}$ ⊥L，則 $\overline{PT}$ 之中點即所求之圓心。

〔題型二〕

已知：一直線 L 外一點 P，一線段長 r

求作：以 r 爲半徑過 P 作一圓與 L 相切

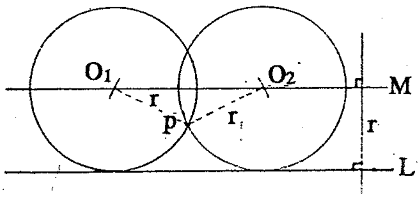


解析：圓心與直線 L 的距離爲 r，可作一平行於 L 且距 L 爲 r 之線；又 P 在圓上，故 P 到圓心之距亦爲 r。

作法：1.作一直線 M//L 與 L 相距 r

2.以 P 爲圓心，r 爲半徑畫弧，與 M 交於 O_1、O_2

3.分別以 O_1、O_2 爲圓心，r 爲半徑畫圓皆爲所求。

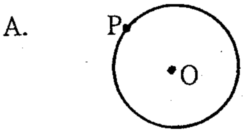


討論：本題一般而言可有二解；若步驟 2 無法產生交點，即 P 距 M 大於 r，則無解。當然，M 與 P 須在 L 的同側。

〔題型三〕(參見[7]，P.4)

已知：圓 O 上一點 P，圓外一定點 A

求作：過 A 作一圓與圓 O 相切於 P

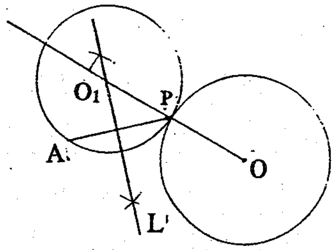


解析：切點 P 必在連心線上，故 $\overleftrightarrow{OP}$ 過欲求之圓心；又 $\overline{AP}$ 爲一弦，故 $\overline{AP}$ 之中垂線亦過此圓心；因而上二直線交點即圓心所在。

作法：1.連 $\overleftrightarrow{OP}$

2.作 $\overline{AP}$ 之中垂線 L 交 $\overleftrightarrow{OP}$ 於 O_1

3.以 O_1 爲圓心，$\overline{O_1P}$ 爲半徑畫圓即所求。



討論：1.若 O-P-A 成一直線，則以 $\overline{PA}$ 爲直徑作圓即可；

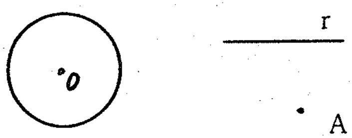
2.若 $\angle OPA=90^\circ$，則 L// $\overleftrightarrow{OP}$，圓蛻變爲過 P 的切線；

3.當 $\angle OPA<90^\circ$，兩圓爲內切；$\angle OPA>90^\circ$ 則兩圓外切。

〔題型四〕

已知：圓 O 及圓外一點 A，一線段長 r

求作：以 r 爲半徑過 A 作一圓與圓 O 相切



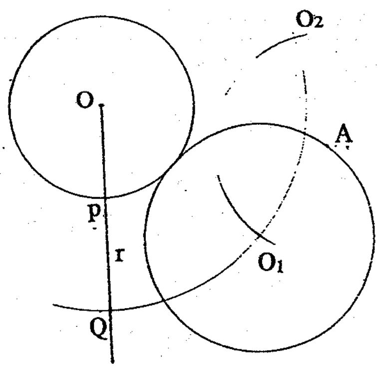
解析：兩圓相切的連心線長爲兩圓半徑的和（或差），故圓心在以半徑和（或差）爲半徑的圓 O 的同心圓上；又 A 在所求圓上，故可以 A 爲圓心，r 爲半徑與上述圓 O 相交來決定圓心位置。

作法：1.任作一射線 $\overrightarrow{OP}$，設與圓 O 交於 P，在直線 OP 上取一點 Q，使 $\overline{PQ}=r$；

2.以 O 爲圓心，$\overline{OQ}$ 爲半徑畫弧；

3.以 A 爲圓心，r 爲半徑畫弧，交上弧於 O_1；

4.以 O_1 爲圓心，r 爲半徑畫圓即爲所求。



討論：1.上述作法以兩圓外切爲例，故取 $\overline{OQ}=r+\overline{OP}$；若欲作兩圓內切情形（必須 $r>\overline{OP}$），應取 $\overline{OQ}=r-\overline{OP}$。

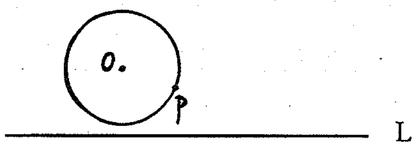
2.上述作法可得二解，另一兩弧交點 O_2 亦可爲圓心作一外切圓。

3.外切圓個數與內切圓個數全視步驟 3 之兩弧交點數決定。當 $\overline{OA}>2r+\overline{OP}$ 時，因兩弧不相交，故所求圓無解；又外切與內切可以並存，故至多有四解。

〔題型五〕

已知：圓 O 上一點 P，圓外一直線 L

求作：過 P 作一圓同時與圓 O 及 L 相切



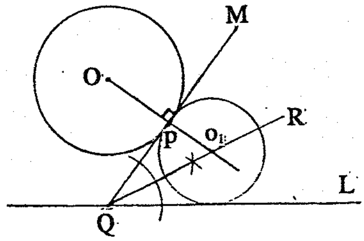
解析：如同題型三，$\overleftrightarrow{OP}$ 過欲求之圓心；若過 P 作圓 O 之切線，則得一兩圓公切線；如此則欲求之圓有兩條切線成已知，故可作兩切線所成之角的平分線，它亦通過圓心；因此由它與 $\overleftrightarrow{OP}$ 之交點即得圓心。

作法：1.連 $\overleftrightarrow{OP}$

2.過 P 作一直線 $M \perp \overleftrightarrow{OP}$，與 L 交於 Q 點；

3.作 $\angle Q$ 的平分線 $\overleftrightarrow{QR}$ 交 $\overleftrightarrow{OP}$ 於 O_1；

4.以 O_1 爲圓心，$\overline{O_1P}$ 爲半徑畫圓即所求。



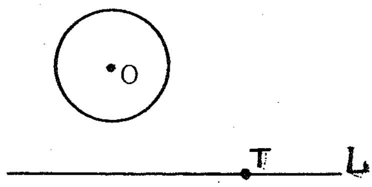
討論：1.若 $\overleftrightarrow{OP} \perp L$，即 M//L，則以 P 至 L 之距爲直徑作圓即可。此時恰有一解，P 在 O、L 之間則兩圓外切，O 在 P、L 之間則兩圓內切。

2.除上述者外，一般而言有二解。$\angle Q$ 之平分線交 $\overleftrightarrow{OP}$ 於 O_1，當 O_1 與 O 在 P 之異側則得外切之圓，在同側則得內切之圓。(圖中未畫出內切之圓)

〔題型六〕

已知：圓 O 及圓外一直線 L 上一定點 T

求作：過 T 作一圓同時與 L 及圓 O 相切



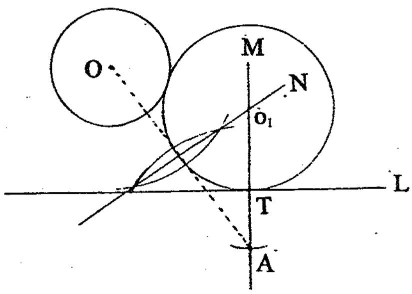
解析：如同題型一，圓心必在過 T 的 L 的垂線上；因欲求之圓心離 O 點兩半徑和之遠，而離 T 點一半徑遠，故可在垂線上取一個距 L 爲圓 O 半徑長的點，再仿題型一作中垂線即可得解。

作法：1.過 T 作一直線 $M \perp L$

2.在 M 上取 $\overline{TA}$=圓 O 半徑長

3.作 $\overline{OA}$ 的中垂線 N 交 M 於 O_1

4.以 O_1 爲圓心，$\overline{O_1T}$ 爲半徑畫圓即所求。



討論：1.若步驟 2 所取之 A 與圓 O 在 L 線的同側，即 $\overline{O_1A}$ 爲兩半徑之差，則作出之圓與圓 O 爲內切關係。一般而言，可同時作出兩圓；其一與圓 O 內切，另一與圓 O 外切。

2.類似於上一題型，若 M 過 O 點，即 N//L，則以 T 至圓 O 之最短距爲直徑畫圓得外切者，以最長距畫圓再得一內切者。

(待 續)