

如何培養統計思維與統計方法

蘇國樑
國立空中大學 商學系

摘要

本文藉著提出培養統計思維與統計方法，期望能提升教師的統計教學品質與學生的統計能力。統計思維與方法的培養首先在確立統計對象，有了正確的認識對象，思維活動與研究方法才能施展開來。本文將提出數個觀點分別探討如何培養學生的統計方法與統計思維。

關鍵字：統計思維、統計方法、統計對象、統計教育。

壹、前言

當統計與機率逐漸成為「跨學科」的知識與研究工具後，就必須考慮到統計本科的學生與非統計本科學生對「基礎」統計與機率的觀點，及他們的學習機制。Hogg & Hogg(1995)提出「全面品質管理(TQM, total quality management)」的觀點，為提高學生對教學的滿意度，統計教師應學習去實踐其教學的活動，從實踐統計思維、找出現實界的相關資料、到與學生溝通統計結論等。Wild(1995)則提出「連續性的改進教學(CIT, continuous improvement teaching)」，強調師生的互動，包含課程、內容、進度、作業、與考試等的回饋、溝通活動，以求改進教學內容與方法。而學校統計教育的目標與任務是提高學生處理與解釋統計資料的能力，這些能力的提高涉及統計思維與統計方法的培養。故而如何培養統計思維與統計方法應是一個重要的統計教育問題。

學校統計教育的主要任務是訓練學生具有蒐集、處理、分析、解釋資料的方法和培養創造性的統計能力。王仲春等著(1989)就提出「創造性能力是創造性思維的具體表現，因為創造性思維是指思維的結果或處理問題的方法帶有新穎性或獨特性」。Garfield(1995)就指出統計教師的教學目標是：「學生應學到或具備有基本的統計概念，可以利用統計概念評估數量化資訊解決統計問題，並使用統計語言解釋與溝通。」這些都牽涉到學生創造性能力的培養，因為問題的解決與解釋便帶有創造性，因此，可以藉由加強統計思維與方法的培養與訓練著手。

因為統計知識與方法是一種統計思維與統計認識的活動及其產物，而學科內容紀錄了學科基礎知識與學科思考方式。因此，由統計學科知識的內容亦可看出強調統計思維和統計方法之培養與訓練的重要性，因為這不僅是統計知識的紀錄，亦牽涉到統計知識的傳

承。

由於統計學科內容是由統計的基礎知識和統計的思維方法兩者所組合成的，從學科的內容亦可看出統計思維與統計方法的關聯性。由於統計方法與知識的獲得是透過統計思維的建構，統計方法與知識的實踐有助於統計思維的建構。

不論從統計教育的目的與任務來看，或是從統計學科本身所包含的內容、方法及統計在現實界對象的應用來看，加強、培養統計思維與統計方法都是非常重要的。同時也只有強化統計思維與統計方法的培養，才能提高學生運用統計知識解決實際面臨的問題之能力。這不但有利於提高學生的學習興趣，亦可刺激學生的自發性學習動機。

本文於第 2 節提出有關培養統計方法的 7 個觀點，依次、分別加以論述，就教於海內外先進。

貳、統計方法之培養

既然統計方法的掌握與統計能力的形成有著密切的關係，則如何培養統計方法就是一個值得研究的課題。統計方法是蘊藏在統計的知識內容中，因此，應把統計方法的培養與統計知識的教學整合為一體。統計知識內容的表徵又充滿了數學的表徵形式，因為數學運算與數學模型是用來輔助“數量認識”統計對象的重要工具之一，譬如，透過次數分配表或機率分配模型來了解資料集的結構。故而在傳授知識的同時，除了注意統計方法的介紹，尚需注意到數學方法的輔助性學習功能，進而豐富統計方法。雖然任何統計知識中都包含著一定的統計方法，即在獲得統計知識時必然會接觸到統計方法。但筆者關心的不僅是這種附帶性地認識統計方法，而是從附帶性提升成為自發性地認識統計方法。

如何加強統計方法的培養，建議注意下列幾點：

1. 使數學方法輔助統計方法的獲得，進而豐富統計方法。

統計教學中統計定理的推導與公式的計算過程，免不了使用許多數學運算與數學方法。因此，數學方法亦是統計方法的一種，也是前面所提出的數學方法可以豐富了統計方法和內容。然而，在使用數學方法處理統計問題時，必須一再強調統計對象的認識，否則會造成統計方法與數學方法的混淆。這種只考慮統計表徵形式的結果，不僅喪失對統計方法的認識，甚至無法掌握統計知識。例如，建立次數分配表的方法是：分類(組)、劃記、與計點等簡單的數學方法，但在教學中應提醒學生，建立次數分配表的精神在對資料整體及其內容的“數量認識”。

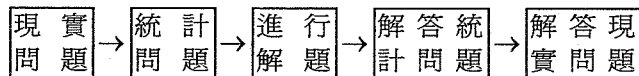
2. 善用輔助工具，提高學生對統計方法的認識。

爲了在整體方面不忽略培養統計方法的教學，促使在教材準備與教學過程中都要注意

到培養學生掌握應用統計方法的能力。最近一些統計學家如 Garfield (1995)、Wild(1995)、與 Moore(1997)等均提倡仿效數學教學,大量使用掌上型計算機及繪圖機來輔助統計教學,可以使學生迅速獲得資料整理的結果,如直方圖、長條圖、或折線圖等。這是在考慮效率的前提下,使學生可以透過輔助性工具,直接掌握資料的數學操作的結果,進而直街培養統計概念,而不必花大量的時間在分類、製作圖表與冗長的計算上,使學生喪失學習統計的熱忱與興趣。然而,要注意的是,不可讓學習統計課程轉換成「學習操作」計算機及繪圖機的課程。因為計算機的操作是利用統計方法對統計對象所做的實踐活動,並非統計方法與統計對象。

3. 教材內容應同時注意解決統計問題的流程。

統計的形式化知識,如概念、定理、公式等,都明顯地印在教科書上,不易被忽略。然而,統計方法卻有如一個有機體的生命現象,是無形的、不易捉摸的、不易文字形容的。一般人看得到是外在的形式軀殼,卻看不到、掌握不到內在的精神。傳統的統計教學幾乎把所有的精力都花在對知識的傳授之鑽研,卻少有注意蘊涵在統計知識中的方法。因此,教師在準備教材與授課時亦應注意到有關統計知識活動流程如下(蘇國樑, 1997):



並從流程中發掘、提煉出統計方法,並在教學時明確地闡述方法的作用。

例如,在平均數的區間估計中,信賴區間的推導雖然需要十分複雜的數學知識和背景,但是其結果卻是一個簡單的數學計算式,然而這裡面也包含了統計方法。首先,現實界的问题是認識資料集。其次,思考認識資料集與平均數之間有何關聯,並提供認識平均數的方法。再次,利用數學方法計算出平均數與信賴區間。最後,利用平均數及其信賴區間來認識原來的統計對象。

在教學的過程中,每當遇到類似的情形,就應盡可能地提出解決統計問題的實質方法,儘量開闊學生對現實界和問題的視野,關心統計知識的活動流程,而不是把注意力侷限於計算與變換技巧的小枝節上。

統計方法不只是解決考題的技巧性方法,還需注意哪些思考問題中帶有一般性的認識論之方法。例如,歸納、演繹、先具體後抽象、先簡易後複雜、部份與整體的關係等等,將這些思維方法融入日常的統計教學中,習慣成自然地提高學生思考問題的層次。

4. 統計方法提供了宏觀的穩定性。

要提高統計方法對統計對象的說服力,是要能明顯地說明統計事件發生的一種穩定性。數學方法配合機率分配模型推導出隨機事件,並說明了事件發生的機率性或偶然性。

然而，這種“機率性或偶然性”卻提供了統計方法和其結果對統計對象之一種宏觀的穩定性，從而具體化對統計方法和其結果的“信心程度”，因為機率是一種“相對的出現次數”的表現。例如，當 n 個樣本來自變異數 σ^2 是個已知數但平均數 μ 卻未知的常態母體，爲了描述母體平均數 μ ，可以先利用在樣本統計量 \bar{X} 的抽樣分配，即在 \bar{X} 的機率分配模型上，找出一個隨機事件

$$\left\{ \bar{X} : -z_{\frac{\alpha}{2}} < \frac{\bar{X} - \mu}{\sigma/\sqrt{n}} < z_{\frac{\alpha}{2}} \right\} \quad (1)$$

其發生的機率是 $(1-\alpha)$ 。事件(1)中左、右兩邊的不等式，進行簡單的數學移項後，即可得(1)式中包含 μ 之機率爲 $(1-\alpha)$ 的隨機區間

$$\bar{X} - z_{\frac{\alpha}{2}} \frac{\sigma}{\sqrt{n}} < \mu < \bar{X} + z_{\frac{\alpha}{2}} \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \quad (2)$$

不等式(2)不只是解自樣本 \bar{X} 「統計量之抽樣分配」中的一個「隨機事件(stochastic event)」，且是求出 μ 的信賴區間。也就是說，在長期地、宏觀地觀察下，可以提供對 μ 的思考方向或範圍的該區間之長期穩定性(long-run stability)或信賴度是 $100(1-\alpha)\%$ 。

5. 配合情境，認識同一方法在不同教材內容或情境中的作用。

根本建構主義的倡導者 von Glaserfeld 對知識獲得所提出論點可以得到：「學生藉由建構知識來學習；學生藉由主動參與學習活動來學習；學生只有在實際操作上才能學得操作方法。」(Garfield, 1995)因此，配合情境的實踐方法可培養認識、操作統計方法。

有些統計方法，如各種隨機抽樣法、變異數分析法、最小平方法，不只適用於某特定的教材，而且適用於許多不同情境的問題。在不同情境的問題解決中，使用了相同的方法，可以加深對這種統計方法之功能的認識，並提高認識統計方法的充分性。教師應當適時地引導學生進行教材與方法的回憶，一方面可以顯示方法的實用性，另一方面可以使學生從聯繫、對照中學會更靈活地運用這些方法。例如，變異數分析是藉由比較各母體間平均數的差異，以達到比較多個母體差異之功能，而非只分析個別母體的變異數，因為平均數是用來描述母體特性的數值之一。故只要是等價於比較各母體間的差異，皆可使用變異數分析法。

6. 對不同類型的統計方法應採取不同的教學要求與不同教學方法。

對整體性的統計方法，如點估計法、區間估計法、統計假設檢驗法等，應著重理解其思想實質，認識到它們對統計對象的整體作用；對邏輯性統計方法的教學，如最小平方法、不偏與最小變異法、最大概度法等，則應著重釐清假設條件及其邏輯結構，要求學生正確地使用邏輯推理形式。對容易混淆不清的地方，如強調某些統計命題的成立原因、否定的

理由；某些命題成立的充份條件、必要條件的表示方式與判定；並用實際的例子來闡釋。譬如，類比是有助於數學發現的一種邏輯方法(鄭毓信, 1985)，藉助它在數學方法上的地位和作用，應用類比法推廣已有的性質、發現新的統計事實；對技巧性高的統計方法，則應著重培養運用方法的技巧，擴大應用方法的範圍。

7. 注意各類統計方法的綜合運用。

在解決不同情境或條件下的統計問題，需要不同的統計方法，這些不同的統計方法的交互綜合應用，不僅可以熟練統計方法，亦可以提高統計能力。David Vere-Jone(1995)提出合作學習法或小組學習法是培養綜合運用統計方法的一種教學方式。因為知識由學生自行建構，因此，Garfield(1995)在綜合 Johnson、Johnson 和 Smith 及 Goodsell et al 等分別在 1991 年與 1992 年的研究，提出小組實際操作統計問題時，學生必須積極地、主動地參與統計對象的認識，統計問題的設定，提出各種解決問題的統計方法，與小組成員進行統計結論的溝通，最後辯證統計對象與統計認識間的關聯和預期差異。

參、統計思維之培養

若統計知識是統計思維對統計對象之活動過程的抽象結果，則整個統計教學過程就是統計思維活動的表現過程。因此，如何通過統計教學而培養出學生的自發性統計思維，就成為值得探討的重要課題。

如何加強、培養學生的統計思維能力，可以注意下列幾點：

1. 使學生對統計思維本身的內容有明確的認識。

長久以來在統計教學中過份地強調數學思維與邏輯思維，特別是演繹邏輯，因而導致了統計教育陷入未將統計思維和知識與現實界的統計對象相匹配(match)的弊病。而且教師也僅教給學生以「再現性思維」、「總結性思維」的思維慣性，造成學生只能對已學過的知識或經驗做出理解與應用，這裡的「再現性思維」、「總結性思維」是指在思維過程中只重現已有的記憶結果，譬如，對統計公式的單純記憶。因此，為了發展出學生的創造性統計思維，必須改進傳統之統計教學中，把統計思維歸類於數學思維或單純地將統計理解成演繹邏輯思維。即，需要改變這種具有隸屬性的舊觀念。應該視數學思維與邏輯思維是促進統計思維的基石，故可藉之以豐富、發展出能賦與統計對象意義的統計思維。另外，亦需考慮將非邏輯思維如直覺、想像、頓悟等也納入統計思維的組成部份，這樣的統計教育才能不僅是賦與學生「再現性思維」，而且是能培養出學生的「創造性思維」。這裡需要強調的是，「創造性思維」不是只有產生於大發明或大創造，而是一般在解決或證明實際統計問題與命題的過程中亦會產生的。例如，在尋求資料集的“相對次數分配”和“機率

分配模型”的匹配過程中就充滿了創造性思維。

2. 通過概念教學培養統計思維

統計的概念教學，首先需要引入「統計認識」概念。包括確立統計對象，建立思維情境，及對感性材料、事物進行分析、抽象、概括。倘若教師能適時地結合有關統計史或是與統計相關的科學史，並討論或辯證統計知識和方法發展的過程，將是培養學生創造性思維的好時機。例如，適時地提出、討論數學運算與機率分配模型在統計方法中的意義、統計方法與數學方法的關聯、統計對象與數學對象的差異、統計的目的與功能、機率與統計的密切關係等等(蘇國樑，1997)。這就是說，統計的概念教學任務，不僅是要解決「如何」的問題，更重要的是又要解決「為何」的問題，及在此概念基礎上如何建立與發展理論的問題。即說明統計概念的歷史背景及發展過程。

其次，是針對概念的理解過程，這一過程是關於複雜的認識與思維過程。理解概念是較高層次的認識，這是面對新情境或對象時，對舊的知識與概念進行同化或調適，使之能解釋新的情境或對象。這也是將舊思維系統應用到新對象，故是建立新的思維系統的平衡過程。

爲了使學生正確地、有效地理解統計概念，進而培養出統計思維，教師在建立思維情境，激發學生的學習動機與興趣後，還要進一步引導學生對統計概念之定義的結構進行分析，明確地說明統計概念的內涵與外延(蘇國樑，1997)。在此一基礎上啓發學生歸納、概括出基本性質、適用範圍、與利用概念進行辯證等。也就是說，希望從概念的形成過程中，既可培養學生針對解決統計問題的創造性思維能力，又可使他們學到科學的研究方法。

最後還需指出，概念教學的主要目的之一在於應用概念解決問題。因此，教師還應闡明統計概念及其特性在現實統計問題的應用。例如，指數機率模型可以用來描述顧客等候的時間分配，亦可以用來說明電器用品的壽命(life time)的分配等。從應用概念的角度來看，教學中不應只局限於獲得概念的共通本質特徵和引入概念的定義，還要學會將各種統計對象納入概念的本領。即掌握判斷統計對象是否隸屬於既有概念的能力。從心理層面而言，從應用抽象概念到具體的實際情境過渡時，學生一般會遇到很大的困難。因爲這不但既要牽涉到抽象的邏輯思維，更要求助於非邏輯思維；而且還需能給抽象思維賦予具體的統計意義，或是給抽象思維賦予具體的統計對象。

總而言之，統計的概念教學從引入統計對象、理解對象內容、建立統計認識、應用統計概念等各個階段，都伴隨著重要的創造性思維活動過程。因而，每個階段都能達到培養學生統計思維的目的。

3. 藉由統計模型的推導過程培養學生的統計思維。

統計模型的推導過程就是一個尋求、發現、及導出模型的思維過程。它需要牽涉到思維系統中的每一個成份，是一個複雜的思維過程，因而也涉及到數學思維和邏輯思維。統計模型、定理反映出了統計對象的各種屬性之間的關係。關於這些關係的認識，需要教師盡量創造條件和列舉實例，從感性認識和學生已有的經驗知識入手。鼓勵學生主動地和積極地參與學習統計模型、定理，讓學生了解到模型或定理的形成和實踐過程，使學生體會到求真的喜悅和滿足。

另一方面，統計模型一般是建立在觀察現實界的基礎上，透過分析、比較、歸納、類比、想像與概括成抽象的命題及其數學表徵式。這是一個思考、估計、猜想的思維過程。因此，最好在教師引導下，讓學生獨立完成「發現」模型或結論。這是既有利於學生創造性思維的訓練，也有利於學生釐清模型的條件與結論，從而奠定進一步做出嚴格論證的基礎。

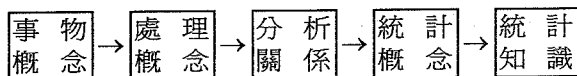
模式與定理的講解與推導是統計教學的重點，因為它擁有雙重的任務，一是它的推導方法具有所謂的一般性，學生掌握了這些具有代表性的方法後可以達到「舉一反三」的效果和目的。二是透過模式之講解與推導，提供學生發展出創造性思維的可能路徑。

在統計教學中還需要注意使學生真正地掌握知識的內在聯繫或關係，這也是人的認識由感性提升到理性的一個重要層面，統計的每一個模型、定理、法則在實質上都是為了解釋某一種統計對象所蘊涵的內在聯繫或關係。

總之，一個現實問題展現在學生面前，首先應使學生從整體上掌握問題所指的對象全貌。利用直覺猜測、概括出其規律性或屬性，在初步建立的確定感的基礎上，再透過積極的思維活動，從認識結構裡提煉出有關的訊息、思路和方法，再以數學的表徵形式呈現其統計關係或規律。最後才能給出嚴格的邏輯證明。

4. 藉由統計問題的解決流程培養學生的統計思維。

多數的統計學者與數學教育學者贊成利用計算器與繪圖器進行輔助教學，認為在迅速獲得所需要的數據後，可以直接地且迅速地掌握到統計的概念。筆者以為迅速獲得數據是肯定的，但無法確定學生能否掌握到統計的概念，卻通常會養成學生依賴機器的慣性，造成只有“操作機器”的思維。為了避免忽略學科的思維，這裡提出統計知識的建立流程如下(蘇國樑，1997)：



配合統計解題活動的過程以強化統計思維能力。

統計解題活動的過程與統計思維有著密切的關聯。當事物概念引發了統計對象的認識後，對象的認識確立對象的初步內容關係，從而建立了關係的假設模型，接著分析、檢驗模型的統計顯著性，對統計顯著性與否的判斷和解釋可得到原有統計對象的整體概念。再將整個流程轉化成統計社群所約定成俗的、數學表徵或語言的過程中，不但培養了學生統計溝通、表達能力，亦建立了學生的統計知識內容。對這整體的流程而言就是培養學生統計思維的路徑。

這說明了統計問題解決的實踐活動有助於統計思維的培養與統計思維的建立，或者可以說，統計思維與統計知識是統計實踐活動的產物。

肆、結論

Robert V. Hogg(1991)、Peter J. Bickel(1994)及 David S. Moore、Goerge W. Cobb、Joan Gardfield 和 William Q. Meeker(1995)等多為統計教育學者，從 1980 年代後期與 1990 年代初期開始，便不斷地關心與探討機率與統計的教育與教學的問題。因為當數學與自然科學正在進行教育改革時，機率與統計教育是不容易倖免的。因此，他們建議機率與統計的學者與專家應開始正視幾個問題，就是學生在學習機率與統計的過程中所產生的困擾，以及機率與統計的傳統教材與傳統教學方法的合適性。

Robert V. Hogg(1991)指出高等教育已經面臨一個需要改革的時代，又指出人們對優秀的教學與更具競爭力的畢業生的要求日益高漲(Hogg & Hogg, 1995)。C. J. Wild(1995)亦指出應將品質管制的概念引進大學教學，藉以評鑑顧客——學生及企業界等——對大學的教學服務的滿意度，以求提高教學品質與效率。筆者針對時代趨勢提出關於統計教學的淺見，即藉著培養學生的統計思維與統計方法來提高統計教學的效果、學生的統計能力、與各界對統計教學的滿意度。然而，真正影響學科思維與教學方法是學科的教育目標，而學科的本質意義與功能卻主導著學科的教育目標(蘇國樑，1997)。因此，統計教學的改進或統計教育的提升都有賴於對統計哲學與統計教育哲學的深入探討，這將是個重要的研究課題。

參考資料

1. 鄭毓信(1985)，《數學方法論入門》，浙江教育出版社。
2. 王仲春等著(1989)，《數學思維與數學方法論》，高等教育出版社。
3. 蘇國樑(1998)，“統計學教學的隔空實施”，《遠距教育》，第 5 期，中華民國遠距教育學會。

(下轉 33 頁)