教育部八十七學年度高級中學數學競賽決賽成績報告與試題解答

朱亮儒 楊青育 王文光 李秀章
國立臺灣師範大學 數學系

教育部主辦全國高中數學競賽，不僅是一項數學能力競賽，其目的是希望能藉由校際活動，訓練學生的人格修養，提高學生對數學問題研究的興趣，激發其獨立思考的能力，藉以鼓勵學生間與校際間的互相觀摩，提升數學教育的品質。這項活動在每年的元月份舉行，分別由國立臺灣師範大學、高雄師範大學及彰化師範大學輪流承辦，本年度是由國立臺灣師範大學數學系承辦。參加對象是由全國九個地區複賽中選拔出優勝學生代表參加，本次報名參賽學生分別來自：臺灣省 34 人，台北市 11 人，高雄市 5 人，國立金門高中與馬祖高中各 1 名參加，另加 1 名國際奧林匹亞國手，共計 53 人；其中新竹高中兩位學生因故無法參加，故實際參賽的學生人數僅有 51 人。本次競賽活動自八十八年一月二日至六日假國立臺灣師範大學理學院數學系舉行，這項競賽可說是我國下次國際數學奧林匹亞(IMO)代表隊選拔的前哨戰。競賽的內容相當充實豐富，有筆試、口試、獨立研究、專題探討、技能專題、參觀活動、歡迎晚會、影片欣賞、聯誼會餐、成果評鑑等活動。成績優勝者由教育部發給獎狀及獎學金，獲得前三等獎之 20 位同學得由就讀學校推薦參加數學及自然學科資賦優異的資優生保送升學甄試，其指導教師由主管教育行政機關給予獎勵。成績特優者得經評審委員會推薦參加亞太數學奧林匹亞(APMO)研習營（八十八年三月五日至八日）。本次競賽的成績評分是依據筆試(一)占 35%，筆試(二)占 35%，口試(一)占 20%，及口試(二)占 10%的總分來評定名次。學生獨立研究的部分不計成績，但可供評審委員評比名次之參考或供推薦參加 1999 亞太數學奧林匹亞研習營之依據或供頒發解題特別獎狀之參考。經過爲期五天的競賽活動，成績揭曉由北一女中葉書蘋及建國高中鄧敦民獲得第一等獎及各得壹萬伍仟元獎學金，台中一中林宗茂等八位同學榮獲第二等獎及各得壹萬元獎學金，正心高中高小雯等十位同學獲得第三等獎及各得捌仟元獎學金，其他三十一位參賽學生均獲入選獎及各得伍仟元獎學金。除了獲前三等獎的同學外，武陵高中王嘉慶、港明高中楊宗翰及建國高中翁竟智三位同學也獲得評審委員的推薦參加亞太數學奧林匹亞研習營。此外，建國高中李國禎、柏盛峰及翁竟智三位同學因獨立研究的成績優異而獲頒解題特別獎。本文的目的在於針對這次競賽的試題提供參考解答，且就所有參賽的五十一位學生答題概況加以比較，統計與評析，以供國內相關學者專家、數學教師等輔導數學資

優生之研究、應用與參考。

一、參賽學生成績統計分析表

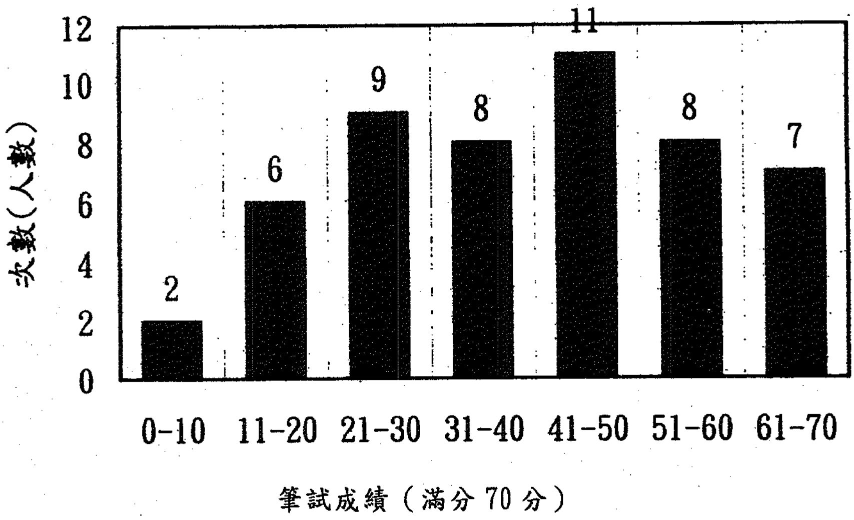
表 1　全部參賽學生筆試成績統計表（總人數 51 人）

題　號	平　均	得分率	標準差
Q1	20.3	0.58	13.8
Q2	21.4	0.61	16
Q3	25.5	0.73	13.5
Q4	27.8	0.79	12.9
Q5	13.4	0.38	16.1
Q6	7.57	0.22	9.47
總　分	38.67	0.55	16.59

表 2　前三等獎學生筆試成績統計表（總人數 20 人）

題　號	平　均	得分率	標準差
Q1	30.3	0.87	10.1
Q2	31.3	0.89	10.4
Q3	30.6	0.87	8.95
Q4	34.4	0.98	1.53
Q5	27.2	0.78	13.2
Q6	11.1	0.32	12.4
總　分	54.89	0.79	7.81

表 3　全部參賽學生筆試成績次數分配表（總人數 51 人）



全部參賽學生獨立研究成績統計表（總人數 51 人）

題　號	平　均	得分率	標準差
Q1	4.71	0.67	3.12
Q2	1.39	0.20	1.96
Q3	5.57	0.80	2.04
Q4	4.16	0.59	2.55
Q5	2.14	0.31	2.62
Q6	3.47	0.50	3.05
Q7	6.35	0.91	1.53
Q8	1.92	0.27	2.63
總分	29.71	0.53	11.2

教育部八十七學年度高級中學數學競賽決賽成績

編　號	姓　名	性別	年級	就讀學校	指導老師	獲獎等級
87M23	葉書蘋	女	三	北一女中	李政貴	第一等獎
87M21	鄧敦民	男	三	建國高中	曾政清	第一等獎
87M29	林宗茂	男	三	台中一中	翁玉忠	第二等獎
87M35	蕭雅澤	男	二	台中一中	賴瑞楓	第二等獎
87M26	黃世昌	男	三	武陵高中	盧澄根	第二等獎
87M43	劉任浩	男	二	武陵高中	許桂淋	第二等獎
87M13	林志遠	男	二	台中一中	賴瑞楓	第二等獎
87M10	王泓民	男	三	台南一中	朱國頌	第二等獎
87M17	何思賢	男	一	高師附中	吳吉昌	第二等獎
87M02	蔡旭程	男	三	建國高中	林礽堂	第二等獎
87M19	高小雯	女	三	正心高中	區明清	第三等獎
87M14	蔡政育	男	三	台中一中	林福男	第三等獎
87M11	李國禎	男	三	建國高中	徐正梅	第三等獎
87M34	柏盛峰	男	一	建國高中	毛延宗	第三等獎
87M45	郭明杰	男	三	嘉義高中	林德煜	第三等獎
87M03	朱安強	男	三	彰化高中	王聖輝	第三等獎
87M49	王堯生	男	三	台南一中	朱國頌	第三等獎
87M51	劉育廷	男	三	台南一中	朱國頌	第三等獎
87M12	劉俊緯	男	三	台中一中	翁玉忠	第三等獎
87M28	陳彥年	男	三	嘉義高中	林德煜	第三等獎
87M16	王嘉慶	男	二	武陵高中	許桂淋	入選獎
87M36	楊宗翰	男	三	港明中學	姚智化	入選獎
87M38	陳振模	男	三	成功高中	游經祥	入選獎

教育部八十七學年度高級中學數學競賽決賽成績（續）

編　號	姓　名	性別	年級	就讀學校	指導老師	獲獎等級
87M48	蔡易達	男	三	高雄中學	洪仁典	入選獎
87M06	蔡宗霖	男	二	台南一中	林坤宏	入選獎
87M20	翁竟智	男	二	建國高中	游森棚	入選獎
87M07	謝佩君	女	三	台南女中	李正雄	入選獎
87M41	梁翰之	男	三	復興高中	張黎明	入選獎
87M46	蔡孟根	男	二	高雄中學	蘇源森	入選獎
87M40	蔡明謙	男	三	前鎮高中	劉月真	入選獎
87M24	朱馥鈺	女	二	興國中學	周益在	入選獎
87M08	邱立權	男	二	台南一中	林坤宏	入選獎
87M27	葉建宏	男	三	豐原高中	江孟書	入選獎
87M31	程世嘉	男	三	松山高中	郭燿昇	入選獎
87M47	陳昭宇	男	三	嘉義高中	林德煜	入選獎
87M53	鄭宇倫	男	二	嘉義高中	吳昕昇	入選獎
87M37	楊尚穎	男	三	新店高中	戴進煌	入選獎
87M05	洪瑜隆	男	三	基隆高中	洪家斌	入選獎
87M52	陳泊寧	男	一	師大附中	李善文	入選獎
87M01	蔡富評	男	三	鳳和中學	陳茂雄	入選獎
87M42	張翔至	男	三	羅東高中	賴順基	入選獎
87M04	吳樹恆	男	三	板橋高中	趙健雄	入選獎
87M30	施純儒	男	三	彰化高中	陳永和	入選獎
87M18	吳培甄	女	三	北一女中	李政貴	入選獎
87M39	陳卓昌	男	三	金門高中	許清土	入選獎
87M22	黃博翔	男	三	花蓮高中	黃正義	入選獎
87M25	許本源	男	二	格致高中	高滌生	入選獎
87M33	蘇郁如	女	三	屏東女中	陳哲成	入選獎
87M15	鄭　晴	女	二	正義高中	周宗榮	入選獎
87M50	黃中仁	男	三	馬祖高中	王連發	入選獎
87M09	侯奕宏	男	二	高雄中學	陳恒東	入選獎
87M32	王奐之	男	三	新竹高中	陳柏勳	缺　賽
87M44	潘佳恩	男	三	新竹高中	陳柏勳	缺　賽

二、筆試獨立研究及口試試題

教 育 部 八十七 學 年 度 高 級 中 學
數學競賽決賽筆試試題(一)

編號: ____________

注意事項:

1. 本試卷共三題計算證明題,每題35分.
2. 考試時間: 2小時.
3. 計算紙必須連同答案卷交回.
4. 不可使用計算器.
5. 請將答案寫在答案卷內.

問題一.試確定所有的正質數p,使得$\frac{p(p+1)+2}{2}$爲完全平方數.

問題二.給定一圓,其圓心爲O,設點A與B在此圓的內部,且$\overline{AB}$的中點是O.對於在此圓上但不在直線AB上的任意點M,作矩形$MAQP$使得直線MQ通過O.試證: $\overline{PA}+\overline{PB}$爲定值(即與$M$點的位置無關).

問題三.在一個八位數中,若每一出現的數字都至少出現三次,就稱這種八位數是一個"好數".例如: 11111111和98889898都是好數,但11221111和23244442都不是好數.試問有多少個八位數是好數?

教 育 部 八十七 學 年 度 高 級 中 學
數學競賽決賽筆試試題(二)

編號: ____________

注意事項:

1. 本試卷共三題計算證明題,每題35分.
2. 考試時間: 2小時.
3. 計算紙必須連同答案卷交回.
4. 不可使用計算器.
5. 請將答案寫在答案卷內.

問題四.在ΔABC中,D爲$\overline{AB}$的中點,E在$\overline{BC}$邊上,且$\overline{CE}=\frac{1}{3}\overline{BC}$.若$\angle ADC=\angle BAE$,試求$\sin\angle BAC$之值.

問題五.設a,b,c都是正數,試證:

$$\frac{a}{b+c}+\frac{4b}{c+a}+\frac{9c}{a+b}>4.$$

問題六.試求滿足下列聯立方程組的所有實數解$(x_1,x_2,x_3,x_4,x_5,x_6)$:

$$\begin{cases}(x_3+x_4+x_5+x_6)^5=4x_1+4\\(x_4+x_5+x_6+x_1)^5=4x_2-4\\(x_5+x_6+x_1+x_2)^5=4x_3+4\\(x_6+x_1+x_2+x_3)^5=4x_4-4\\(x_1+x_2+x_3+x_4)^5=4x_5+4\\(x_2+x_3+x_4+x_5)^5=4x_6-4\end{cases}$$

教 育 部 八十七 學 年 度 高 級 中 學
數學競賽決賽獨立研究試題

問題1.已知$a_1=88,a_2=1999$,且當$n\geq 1$時,a_{n+2}表示$3a_n+2a_{n+1}$除以100之後所得的餘數.試確定

$$\sum_{k=88}^{1999}a_k^2=a_{88}^2+a_{89}^2+\cdots+a_{1999}^2$$

除以8之後所得的餘數.

問題2.設$ABCD$是以O爲圓心,r爲半徑的圓內接四邊形.設對邊BA及CD的延長線交於E,而DA及CB的延長線交於F.試證:

$$r=\sqrt{\frac{OE^2+OF^2-EF^2}{2}}.$$

問題3.哈雷在他的好朋友牛頓的協助下,成功的計算出一顆彗星(就是有名的哈雷彗星)會於西元1758年光臨地球,而且這是那世紀唯一的一次光臨,同時他們也計算出十九世紀這顆彗星僅光臨地球一次.事實上,中國的天文學家早已注意哈雷彗星很久,翻開歷史記錄得知:此顆彗星在第十四及第十七世紀時,分別光臨地球兩次;但是在第十一及第十二世紀時,哈雷彗星分別僅光臨地球一次而已.請你根據這些資料,算出哈雷彗星的週期.(註明:哈雷彗星的週期剛好是整數年,第十一世紀是指西元1000年至西元1099年)

問題4.設a,b,c都是正數,且$a+b+c>3\sqrt{2}+\sqrt{6}$.試證:隨意將邊長各爲a,b,c的三個正三角形放入一個邊長1的正12邊形中,則必有兩個正三角形會有重疊的部分.

問題5. 設n是一給定的正整數. 試問滿足下列方程式

$$\frac{1}{n}=\frac{1}{a}-\frac{1}{b}$$

的正整數解(a,b)有多少組?

問題6. 設數列$\langle a_n\rangle$滿足$a_0=1999$, 且

$$a_n^2=a_{n+1}(a_n+1),\ \forall\ n=0,1,2,\cdots.$$

試證:

$$[a_n]=1999-n,\ \forall\ n=0,1,2,\cdots,1000,$$

其中$[x]$表示不大於x的最大整數.

問題7. 試求所有的正整數m,n使得

$$(m+n)^m=n^m+117\ .$$

問題8. 設$V_1V_2V_3V_4V_5$爲凸五邊形, O爲內部一點. 對每一個i, 令Z_i爲直線$V_{i-1}V_i$與$V_{i+1}V_{i+2}$的交點, 且令$\overline{OZ_i}$與$\overline{V_iV}_{i+1}$相交於W_i (其中$V_0\equiv V_5, V_1\equiv V_6, V_2\equiv V_7$). 試證:

$$\frac{\overline{V_1W_1}}{\overline{W_1V_2}}\cdot\frac{\overline{V_2W_2}}{\overline{W_2V_3}}\cdot\frac{\overline{V_3W_3}}{\overline{W_3V_4}}\cdot\frac{\overline{V_4W_4}}{\overline{W_4V_5}}\cdot\frac{\overline{V_5W_5}}{\overline{W_5V_1}}=1\ .$$

教 育 部 八十七 學 年 度 高 級 中 學
數學競賽決賽口試試題

試題一. 設P是ΔABC外接圓上的一點, 從P到直線BC, CA, AB的垂足分別爲D, E, F. 若$\overline{DE}=\overline{EF}$, 試證:

$$\frac{\overline{AP}}{\overline{PC}}=\frac{\overline{AB}}{\overline{BC}}.$$

試題二. 設n是大於1的奇數, 且$S(n)$表示n的所有正因數之和. 試證:

$$S(n)<n\sqrt[3]{n}.$$

三、筆試獨立研究及口試試題參考解答

[筆試問題一解答]:設 $\frac{p(p+1)+2}{2}=k^2$,其中 k 為大於1的正整數.則

$$p(p+1)=2k^2-2=2(k-1)(k+1).$$

因為 p 是質數,得 $p=2$,或 $p\mid k-1$,或 $p\mid k+1$.

(1) 當 $p=2$ 時,得 $k=2$.

(2) 當 $p\mid k-1$ 時,得 $k-1\geq p$.因此,

$$p(p+1)\leq(k-1)k<2(k-1)(k+1)=p(p+1)\quad 矛盾 \ !$$

(3) 當 $p\mid k+1$ 時,得 $k+1\geq p$.因此,

$$2(k-1)(k+1)=p(p+1)\leq(k+1)(k+2).$$

從而得 $k\leq 4$.再由 p 與 k 的關係,可得 $p=5$,而 $k=4$.

因此,所求 $p=2$ 或5.

[筆試問題二證明]:因為 O 與 A 都在圓 O 的內部,故以 OA 為直徑的圓不會通過圓 O 上的點 M.於是, MO 與 MA 不垂直.過 A 作 MA 的垂線,設與直線 MO 交於一點 Q,由此可作出矩形 $MAQP$.

設圓 O 過點 M 的直徑為 MN,且射線 MA, MP 分別與圓 O 交於另一點 N', M',則 $\angle MM'N=\angle MN'N=90^o$.因為 $\angle M'MN'=90^o$,故 $\angle M'NN'=90^o$,得知 $MN'NM'$ 為一矩形.因為圓心 O 是對角線 MN 的中點,故點 O 在另一對角線 $M'N'$ 上,亦即 $M'N'$ 也是圓 O 的一直徑.因為點 A 在邊 MN' 上,故點 A 對圓心 O 的對稱點 B 必在邊 $M'N$ 上.因為

$$\frac{MP}{MM'}=\frac{PQ}{M'N}=\frac{MA}{MN'},$$

故 PA 與 $M'N'$ 平行,而且

$$\frac{PA}{MN}=\frac{PA}{M'N'}=\frac{MP}{MM'}.$$

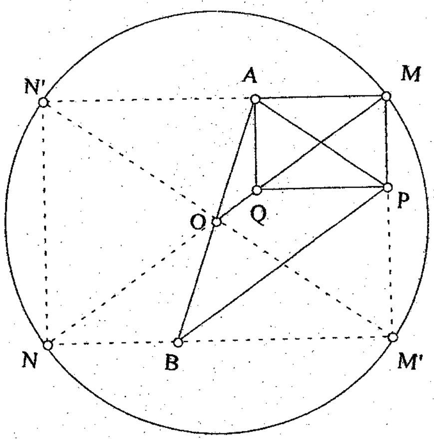
另一方面,因為 $MA=NB$,故

$$\frac{MP}{MM'}=\frac{MA}{MN'}=\frac{NB}{M'N},$$

於是, PB 與 MN 平行,而且

$$\frac{PB}{MN}=\frac{PM'}{MM'}=1-\frac{MP}{MM'}=1-\frac{PA}{MN}.$$

由此可知, $PA+PB=MN=$圓O的直徑,此值爲定值.



[筆試問題三解答]:顯然,八個數字都相同的好數有9個,即

$$11111111, 22222222, 33333333, \cdots\cdots, 99999999.$$

而其他的好數只有以下兩類,且都恰由兩種數字組成:

(1)一種數字出現3次,另一種數字出現5次:共有好數之個數(包含首位數爲0的'好'數)

$$\binom{8}{3}\cdot 10\cdot 9=5040.$$

(2)兩種數字都出現4次:共有好數之個數(含首位數爲0的'好'數)

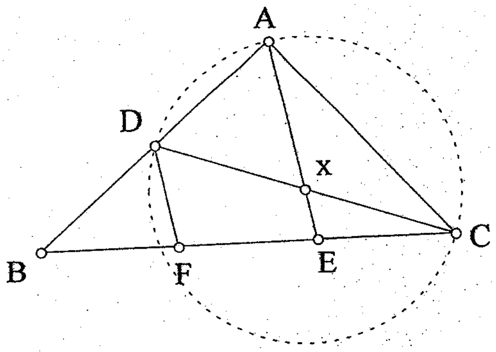
$$\binom{8}{4}\cdot\frac{10\cdot 9}{2}=3150.$$

又首位數爲0的'好'數(此種數不能算是八位數)之個數有

$$\left[\binom{7}{2}+\binom{7}{3}+\binom{7}{4}\right]\cdot 9=819.$$

故所求好數有$9+5040+3150-819=7380$個.

[問題四解答]:令AE與CD相交於X.過D作AE的平行線DF,交BC於F,則F爲BE的中點.因DF與AE平行,且E爲CF的中點,故X爲CD的中點.因$\angle ADC=\angle BAE$,故$AX=DX$.於是,由$AX=DX=CX$,可知X爲ΔDAC外接圓的圓心,得$\angle DAC=90^o$.於是, $\sin\angle BAC=1$.



[筆試問題五證明]:令 $s=a+b+c$,則

$$\begin{aligned} & \frac{a}{b+c}+\frac{4b}{c+a}+\frac{9c}{a+b} \\ = & \frac{s-b-c}{b+c}+\frac{4(s-c-a)}{c+a}+\frac{9(s-a-b)}{a+b} \\ = & s\left[\frac{1}{b+c}+\frac{4}{c+a}+\frac{9}{a+b}\right]-(1+4+9) \\ = & \frac{1}{2}[(b+c)+(c+a)+(a+b)]\left[\frac{1}{b+c}+\frac{4}{c+a}+\frac{9}{a+b}\right]-14 \end{aligned}$$

$$=\frac{1}{2}\left[(\sqrt{b+c})^2+(\sqrt{c+a})^2+(\sqrt{a+b})^2\right]\left[\left(\frac{1}{\sqrt{b+c}}\right)^2+\left(\frac{2}{\sqrt{c+a}}\right)^2+\left(\frac{3}{\sqrt{a+b}}\right)^2\right]-14$$

$$\geq \frac{1}{2}(1+2+3)^2-14 = 18-14 = 4 .$$

上面的不等式是利用柯西不等式,而其等號成立的充要條件是

$$\frac{\sqrt{b+c}}{\frac{1}{\sqrt{b+c}}} = \frac{\sqrt{c+a}}{\frac{2}{\sqrt{c+a}}} = \frac{\sqrt{a+b}}{\frac{3}{\sqrt{a+b}}}$$

$$\Longleftrightarrow \quad \frac{b+c}{1}=\frac{c+a}{2}=\frac{a+b}{3} \Longleftrightarrow \quad a=2b,\ c=0.$$

但 c 爲正數,故等號不成立.

[筆試問題六解答]:令 $y_1 = x_1+1, y_2 = x_2-1, y_3 = x_3+1, y_4 = x_4-1, y_5 = x_5+1, y_6 = x_6-1$,得

$$\begin{cases} (y_3+y_4+y_5+y_6)^5=4y_1 & \cdots\cdots(1) \\ (y_4+y_5+y_6+y_1)^5=4y_2 & \cdots\cdots(2) \\ (y_5+y_6+y_1+y_2)^5=4y_3 & \cdots\cdots(3) \\ (y_6+y_1+y_2+y_3)^5=4y_4 & \cdots\cdots(4) \\ (y_1+y_2+y_3+y_4)^5=4y_5 & \cdots\cdots(5) \\ (y_2+y_3+y_4+y_5)^5=4y_6 & \cdots\cdots(6) \end{cases}$$

由對稱性,不妨設$y_1=\max\{y_i;\ i=1,2,3,4,5,6\}$.由(1)與(2)式得

$$(y_3+y_4+y_5+y_6)^5=4y_1\geq 4y_2=(y_4+y_5+y_6+y_1)^5.$$

因此,

$$y_3+y_4+y_5+y_6\geq y_4+y_5+y_6+y_1.$$

於是得$y_3\geq y_1$,故$y_3=y_1$.同理,由(3)與(4)式可推得$y_5\geq y_3$.於是, $y_1=y_3=y_5$.
又由(4)與(5)式得

$$(y_1+y_2+y_3+y_4)^5=4y_5=4y_1\geq 4y_4=(y_6+y_1+y_2+y_3)^5.$$

因此,

$$y_1+y_2+y_3+y_4\geq y_6+y_1+y_2+y_3.$$

於是得$y_4\geq y_6$.同理,由(2)與(3)式可推得$y_2\geq y_4$,故$y_2\geq y_4\geq y_6$.再由(2)與(6)式可推得$y_6\geq y_2$.於是, $y_2=y_4=y_6$.代入(1)與(2)式得

$$\begin{cases} 2^5(y_1+y_2)^5=4y_1 & \cdots\cdots(1') \\ 2^5(y_1+y_2)^5=4y_2 & \cdots\cdots(2') \end{cases}$$

故$y_1=y_2$.因此, $y_1=y_2=y_3=y_4=y_5=y_6$.代入(1)式得

$$4^5y_1^5=4y_1.$$

即

$$4y_1(4y_1-1)(4y_1+1)[(4y_1)^2+1]=0.$$

解得$y_1=0,\frac{1}{4}$,或$\frac{-1}{4}$.因此,所求的解 $(x_1,x_2,\cdots,x_6)=$

$$(-1,1,-1,1,-1,1),(\frac{-3}{4},\frac{5}{4},\frac{-3}{4},\frac{5}{4},\frac{-3}{4},\frac{5}{4}),(\frac{-5}{4},\frac{3}{4},\frac{-5}{4},\frac{3}{4},\frac{-5}{4},\frac{3}{4}).$$

以上各解代回原聯立方程組檢驗均成立.

[獨立研究問題1解答]:我們將用以下的事實:

$$(1)\ a\equiv b\ (mod\ 100)\Rightarrow a\equiv b\ (mod\ 4)$$

$$(2)\ a\equiv b\ (mod\ 4)\Rightarrow a^2\equiv b^2\ (mod\ 8).$$

首先求$a_k\equiv r_k\ (mod\ 4)$之規律:

$a_1 \equiv 0$，$a_2 \equiv 3$，$a_3 \equiv 2$，$a_4 \equiv 1$,
$a_5 \equiv 0$，$a_6 \equiv 3$，$a_7 \equiv 2$，$a_8 \equiv 1$,
$\cdots\cdots$
$a_{4n+1} \equiv 0,\ a_{4n+2} \equiv 3,\ a_{4n+3} \equiv 2,\ a_{4n+4} \equiv 1,$
$\cdots\cdots$

由以上的規律知

$$a_{4n+1}^2 \equiv 0\ ,\ a_{4n+2}^2 \equiv 1\ ,\ a_{4n+3}^2 \equiv 4\ ,\ a_{4n+4}^2 \equiv 1\quad (mod\ 8)$$

因此,

$$\sum_{k=88}^{1999} a_k^2 = (a_{88}^2 + a_{89}^2 + a_{90}^2 + a_{91}^2) + \cdots + (a_{1996}^2 + a_{1997}^2 + a_{1998}^2 + a_{1999}^2)$$
$$\equiv 6 + 6 + \cdots + 6 \equiv 6 \cdot 478 \equiv 4\ (mod\ 8).$$

[獨立研究問題2證明]:作ΔABF的外接圓,且設交EF於M.因為$\angle EMA = \angle FBA = \angle ADC$,所以$E, M, A, D$四點共圓.於是,由圓冪定理可知

$$FM \cdot FE = FA \cdot FD = OF^2 - r^2,$$

且

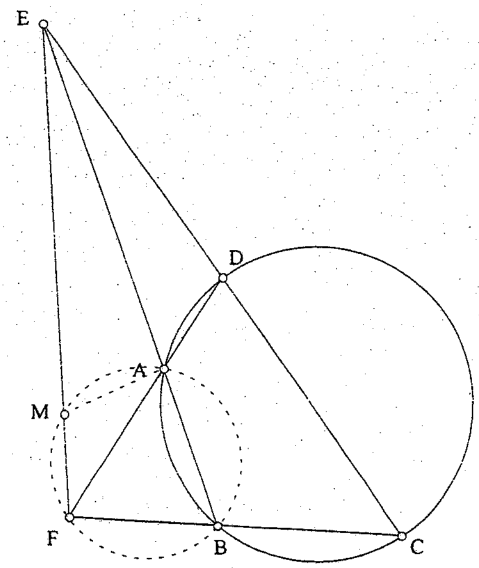
$$EM \cdot FE = EA \cdot EB = OE^2 - r^2.$$

兩式相加可得

$$EF^2 = EF \cdot (EM + FM) = OE^2 + OF^2 - 2r^2.$$

因此,

$$r = \sqrt{\frac{OE^2 + OF^2 - EF^2}{2}}.$$



[獨立研究問題3解答]:顯然,

$$\frac{1900-1758}{2}=71\leq \text{ 週期 } \leq 79=\frac{1758-1600}{2}.$$

(1)若週期爲77,78,79,則與14世紀出現2次矛盾!

(2)若週期爲74,75,則與11世紀出現1次矛盾!

(3)若週期爲71,72,73,則與12世紀出現1次矛盾!

所以,哈雷彗星的週期應爲76年

[獨立研究問題4證明]:首先由鴿籠原理知,三數a,b,c中必有兩數之和(設爲$a+b$)大於

$$\frac{2}{3}\cdot(3\sqrt{2}+\sqrt{6})=\frac{6\sqrt{2}+2\sqrt{6}}{3}.$$

又易知,邊長1的正12邊形之外接圓O半徑

$$r=\frac{1}{2\sin\frac{\pi}{12}}=\frac{2}{\sqrt{6}-\sqrt{2}}=\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{2}.$$

故

$$a+b>\frac{6\sqrt{2}+2\sqrt{6}}{3}=\frac{4\sqrt{3}r}{3}.$$

假設這兩個正三角形Δa與Δb不重疊,則必有一直線L將它們分離.設L_a,L_b爲外接圓O的兩條與直線L平行的切線,設其切點各爲A,B.則有

$$\frac{\sqrt{3}}{2}a=h_a\leq d(L,L_a) \quad \text{且} \quad \frac{\sqrt{3}}{2}b=h_b\leq d(L,L_b),$$

其中h_a與h_b分別表示Δa與Δb的高.於是

$$\frac{\sqrt{3}}{2}a+\frac{\sqrt{3}}{2}b\leq d(L,L_a)+d(L,L_b)=\overline{AB}=2r.$$

即

$$a+b\leq\frac{4\sqrt{3}r}{3}.$$

矛盾!故兩正三角形Δa與Δb會有重疊的部分.

[獨立研究問題5解答]:令$d(k)$表示k的正因數個數.若k是n^2的正因數且小於n,則$\frac{n^2}{k}$是n^2的正因數且大於n.於是,可知$d(n^2)$必爲一奇數.對於滿足條件的正整數解(a,b),顯然有$a<n$.因此,我們可令$a=n-k$且$b=l-n$,其中$1\leq k<n<l$.

則代入原式可得 $kl = n^2$. 因 $k < n$, 故 k 有 $\frac{d(n^2)-1}{2}$ 種可能的選法. 於是可知對應的正整數解 (a,b) 有 $\frac{d(n^2)-1}{2}$ 組.

更進一步地, 考慮 n 的質因數分解

$$n = p_1^{s_1} p_2^{s_2} \cdots p_l^{s_l}.$$

則所求的正整數解 (a,b) 之個數爲

$$\frac{d(n^2)-1}{2} = \frac{1}{2}\left((2s_1+1)(2s_2+1)\cdots(2s_l+1)-1\right).$$

[獨立研究問題6證明]: 因爲

$$a_{n+1} - a_n = \frac{1}{a_n+1} - 1 < 0, \ \forall\, n = 0,1,2,3,\cdots,$$

故數列 $\langle a_n \rangle$ 是嚴格遞減的正數列. 因此,

$$a_n = a_0 + (a_1 - a_0) + (a_2 - a_1) + \cdots + (a_n - a_{n-1})$$
$$= 1999 + (\frac{1}{a_0+1} - 1) + (\frac{1}{a_1+1} - 1) + \cdots + (\frac{1}{a_{n-1}+1} - 1)$$
$$= 1999 - n + \left(\frac{1}{a_0+1} + \frac{1}{a_1+1} + \cdots + \frac{1}{a_{n-1}+1}\right)$$

於是,

$$a_0 > a_1 > a_2 > \cdots > a_{999} > 1999 - 999 = 1000.$$

由此可得

$$0 < \frac{1}{a_0+1} + \frac{1}{a_1+1} + \cdots + \frac{1}{a_{n-1}+1} < \frac{n}{a_{n-1}+1} \le \frac{1000}{a_{999}+1} < 1,$$
$$\forall\, n = 0,1,2,\cdots,1000.$$

因此, $1999 - n < a_n < 2000 - n, \forall n = 0,1,2,\cdots,1000$, 於是得

$$[a_n] = 1999 - n, \ \forall\, n = 0,1,2,\cdots,1000.$$

[獨立研究問題7解答]: 因爲對於任意的正整數 m, n, 恆有

$$(m+n)^m \ge n^m + m^m,$$

因此,

$$m^m \le (m+n)^m - n^m = 117.$$

於是，$m \leq 3$.

(i) 若 $m=1$，則 $1+n=n+117$，矛盾！

(ii) 若 $m=2$，而 n 爲偶數，則 $(m+n)^m$ 是偶數，而 n^m+117 是奇數，此時，$(m+n)^m \neq n^m+117$.

(iii) 若 $m=2$，而 n 爲奇數，則 $(m+n)^m$ 是奇數，而 n^m+117 是偶數，此時，$(m+n)^m \neq n^m+117$.

(iv) 若 $m=3$，則 $(n+3)^3=n^3+117$ 若且唯若 $n^2+3n-10=0$，得 $n=2$.

因此，正整數 m,n 滿足 $(m+n)^m=n^m+117$ 若且唯若 $m=3$, $n=2$.

[獨立研究問題8證明]：利用面積比例定理，首先，連 $\overline{OV_1}, \overline{OV_2}, \cdots, \overline{OV_5}$，則

$$
\begin{aligned}
&\frac{V_1W_1}{W_1V_2}\cdot\frac{V_2W_2}{W_2V_3}\cdot\frac{V_3W_3}{W_3V_4}\cdot\frac{V_4W_4}{W_4V_5}\cdot\frac{V_5W_5}{W_5V_1}\\
&=\frac{\Delta OV_1Z_1}{\Delta OV_2Z_1}\cdot\frac{\Delta OV_2Z_2}{\Delta OV_3Z_2}\cdot\frac{\Delta OV_3Z_3}{\Delta OV_4Z_3}\cdot\frac{\Delta OV_4Z_4}{\Delta OV_5Z_4}\cdot\frac{\Delta OV_5Z_5}{\Delta OV_1Z_5}\\
&=\frac{\Delta OV_1Z_1}{\Delta OV_5Z_4}\cdot\frac{\Delta OV_2Z_2}{\Delta OV_1Z_5}\cdot\frac{\Delta OV_3Z_3}{\Delta OV_2Z_1}\cdot\frac{\Delta OV_4Z_4}{\Delta OV_3Z_2}\cdot\frac{\Delta OV_5Z_5}{\Delta OV_4Z_3}\\
&=\frac{Z_1V_1}{Z_4V_5}\cdot\frac{Z_2V_2}{Z_5V_1}\cdot\frac{Z_3V_3}{Z_1V_2}\cdot\frac{Z_4V_4}{Z_2V_3}\cdot\frac{Z_5V_5}{Z_3V_4}.
\end{aligned}
$$

另一方面，

$$
\begin{aligned}
1 &= \frac{\Delta Z_1V_1V_2}{\Delta Z_5V_1V_5}\cdot\frac{\Delta Z_5V_1V_5}{\Delta Z_4V_4V_5}\cdot\frac{\Delta Z_4V_4V_5}{\Delta Z_3V_3V_4}\cdot\frac{\Delta Z_3V_3V_4}{\Delta Z_2V_2V_3}\cdot\frac{\Delta Z_2V_2V_3}{\Delta Z_1V_1V_2}\\
&=\frac{Z_1V_1\cdot V_1V_2}{V_1Z_5\cdot V_1V_5}\cdot\frac{V_1V_5\cdot V_5Z_5}{V_4V_5\cdot Z_4V_5}\cdot\frac{V_5V_4\cdot Z_4V_4}{V_4Z_3\cdot V_4V_3}\cdot\frac{V_3V_4\cdot V_3Z_3}{V_3V_2\cdot V_3Z_2}\cdot\frac{V_2Z_2\cdot V_2V_3}{V_2Z_1\cdot V_1V_2}\\
&=\frac{Z_1V_1}{Z_4V_5}\cdot\frac{Z_2V_2}{Z_5V_1}\cdot\frac{Z_3V_3}{Z_1V_2}\cdot\frac{Z_4V_4}{Z_2V_3}\cdot\frac{Z_5V_5}{Z_3V_4}.
\end{aligned}
$$

於是，合併前面的結果可得

$$
\frac{\overline{V_1W_1}}{\overline{W_1V_2}}\cdot\frac{\overline{V_2W_2}}{\overline{W_2V_3}}\cdot\frac{\overline{V_3W_3}}{\overline{W_3V_4}}\cdot\frac{\overline{V_4W_4}}{\overline{W_4V_5}}\cdot\frac{\overline{V_5W_5}}{\overline{W_5V_1}}=1.
$$

[口試題一證明]：因爲 P,C,D,E 四點共圓，由正弦定理得

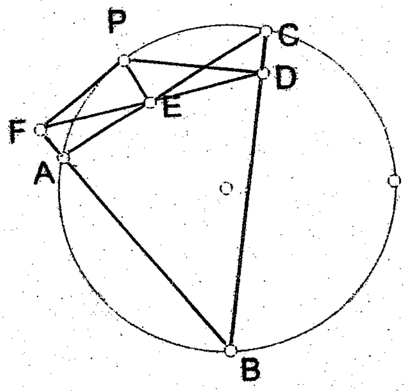
$$
\frac{ED}{\sin\angle ACB}=\frac{CE}{\sin\angle CDE}=\frac{CE}{\sin\angle CPE}=\frac{PC}{\sin\angle CEP}=PC.
$$

同理，由 P, F, A, E 四點共圓，得

$$\frac{EF}{\sin\angle BAC} = AP.$$

再由 $\overline{DE} = \overline{EF}$，及正弦定理，可得

$$\frac{AP}{PC} = \frac{\sin\angle ACB}{\sin\angle BAC} = \frac{AB}{BC}.$$



[口試題二證明]：令 $a = p_1^{r_1}p_2^{r_2}\cdots p_n^{r_n}$，$b = p_1^{s_1}p_2^{s_2}\cdots p_n^{s_n}$，其中 $p_1, p_2, \cdots, p_n$ 爲相異的質數．則

$$\begin{aligned} S(ab) &= (1+p_1+\cdots+p_1^{r_1+s_1})(1+p_2+\cdots+p_2^{r_2+s_2})\cdots(1+p_n+\cdots+p_n^{r_n+s_n}) \\ &\le (1+p_1+\cdots+p_1^{r_1})(1+p_1+\cdots+p_1^{s_1})(1+p_2+\cdots+p_2^{r_2}) \\ &\quad (1+p_2+\cdots+p_2^{s_2})\cdots(1+p_n+\cdots+p_n^{r_n})(1+p_n+\cdots+p_n^{s_n}) \\ &= S(a)S(b). \end{aligned}$$

因此，我們只須證明對每一奇質數 p，都有 $S(p) < p\sqrt[3]{p}$．但此不等式顯然是成立的，因爲

$$(S(p))^3 = (1+p)^3 \le \left(\frac{4p}{3}\right)^3 = \frac{64}{27}p^3 < p^4.$$