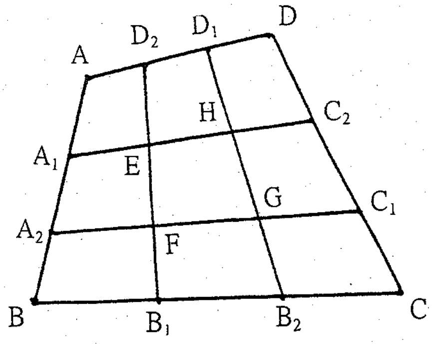
一道幾何計算題的推廣

余進發
臺南市大成國民中學

設四邊形 ABCD 的面積爲 S，連接兩組對邊上對應的三等分點的連線把四邊形 ABCD 分割爲 9 個小四邊形（如圖一），試求中間小四邊形 EFGH 的面積。



圖一

首先證明 E、F 爲 $\overline{B_1D_2}$ 的三等分點。

連 $\overline{A_1D_2}$ 、 $\overline{BD}$ 、 $\overline{B_1D_2}$ ，如圖二，

$\dfrac{\overline{AD_2}}{\overline{AD}}=\dfrac{1}{3}=\dfrac{\overline{AA_1}}{\overline{AB}}$ ， $\dfrac{\overline{CC_2}}{\overline{CD}}=\dfrac{2}{3}=\dfrac{\overline{CB_1}}{\overline{CB}}$ ；

$\therefore \overline{A_1D_2}\,/\!/\,\overline{BD}$ ， $\overline{A_1D_2}=\dfrac{1}{3}\overline{BD}$ ，

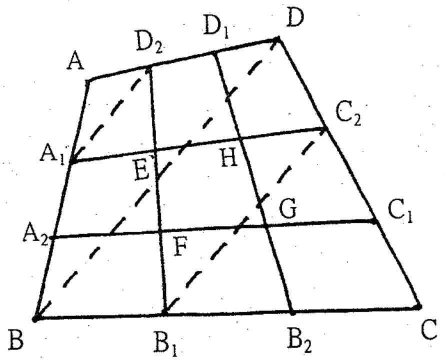
$\overline{B_1C_2}\,/\!/\,\overline{BD}$ ， $\overline{B_1C_2}=\dfrac{2}{3}\overline{BD}$ ；

因而 $\Delta A_1D_2E \sim \Delta C_2B_1E$ 。

$\therefore \dfrac{\overline{D_2E}}{\overline{EB_1}}=\dfrac{\overline{A_1D_2}}{\overline{B_1C_2}}=\dfrac{1}{2}$ ，

即 $\overline{D_2E}=\dfrac{1}{3}\overline{D_2B_1}$ ，同理 $\overline{FB_1}=\dfrac{1}{3}\overline{D_2B_1}$ ，如此可得 E、F 爲 $\overline{B_1D_2}$ 的三等分點。

同樣可證 H、G 爲 $\overline{B_2D_1}$ 的三等分點。



圖二

再依據拙作“一道幾何證明題”（載本刊第 206 期）一文中，已證出的性質：

“在四邊形 ABCD 中，E、F 和 H、G 分別是 $\overline{AD}$ 和 $\overline{BC}$ 的三等分點；則四邊形 EFGH 的面積等於四邊形 ABCD 的面積的三分之一。”，可得

$$S_{EFGH}=\frac{1}{3}S_{D_2B_1B_2D_1}\text{ ， }S_{D_2B_1B_2D_1}=\frac{1}{3}S\text{ ；}$$

故 $S_{EFGH}=\dfrac{1}{9}S$ 。

依據上述解法，我們可得一般結論：

“設四邊形 ABCD 的面積爲 S，連接四邊形兩組對邊上對應的 n 等分點（n 爲奇數）

的連線分割該四邊形，則其正中間小四邊形的面積爲 $\frac{1}{n^2}S$。”

接著我們再考慮更一般的問題：

“如果把 $\overline{AB}$ 和 $\overline{CD}$ 分爲 m 等分，而 $\overline{BC}$ 和 $\overline{AD}$ 分爲 n 等分（m、n 爲奇數），則其中間小四邊形的面積爲 $\frac{1}{mn}S$。”

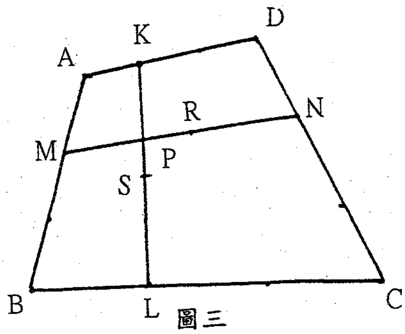
我們首先證明，連接四邊形兩組對邊 $\overline{AD}$ 和 $\overline{BC}$ 分點的每一線段，被 $\overline{AB}$ 和 $\overline{CD}$ 分點的連線分爲 m 等分。

爲此只須證明，如果點 K、L、M、N 分別在 $\overline{AD}$、$\overline{BC}$、$\overline{AB}$、$\overline{DC}$ 邊上（如圖三），使得

$\overrightarrow{AK}=\alpha\overrightarrow{AD}$，$\overrightarrow{BL}=\alpha\overrightarrow{BC}$，$\overrightarrow{AM}=\beta\overrightarrow{AB}$，$\overrightarrow{DN}=\beta\overrightarrow{DC}$；

則 $\overline{KL}$ 和 $\overline{MN}$ 的交點 P 分它們爲同樣的比例，即

$$\overrightarrow{MP}=\alpha\overrightarrow{MN}，\overrightarrow{KP}=\beta\overrightarrow{KL}。$$



圖三

我們利用“同一法”來證明這點。

在 $\overline{MN}$ 與 $\overline{KL}$ 上取點 R 和 S，使得

$$\overrightarrow{MR}=\alpha\overrightarrow{MN}，\overrightarrow{KS}=\beta\overrightarrow{KL}。$$

那麼

$$\overrightarrow{AM}+\overrightarrow{MR}=\beta\overrightarrow{AB}+\alpha\overrightarrow{MN}=\beta\overrightarrow{AB}+\alpha\left(\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{DN}\right)=\beta\overrightarrow{AB}-\alpha\beta\overrightarrow{AB}+\alpha\overrightarrow{AD}+\alpha\beta\overrightarrow{DC}；$$

$$\overrightarrow{AK}+\overrightarrow{KS}=\alpha\overrightarrow{AD}+\beta\overrightarrow{KL}=\alpha\overrightarrow{AD}+\beta\left(\overrightarrow{KA}+\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BL}\right)=\alpha\overrightarrow{AD}-\alpha\beta\overrightarrow{AD}+\beta\overrightarrow{AB}+\alpha\beta\overrightarrow{BC}。$$

$\because \overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{DC}$，即 $\overrightarrow{BC}-\overrightarrow{AD}=\overrightarrow{DC}-\overrightarrow{AB}$，$\therefore \overrightarrow{AM}+\overrightarrow{MR}=\overrightarrow{AK}+\overrightarrow{KS}$，故 $R=S=P$。

由拙作“一道幾何證明題”一文中的“結語”知，$\overline{AD}$、$\overline{BC}$ 分點連線分出的 n 個小長條四邊形中間的一個四邊形 I，其面積 $S_I=\frac{1}{n}S$。上述證明的結論又告訴我們，$\overline{AB}$、$\overline{DC}$ 的分點連線與四邊形 I 豎的兩邊的交點又將兩豎邊 m 等分，故同理可得其中間小四邊形面積 $=\frac{1}{m}S_I=\frac{1}{mn}S$。

上述結論的證明除了“向量法”外，我們也可以用一般幾何方法來證明。

在四邊形 ABCD 中，點 K、L、M、N 分別在 $\overline{AD}$、$\overline{BC}$、$\overline{AB}$、$\overline{DC}$ 邊上（如圖四），若 $\overline{AK}=\alpha\overline{AD}$，$\overline{BL}=\alpha\overline{BC}$，$\overline{AM}=\beta\overline{AB}$，$\overline{DN}=\beta\overline{DC}$；試證：$\overline{MP}=\alpha\overline{MN}$，$\overline{KP}=\beta\overline{KL}$。

連 $\overline{AN}$、$\overline{DM}$、$\overline{KM}$、$\overline{KN}$，則

$$\Delta KAM=\alpha\Delta ADM=\alpha\left(S_{ADNM}-\Delta DMN\right)$$

$$\Delta KDN=(1-\alpha)\Delta ADN=(1-\alpha)\left(S_{ADNM}-\Delta AMN\right)$$

得 $\Delta KMN=S_{ADNM}-\Delta KAM-\Delta KDN=S_{ADNM}-\alpha\left(S_{ADNM}-\Delta DMN\right)-(1-\alpha)\left(S_{ADNM}-\Delta AMN\right)$

$=\alpha\Delta DMN+(1-\alpha)\Delta AMN$

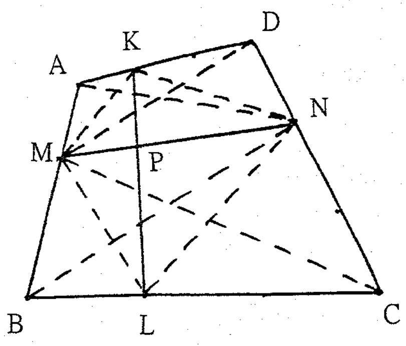
連 $\overline{BN}$ 、 $\overline{CM}$ 、 $\overline{LM}$ 、 $\overline{LN}$ ，同理可得

$\Delta LMN=\alpha\Delta CMN+(1-\alpha)\Delta BMN$

又 $\dfrac{\Delta DMN}{\Delta CMN}=\dfrac{\beta}{1-\beta}=\dfrac{\Delta AMN}{\Delta BMN}$

$\therefore \dfrac{\overline{KP}}{\overline{PL}}=\dfrac{\Delta KMN}{\Delta LMN}=\dfrac{\beta}{1-\beta}$

故 $\overline{KP}=\beta\overline{KL}$ 。同理可證 $\overline{MP}=\alpha\overline{MN}$ 。



圖四

參考資料

1. 張景中（1995）：《平面幾何新路》。臺北市，九章出版社，p.62-73。
2. 陰東升，卞瑞玲，徐本順（1995）：《數學中的特殊化與一般化》。南京市，江蘇教育出版社，p.220-223。
3. 楊克昌（1994）：《兩個面積計算趣題》。北京市，中學生數學 79 期，p.17-18。
4. 佘進發（1998）：《一道幾何證明題》。臺北市，科學教育月刊 206 期，p.11-15。

（上接 29 頁）

討論

1. 爲何試管內的茶水沸騰後，還要再加熱一段時間？
2. 試管被冷水包住後極易沸騰，由此實驗得知沸點不是固定的，爲什麼？
3. 爲什麼在山上，米不容易煮熟？有何辦法解決？
4. 氣泡不再冒出後，如果再降低試管頂部的溫度（越冷），則液體會再沸騰（越開花），想一想，如何可使液體再沸騰？
5. 最後，打開橡皮塞，會有『ㄅㄛ』的聲音，爲什麼？

註

1. 由於試管直接加熱，要特別注意安全；試管口不可對人：加熱時要時時搖動試管；加熱完畢試管底部溫度很高，不要被燙傷。
2. 如用飲水機或開飲機的熱水泡茶（單純的熱水亦可），更可節省加熱試管的時間。用茶水的目的在於比較容易起泡，且著色易見。
3. 在本實驗，要事先準備 3 個冷水袋，分別裝(1)冷水，(2)冰與水，(3)冰與加有食鹽的水，其用意在於更易觀察到越冷越開花（沸騰）的效果。