第 29 屆（1998 年）國際物理奧林匹亞競賽理論試題參考答案

林明瑞
國立臺灣師範大學　物理系

理論第一題參考解答

(a)解法 1：

當六角柱剛體在斜面上滾動時，其柱面邊緣的稜線按序逐次地碰撞斜面。在每次碰撞斜面的瞬間，六角柱就開始以新碰觸的稜線為軸，繞其轉動。斜面作用於六角柱的力對此軸的力矩為零。在時間極短的碰撞過程中，六角柱對此軸的角動量守恆。設 $\vec{P}_i$、$\vec{L}_i$、$\vec{\omega}_i$ 和 $\vec{P}_f$、$\vec{L}_f$、$\vec{\omega}_f$ 分別為六角柱即將碰撞斜面前和剛碰撞後的線動量、角動量、角速度。六角柱的線動量可寫成 $\vec{P} = M\vec{v}_C$，式中 $\vec{v}_C$ 為質心的速度。因此六角柱線動量的方向即是質心的速度方向。在圖 1-1 中，C 點為六角柱的質心，和另兩個碰撞點 A、B 位在同一截面上；六角柱在即將碰撞斜面之前，以通過 A 點的稜線為轉軸，其線動量為 $\vec{P}_i$，垂直於 $\overline{AC}$；碰撞後，則以通過 B 點的稜線為新轉軸，其線動量為 $\vec{P}_f$，垂直於 $\overline{BC}$。

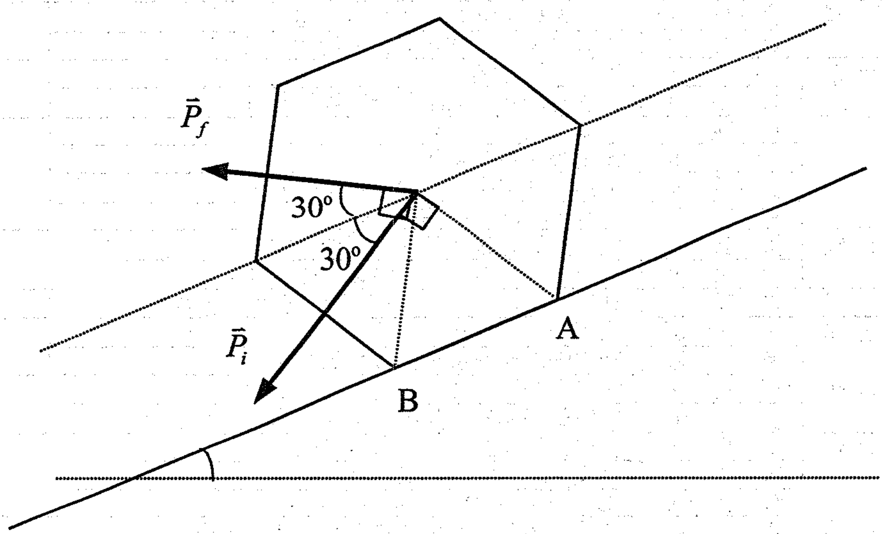


圖 1-1　六角柱在即將碰撞斜面之前，以通過 A 點的稜線為轉軸，其線動量為 $\vec{P}_i$，垂直於 $\overline{AC}$；碰撞後，則以通過 B 點的稜線為新轉軸，其線動量為 $\vec{P}_f$，垂直於 $\overline{BC}$。C 為六角柱的質心。

六角柱在即將碰撞斜面之前的角動量，相對於通過 B 點的稜線，可寫爲：

$$\vec{L}_i = \vec{L}_C + \vec{r}_C \times M\vec{v}_C \quad \text{..........(1)}$$

式中 $\vec{L}_C$ 爲六角柱相對於其質心的角動量，$\vec{r}_C = \overrightarrow{BC}$ 則爲質心 C 相對於碰撞點 B 的位置向量。由上圖中可知（1）式右方兩向量的方向相同，故得

$$\left|\vec{r}_C \times M\vec{v}_{Ci}\right| = r_C M v_{Ci} \sin(150^\circ) = a \cdot M(a\omega_i) \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{2}Ma^2\omega_i \quad \text{..........(2)}$$

$$\Rightarrow L_i = I\omega_i + \frac{1}{2}Ma^2\omega_i = \left(\frac{5}{12}+\frac{1}{2}\right)Ma^2\omega_i = \frac{11}{12}Ma^2\omega_i \quad \text{..........(3)}$$

在另一方面，六角柱在剛碰撞後的角動量，相對於通過 B 點的稜線，可寫爲：

$$L_f = I'\omega_f = \frac{17}{12}Ma^2\omega_f \quad \text{..........(4)}$$

由於角動量守恆，所以 $L_i = L_f$，從(3)和(4)式可得：

$$\omega_f = \frac{11/12}{17/12}\omega_i = \frac{11}{17}\omega_i \quad \text{..........(5)}$$

$$\Rightarrow s = \frac{11}{17}$$

注意：s 和 a ,ω_i ,及θ 的數值無關。

$\boxed{\text{解法 2}}$：

當六角柱碰撞斜面時，僅有一稜線和斜面接觸，它從該稜線處得到一衝量 $\vec{P}$。設此時六角柱在此稜線處所受到來自斜面的力分別爲 $F_{//}$(沿斜面向上的分力)和 F　(垂直於斜面向上的分力)，則衝量 $\vec{P}$ 在平行和垂直於斜面的分量可寫爲：

$$P_{//} = \int F_{//}dt = (P_{//})_f - (P_{//})_i = -Ma(\omega_f - \omega_i)\cos 30^\circ \quad \text{..........(6)}$$

$$P_{\perp} = \int F_{\perp}dt = (P_{\perp})_f - (P_{\perp})_i = Ma(\omega_f + \omega_i)\sin 30^\circ \quad \text{..........(7)}$$

上二式中各分量的符號取法：在平行於斜面的方向上，取沿斜面向上爲正；在垂直於斜面的方向上，取離開斜面向上爲正。

就相對於六角柱的質心而言，六角柱所受的合力矩爲

$$\vec{r}_B \times \vec{F} = \frac{d\vec{L}}{dt}$$

$$\begin{aligned}\vec{L}_f - \vec{L}_i &= \int \vec{r}_B \times (\vec{F}_{//} + \vec{F}_{\perp})dt \\ &= \int \vec{r}_B \times \vec{F}_{//}dt + \int \vec{r}_B \times \vec{F}_{\perp}dt \\ &= \vec{r}_B \times \vec{P}_{//} + \vec{r}_B \times \vec{P}_{\perp}\end{aligned}$$

上式中 $\vec{r}_B$ 爲圖 1-1 中，接觸點 B 相對於質心 C 的位置向量，即 $\vec{r}_B = \overrightarrow{CB}$。利用(6)和(7)式，

可得

$$I_C(\omega_f-\omega_i)=aP_{//}\sin120^\circ-aP_\perp\sin150^\circ \quad\cdots\cdots(8)$$

$$=-\frac{3}{4}Ma^2(\omega_f-\omega_i)-\frac{1}{4}Ma^2(\omega_f+\omega_i)$$

$$\Rightarrow\frac{5}{12}Ma^2(\omega_f-\omega_i)=-\frac{3}{4}Ma^2(\omega_f-\omega_i)-\frac{1}{4}Ma^2(\omega_f+\omega_i)$$

$$\Rightarrow\omega_f=\frac{11}{17}\omega_i$$

所得結果和(5)式相同。

(b)轉動中的剛體的總動能可寫為

$$K_{tot}=\frac{1}{2}I_C\omega^2+\frac{1}{2}Mv_C^2 \quad\cdots\cdots(9)$$

由於六角柱的運動為純滾動，故 $v_C=a\omega$，代入上式，得

$$K_{tot}=\frac{1}{2}(I_C+Ma^2)\omega^2\propto\omega^2 \quad\cdots\cdots(10)$$

$$\Rightarrow r=\frac{K_f}{K_i}=\left(\frac{\omega_f}{\omega_i}\right)^2=\left(\frac{11}{17}\right)^2=\frac{121}{289} \quad\cdots\cdots(11)$$

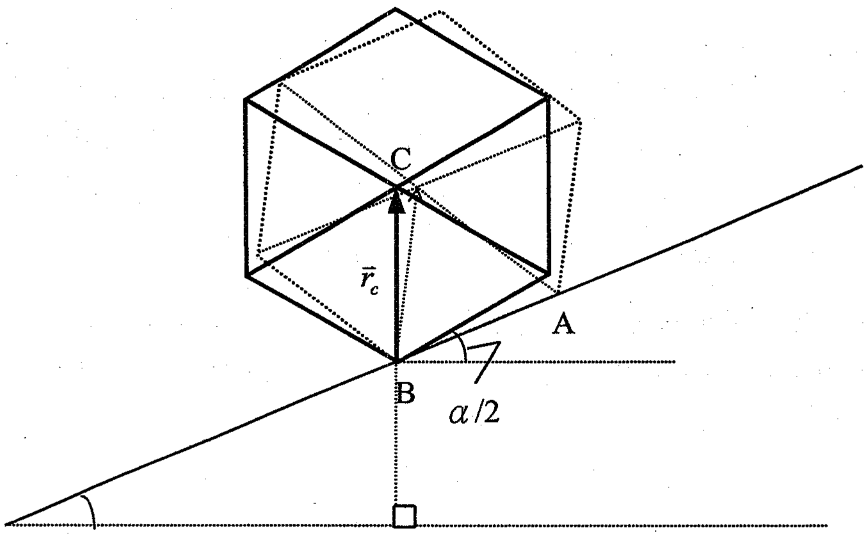


圖 1-2　虛線所示為六角柱在碰撞斜面前的位置；實線所示為其質心上升至最高點時的位置，此時質心位在 B 點的正上方，質心位置向量 $\vec{r}_C$ 的延長線垂直於地面。

(c)六角柱碰撞斜面後的動能 K_f 必須足夠大，使得質心能升至最高的位置（位在接觸點的

正上方），如圖 1-2 所示。質心的位置向量 $\vec{r}_C$ 所須轉過的角度為 $\alpha/2-\theta$，α 為六角柱每一邊在中心處所成三角形的頂角(在六角柱中，$\alpha=60^{\circ}$；在一般正多邊體中，則 $\alpha=2\pi/N$)。把質心升高至最高點所須的能量為

$$E=Mga\left(1-\cos\left(30^{\circ}-\theta\right)\right) \quad \text{......(12)}$$

因此為使六角柱能繼續轉動，其條件為

$$K_f=rK_i>E=Mga\left(1-\cos\left(30^{\circ}-\theta\right)\right) \quad \text{......(13)}$$

$$\Rightarrow K_i>\frac{1}{r}Mga\left(1-\cos\left(30^{\circ}-\theta\right)\right)$$

題設 $K_{i,\min}=\delta Mga$，所以

$$\delta=\frac{1}{r}\left(1-\cos\left(30^{\circ}-\theta\right)\right) \quad \text{......(14)}$$

(d)設 $K_{i,n}$ 和 $K_{f,n}$ 分別為六角柱在第 n 次正要發生碰撞前和剛完成碰撞後的動能。由（11）式可得

$$K_{f,n}=rK_{i,n} \quad \text{......(15)}$$

式中 $r=121/289<1$。在下一次的碰撞發生前，六角柱的質心高度下降了 a sin ，因此動能增加了

$$\Delta=Mga\sin\theta$$

$$\Rightarrow K_{i,n+1}=K_{f,n}+\Delta=rK_{i,n}+\Delta. \quad \text{......(16)}$$

式中的 $n=1,2,3,\cdots$。由於題設(16)式的級數存在有一極限（見附註的證明），所以當 n 足夠大時，$K_{i,n+1}$ 趨近於 $K_{i,n}$。當 $n\to\infty$ 時，設動能的極限值為 $K_{i,0}$（這是原題所取的符號，或宜取為 $K_{i,\infty}$），則應滿足(16)式，即

$$K_{i,0}=rK_{i,0}+\Delta \quad \left(\text{或寫為 } K_{i,\infty}=rK_{i,\infty}+\Delta\right) \quad \text{......(17)}$$

上式可解釋為當六角柱的動能達到極限值時，每次六角柱碰撞斜面所損失的動能，剛好由因質心下降而釋放出的重力位能來補充。由上式可解得動能的極限值為

$$K_{i,0}=\frac{\Delta}{1-r}=\left(\frac{\sin\theta}{1-r}\right)Mga$$

$$\Rightarrow\kappa=\frac{\sin\theta}{1-r} \quad \text{......(18)}$$

【附註】我們可直接解出動能的極限值。按（16）式可寫出一系列的 $K_{i,n}$ 關係式，即

$$K_{i,2}=rK_{i,1}+\Delta$$
$$K_{i,3}=rK_{i,2}+\Delta=r^2K_{i,1}+(1+r)\Delta$$
$$\cdots \qquad\qquad \cdots\cdots(19)$$
$$K_{i,n}=r^{n-1}K_{i,1}+\left(1+r+r^2+\cdots+r^{n-2}\right)\Delta$$
$$=r^{n-1}K_{i,1}+\left(\frac{1-r^{n-1}}{1-r}\right)\Delta$$

因爲 $r<1$，所以當 $n\to\infty$時，可得

$$K_{i,\infty}=\frac{\Delta}{1-r} \qquad\cdots\cdots(20)$$

或按題設的符號寫爲 $K_{i,0}=\dfrac{\Delta}{1-r}$，和前所得者相同。

如果我們計算六角柱在一整個碰撞循環內的動能變化，即第 n 次正要碰撞前直到第 n+1 次正要碰撞前之間，可得

$$\Delta K_{i,n}=K_{i,n+1}-K_{i,n}=(r-1)r^{n-1}K_{i,1}+r^{n-1}\Delta$$
$$=r^{n-1}(1-r)\left(\frac{\Delta}{1-r}-K_{i,1}\right) \qquad\cdots\cdots(21)$$
$$=r^{n-1}(1-r)\left(K_{i,\infty}-K_{i,1}\right)$$

由上式可看出，若 $K_{i,1}<K_{i,\infty}$，則 $\Delta K_{i,n}>0$，即六角柱的動能在每一個碰撞循環後都會增加，$K_{i,n}$ 將漸增加至極限值 $K_{i,}$ 。在另一方面，若 $K_{i,1}>K_{i,\infty}$，則 $\Delta K_{i,n}<0$，即六角柱的動能在每一個碰撞循環後都會減少，$K_{i,n}$ 將漸減少至極限值 $K_{i,}$ 。這種運動情況和圓柱體在摩擦斜面上的滾動不一樣。圓柱從摩擦斜面上滾下來時，不管其初速爲何，其速率或動能一直在增加。從數學觀點來看，兩者間的主要差異在於六角柱和斜面間的碰撞是離散的，有關動量和動能的變化方程式不能以微分方式處理；而圓柱體和斜面之間的碰撞則是連續的，可用微分方式處理。

(e)爲了使六角柱能在斜面上不斷地滾動下去，則在(d)中所得的動能極限值必須大於在(c)中爲維持轉動所須的最小動能值，即

$$K_{i,\infty}>K_{i,min}$$
$$\Rightarrow \frac{\Delta}{1-r}=\frac{Mga\sin\theta}{r}>\left[\frac{1}{r}\left(1-\cos\left(30^\circ-\theta\right)\right)\right]Mga$$
$$\Rightarrow \left(\frac{r}{1-r}\right)\sin\theta>1-\cos\left(30^\circ-\theta\right) \qquad\cdots\cdots(22)$$

令 $A=\dfrac{r}{1-r}=\dfrac{121}{168}$，則

$$A\sin\theta > 1-\cos 30^\circ\cos\theta - \sin 30^\circ\sin\theta$$

$$\Rightarrow (A+1/2)\sin\theta + \sqrt{3}/2\cos\theta > 1$$

$$\Rightarrow \cos u\sin\theta + \sin u\cos\theta > \frac{1}{\sqrt{(A+1/2)^2+\left(\sqrt{3}/2\right)^2}}$$

$$\Rightarrow \sin(\theta+u) > 0.6683$$

$$\Rightarrow \theta > \sin^{-1}0.6683 - u$$

式中 $u=\cos^{-1}\left(\frac{A+1/2}{\sqrt{(A+1/2)^2+\left(\sqrt{3}/2\right)^2}}\right)=\cos^{-1}(0.8155)\approx 35.36^\circ$，故

$$\theta > 41.94^\circ - 35.36^\circ = 6.58^\circ$$

$$\theta_{min} \approx 6.58^\circ$$

如果斜面的斜角 $\theta > \theta_{min}$，並且六角柱在進行第一次碰撞前的動能足夠大，即滿足(c)的條件，則該六角柱將可在斜面上不斷地滾動下去。

第一題評分標準

(a) 3.5 分	利用解法 1，得出正確的 s 值，即 s=11/17。	3.5 分
	利用解法 2，得出正確的 s 值，即 s=11/17。	3.5 分
	I' 誤用爲 I_c，或類似的單一錯誤。	2.5-3.0 分
	同上，得到合理的 s 值，但犯有多個錯誤(每個錯誤扣 0.5 分)。	0.0-2.0 分
	同上，所得的 s 值不合理，例如 s<0.45 或>0.9。	0.0-0.1 分
	利用其他的方法得出正確的 s 值，例如利用解法 2，但分別計算水平和鉛直方向上的衝量。	可給至 3.5 分
	不正確的解法：	
	利用部分的彈性碰撞(使用恢復係數)，來求解。	0.0 分
	利用迴轉中心來求解(如果正確地畫出迴轉中心相對於稜線的位置，可酌給 0.1-0.2 分)。	0.0-0.3 分
	在 s 的表達式中含有 θ、a、ω_i、或摩擦係數。	0.0 分
	僅簡單地說由於運動方向轉過 60°，所以 ω_f/ω_i 之值必定爲 $\cos 60^\circ = 0.5$，或僅聲稱動能 K 或動量 P 在碰撞時守恆。	0.0 分
	企圖利用向心力來求解。	0.0 分
	假設作用於稜線的衝量，僅有沿著徑向、垂直於斜面方向、或平行於斜面方向的分量。 【註】斜面作用於稜線的衝量，其方向和垂直於斜面的方向之間向右的夾角爲 $\tan^{-1}\frac{P_{//}}{P_{\perp}}=\tan^{-1}\frac{3\sqrt{3}}{14}=20.4^\circ$	0.0-0.8 分
	利用另一稜線，即離開斜面的稜線，來計算衝量。	0.0 分
	假設繞質心轉動的角速度和繞碰撞點的角速度不同。	0.0-1.0 分
	利用解法 1，但解答未全者：	
	作圖顯示質心速度 $\vec{v}_c$ 或衝量 $\vec{P}$ 的方向：	

	繪出初速度、初衝量，或末速度、末衝量者；	0.3 分
	繪出初和末速度或衝量者，如果兩者大小相等；	0.6 分
	繪出初和末速度或衝量者，如果末速度或末衝量之長度較小；	1.0 分
	繪出初和末速度或衝量者，如果初速度或初衝量之長度較小。	0.3 分
	寫出角動量的數學式，即(1)式。	0.3 分
	寫出初和末角動量的數學式，即(1)和(4)式。	1.0 分
	清楚地說出繞稜線的角動量守恆，但未應用。	0.4-0.8 分
	如果寫出角動量守恆的數學式，並且標出角動量的方向是離開紙面。	0.8 分
	利用解法 2，但解答未全者：	
	寫出(6)和(7)兩式之一，或類似的守恆關係式。	0.5 分
	寫出(6)和(7)兩式，或類似的守恆關係式。	1.0 分
	寫出(6)式(7)式，但符號錯誤，或 sin、cos、30° 弄混。	0.0-0.3 分
	寫出(8)式的角動量變化，或類似的式子，但 I 必須正確。	0.5 分
	寫出(8)式，但誤用 I'，或符號錯誤，或三角函數弄錯。	0.0-0.3 分
	寫出(6)，(7)，和(8)式，但未企圖解出 ω_f/ω_i。	2.0 分
	寫出(6)，(7)，和(8)式，雖企圖解出 ω_f/ω_i，但因用錯數值，或計算錯誤，而得不到正確答案。	2.0-2.9 分
(b) 1.0 分	導出 $r = s^2$，並且答案正確。	1.0 分
	推導正確，但因使用得自(a)題中不合理的 s 值，而致答案錯誤。	0.5 分
	得出 $r = s^2$，但未附解釋或推導。	0.4 分
	解答未全者：	
	寫出(9)式，但沒有結論，或結論錯誤者。	0.3 分
	寫出質心速度為 $v_C = a\omega$，但未作進一步推論者。	0.3 分
	寫出(9)式和 $v_C = a\omega$，但答案錯誤者。	0.3-0.7 分
(c) 1.5 分	正確導出 δ 的表達式，即(14)式。	1.5 分
	δ 的推導正確，但引用錯誤的 r 值。	1.5 分
	不正確的答案：	
	答案含有一個錯誤，例如把 30° - 寫成 30° + ，或把 1/r 寫成 r。	1.0 分
	推導過程中涵有多個或嚴重的錯誤。	0.0-0.4 分
	答案中含有 a、g、ω_i、摩擦係數、或恢復係數等。	0.0 分
	解答未全者：	
	在計算中出現 $\cos(30°-\theta)$，但結果不對者。	0.3 分
(d) 2.0 分	正確導出 κ 的表達式，附簡略推導如(15)至(18)式，或詳細的推導如(19)至(20)式。	2.0 分
	推導過程實質正確，但有小錯誤或意外失誤。	1.4-1.7 分
	解答未全者： 解得 $\omega_i^2 = \frac{17}{7}\left(\frac{g\sin\theta}{a}\right)$ 或 $\omega_f^2 = \frac{121}{119}\left(\frac{g\sin\theta}{a}\right)$。	0.8 分
	【註】由 $K_f = \frac{121}{289}K_i$ 和 $K_i - K_f = Mga\sin\theta$ 兩式，以及	

	$K=\frac{1}{2}I'\omega^2=\frac{1}{2}\left(\frac{17}{12}Ma^2\right)\omega^2$，可解得上值。	
	對動能的極限值討論，能有智慧性的看法，例如爲何 $K_{i,n}$ 總是有限值？可酌增分數。	0.0-0.5 分
（e）2.0 分	正確的數字解 $6.58°\pm0.1°$	2.0 分
	公式推導正確，計算出的數字接近題目的要求。 例如利用小角公式計算(22)式，得 $A\theta_{min}=\frac{1}{2}\left(\frac{\pi}{6}-\theta_{min}\right)^2$，解得 $\theta_{min}\approx6.62°$。	1.6 分
	解答未全者：	
	得出(22)式。	1.4 分
	企圖分析解出(22)式，但未完成。	加 0.0-0.3 分
	努力求解(22)式或憑估計得出角度範圍，例如在 5°-8° 之間。	加 0.0-0.3 分
	指出 θ 應有一上限，在此上限情況下，題目的假設不再能適用，即六角柱在碰撞前所受的正向力爲零。可酌多給分。	加 0.0-0.3 分
	不正確的答案：	
	用於計算 θ_{min} 的公式正確，但引用錯誤的 r 值。	1.0 分
	視所用 r 值的大小，可酌加 0.0-0.5 分，但 r 值不能過於違反直覺的認定，例如 r 不能小於 0.2，或大於 0.8。	

理論第二題參考解答

(a) 由能量守恆定律可得

$$J_Q\times1\text{年}=L_i\rho_i d$$

$$\Rightarrow d=\frac{J_Q\times1\text{年}}{L_i\rho_i}=\frac{0.06s^1m^2\times365\times24\times60\times60s}{3.4\times10^5J/kg\times917kg/m^3}=6.1\times10^3m$$

(b) 設 P_a 代表大氣壓力，爲一定值，則在冰帽內深度爲 z 處的壓力爲

$$P(z)=\rho_i gz+P_a \quad\text{.......(1)}$$

故在冰帽底面水平坐標爲 x 處，其冰層深度 $z=y_2-y_1$，所受的壓力爲

$$\begin{aligned}P&=\rho_i g(y_2-y_1)+P_a\\&=\rho_i gx(\tan\beta-\tan\alpha)+\rho_i gh_0+P_a \quad\text{.......(2)}\end{aligned}$$

由於冰帽底面與地表之間的水層達成平衡，因此其內的水壓爲靜液壓力。設 P_0 爲冰帽底面在 $x=0$ 處所受的壓力，則（2）式中的壓力 P 亦可寫爲

$$\begin{aligned}P&=P_0-\rho_w gy_1\\&=(\rho_i gh_0+P_a)-\rho_w gx\tan\alpha \quad\text{.......(3)}\end{aligned}$$

由(2)和(3)兩式可得

$$\rho_i gx(\tan\beta - \tan\alpha) = -\rho_w gx\tan\alpha \quad \text{......(4)}$$

$$\Rightarrow \tan\beta = -\left(\frac{\rho_w - \rho_i}{\rho_i}\right)\tan\alpha = -\frac{\Delta\rho}{\rho_i}\tan\alpha. \quad \text{......(5)}$$

$$\Rightarrow s = -\frac{\Delta\rho}{\rho_i} \approx -0.091 \quad \text{......(6)}$$

注意上式中的負號具有物理意義，若α爲正角，則β爲負角，即冰帽上表面向下傾斜。

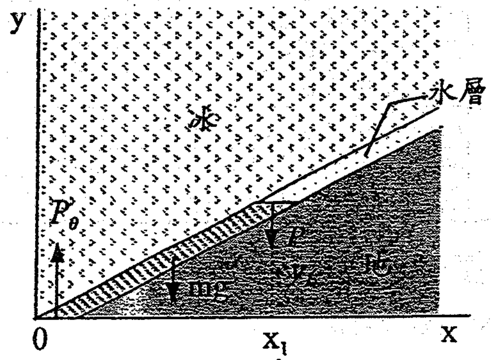
按題設 $\tan\alpha = 0.8$ ，$h_0 = 2\text{km}$ ，所以 $\tan\beta = -0.073$ ，得

$$y_2 = 2 - 0.073x \quad \text{......(7)}$$

$y_1(x)$和 $y_2(x)$ 繪如圖 2-1 所示。

【註】參考下圖，冰帽底面與地表之間的水層已刻意放大，P_0和 P 分別為水層內在坐標（0,0）和（x_1,y_1）處的水壓。考慮斜線部分的水層，由於此部份的水處於平衡狀態，設其底面積為 A，則由靜力平衡的條件可得

$$P_0A = PA + mg$$
$$= PA + (\rho_w A y_1)g$$
$$P = P_0 - \rho_w g y_1$$



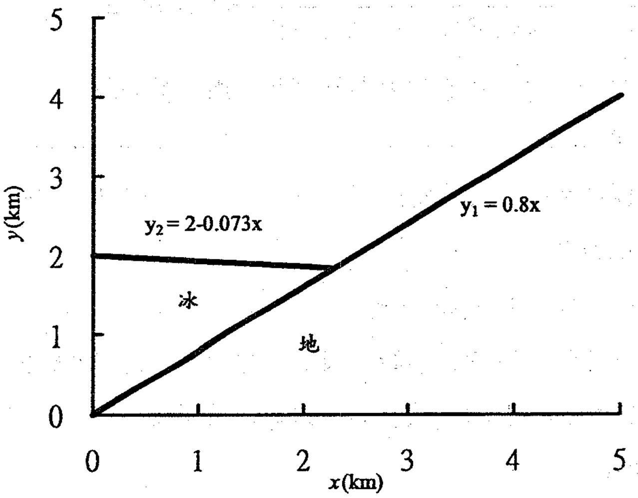


圖2-1

(c) 由於題設冰塊僅在垂直方向上移動，以調適因冰帽底層部分熔化而產生的變化，因此冰帽的上表面將會出現半徑同樣爲 r = 1km 的圓錐形凹陷，如圖 2-2 所示。冰帽底面下的水體處於靜液平衡狀態，必須滿足(5)式，故冰帽上表面圓錐形中央凹陷的深度爲

$$h = \left| r\tan\beta \right| = \frac{\Delta\rho}{\rho_i} r\tan\alpha = \frac{\Delta\rho}{\rho_i} H = 0.091 \times 1\text{km} = 91\text{m} \quad \text{......(8)}$$

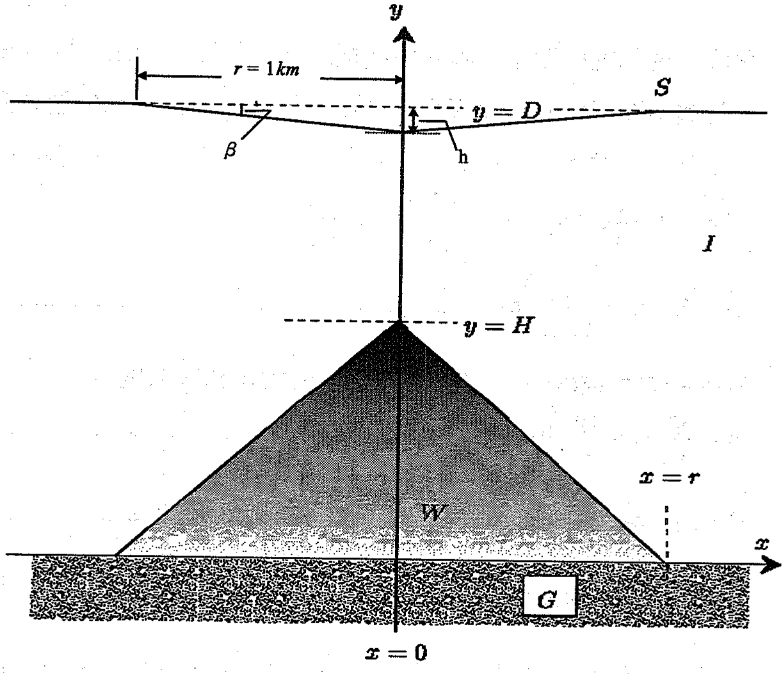


圖 2-2

(d)圓錐體的體積爲 $V = \frac{1}{3}\pi r^2 h$。設 h_1 爲穿入冰帽底面的岩漿圓錐體的高度，則此部分岩漿的體積爲 $V_1 = \frac{1}{3}\pi r^2 h_1$。從分析觀點來看，冰帽底部冰塊熔化的過程可以細分成三個階段：

第一階段：首先岩漿把和其同體積的冰熔化成水。但由於尚未達到靜液平衡，所生成的水都會流失，冰帽底部熔化後形成的冰面將緊貼著岩漿圓錐體的表面，這相當於以岩漿圓錐體取代同形狀同體積的冰塊，因此冰帽的上表面仍得以維持平面。

第二階段：岩漿的溫度仍高，繼續熔冰，所生成的水繼續流失，一直到達成靜液平衡時爲止。結果使冰帽的上表面產生圓錐形凹陷，設其中央凹陷的深度爲 h_2，則根據(5)式或(8)式，可得 $h_2 = \frac{\Delta\rho}{\rho_i} h_1$。在這個階段內所熔化的冰的體積等

於冰帽上表面凹陷的圓錐體體積，即 $V_2=\frac{1}{3}\pi r^2 h_2$ 。

第三階段：岩漿的溫度尚未冷卻至 0℃，因此繼續熔冰，但是因爲水體已達成靜液平衡，所以熔冰產生的水不會流失，而累積在原處，即岩漿圓錐體的上方。設這個階段內所熔化的冰的體積相當於高度爲 h_3，半徑爲 r 的圓錐體，即 $V_3=\frac{1}{3}\pi r^2 h_3$ 。冰熔化後所生的水的體積爲 $V_3'=\left(\frac{1}{3}\pi r^3 h_3\right)\frac{\rho_i}{\rho_w}$ 。由於冰熔化成水後的體積縮小，因此使冰帽上表面的凹陷加深。按題設 H 爲從該水圓錐體頂點至原先冰帽底面的高度，又設 h_3' 爲該水圓錐體頂點至岩漿圓錐體頂點之間的距離，則 $H=h_1+h_3'$，又由試題之圖 2-4 可得

$$\frac{1}{3}\pi r^2 H-\frac{1}{3}\pi r^2 h_1=V_3'=\left(\frac{1}{3}\pi r^2 h_3\right)\frac{\rho_i}{\rho_w}$$

$$h_3'=H-h_1=\left(\frac{\rho_i}{\rho_w}\right)h_3 \quad \text{.......(9)}$$

再利用(5)式或(8)式，可得冰帽上表面的總凹陷深度爲

$$h=\frac{\Delta\rho}{\rho_i}H=\frac{\Delta\rho}{\rho_i}\left(h_1+h_3'\right) \quad \text{.......(10)}$$

$$H=h_1+h_3'=\frac{\rho_i}{}h=\frac{0.917\times10^3}{(1-0.917)\times10^3}\times100=1.10\times10^3\,\mathrm{m} \quad \text{.......(11)}$$

由前述可知被熔化的冰的總體積爲 $V_{tot}=V_1+V_2+V_3=\frac{1}{3}\pi r^2\left(h_1+h_2+h_3\right)$，這相當於高度爲 h_{tot}，半徑爲 r 的圓錐體體積。利用 $h_2=\frac{\Delta\rho}{\rho_i}h_1$ ，$h_3=\frac{\rho_w}{\rho_i}h_3'$，和（11）式，可得

$$h_{tot}=h_1+h_2+h_3=h_1+\frac{\Delta\rho}{\rho_i}h_1+\frac{\rho_w}{\rho_i}h_3'=\frac{\rho_w}{\rho_i}\left(h_1+h_3'\right)=\frac{\rho_w}{\rho_i}H$$

$$=\frac{\rho_w}{\Delta\rho}h=\frac{1.0\times10^3}{(1\quad 0.917)\times10^3}\times100=1.20\times10^3\,\mathrm{m} \quad \text{.......(12)}$$

上值小於冰層厚度（2km），表示岩漿尚未把冰帽熔化至其上表面。

由能量守恆定律知：岩漿圓錐體所流出的熱能用於熔化冰塊。利用(12)式，可得

$$\frac{1}{3}\pi r^2\rho_r h_1\left(L_r+c_r\Delta T\right)=\frac{1}{3}\pi r^2\rho_i h_{tot}L_i \quad \text{.......(13)}$$

$$\Rightarrow h_1=\frac{\rho_i h_{tot}L_i}{\rho_r\left(L_r+c_r\Delta T\right)}=\frac{\rho_i\rho_w L_i h}{\rho_r\Delta\rho\quad\left(L_r+c_r\Delta T\right)} \quad \text{.......(14)}$$

上式中 $\Delta T=1200\,^{\circ}\mathrm{C}$ ，是突入的岩漿的溫度變化。將已知値代入（14）式，可得

$$h_1=\frac{\left(0.917\times10^3\right)\times\left(1.000\times10^3\right)\times\left(3.4\times10^5\right)\times(100)}{\left(2.9\times10^3\right)\times(1\quad 0.917)\times10^3\times\left(4.2\times10^5+700\times1200\right)}=103\mathrm{m}$$

所產生的水的總質量 m_{tot} 等於所熔化的冰的總質量，即

$$m_{tot}=\frac{1}{3}\pi r^2 h_{tot}\rho_i=\frac{1}{3}\pi\times(500)^2\times\left(1.20\times10^3\right)\times\left(0.917\times10^3\right)=2.88\times10^{11}\text{kg}$$

所流失的水的質量為

$$m'=\frac{1}{3}\pi r^2(h_1+h_2)\rho_i=\left(\frac{h_1+h_2}{h_{tot}}\right)m_{tot}=\frac{1}{h_{tot}}\left(h_1+\frac{\Delta\rho}{\rho_i}h_1\right)m_{tot}=\frac{\rho_w h_1}{\rho_i h_{tot}}m_{tot}$$

$$=\frac{\left(1.000\times10^3\right)\times103}{\left(0.917\times10^3\right)\times\left(1.20\times10^3\right)}\times\left(2.88\times10^{11}\right)=2.70\times10^{10}\text{kg}$$

圖 2-3 所示為按比例繪製之冰帽上表面形狀，穿入其底面的凝固岩塊形狀，及積存於岩塊上方的水圓錐體。

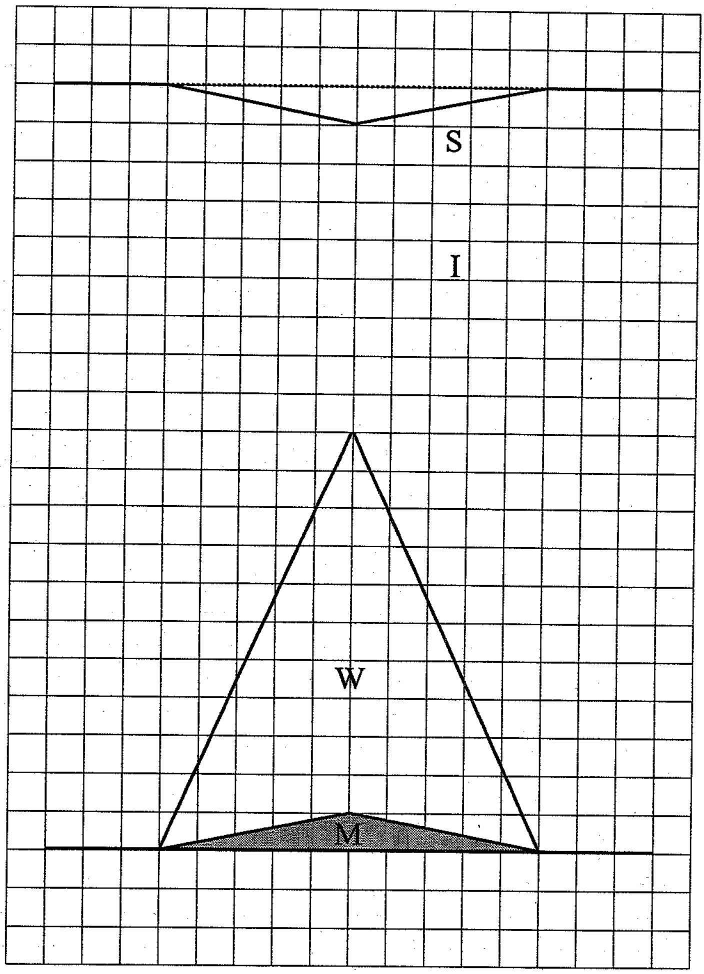


圖 2-3

第二題評分標準

（a）0.5分	得出正確答案 $d=6.1\times10^{-3}$m 。	0.5分
	答案不是以 m/year 來計算，而是以其他單位例如 m/s，m/day，…計算。	扣0.1分
	推導過程正確，但計算結果錯誤。	扣0.2分
（b）3.5分	第一部分(1.0分)	
	正確寫出(1)式或與之相當的方程式。	0.5分
	正確寫出(2)式。	0.5分
	忽略大氣壓力。	扣0.2分
	第二部分(2.0分)	
	指出在冰帽底面下的水壓必須是靜液壓力，或指出作用於該部分水體的力必須平衡，或是其他相當的說法。	0.5分
	正確寫出(4)式。	1.0分
	正確寫出(6)式。	0.5分
	在(4)和(6)式中的符號錯誤，但其他部分正確。	扣1.0分
	第三部分(0.5分)	
	寫出 y_2 的直線方程式為 $y_2=h_0+(s\tan\alpha)x$ 。	0.2分
	正確計算出 $s\tan\alpha=-0.073(\pm\ 2\%)$	0.1分
	作圖正確。	0.2分
（c）1.0分	正確定出半徑為 1km。	0.2分
	正確寫出（8）式。	0.2分
	正確計算出凹陷的深度為 91m（± 2%）。	0.2分
	作圖正確。	0.4分
	圖形大致正確（顯示圓錐形凹陷），但尺度不準確。	扣0.5分
（d）5.0分	第一部分（2.0分）	
	知道在達到靜液平衡前，有一高度為 h_1 的圓錐體冰塊先被熔化。	0.2分
	繼之，另有一高度為 $h_2=(\Delta\rho/\rho_i)h_1$ 的圓錐體冰塊被熔化。	0.4分
	知道在達到靜液平衡後，有一高度為 h_3 的圓錐體冰塊被熔化，形成一高度為 $h'=(\rho_i/\rho_w)h_3$ 的圓錐形水體， $h_1+h_3'=H$ 。	0.4分
	寫出凹陷的深度 $h=(\Delta\rho/\rho_i)H$ ，即（10）式。	0.7分
	計算出 H 值（± 2%）	0.3分
	第二部分（1.0分）	
	正確寫出熱平衡關係式，即（13）式。	0.4分
	忽略岩漿的潛熱或比熱	扣0.2分
	解得 h_{tot} 之值（± 2%）。	0.4分
	正確寫出（14）式。	0.1分
	正確解得 h_1 之值（± 2%）。	0.1分
	第三部分（0.5分）	
	正確寫出 m_{tot} 的數學式。	0.3分
	正確解得 m_{tot} 之值（± 2%）。	0.2分
	第四部分（1.0分）	
	正確解得 m'之值（± 2%）。	1.0分
	第五部分（0.5分）	
	作圖正確。	0.5分

（待續）