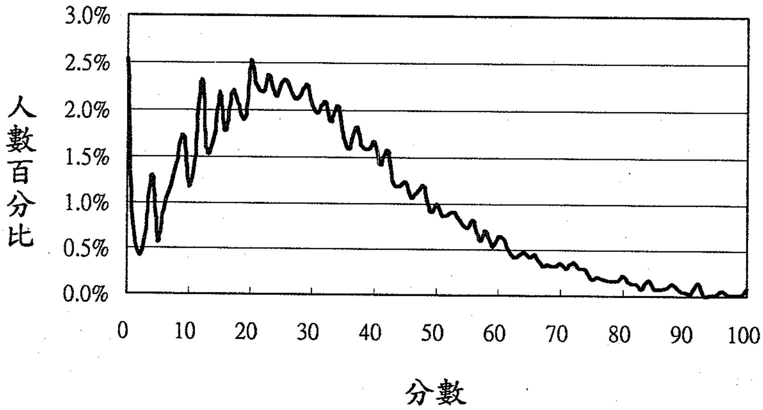
八十七學年度大學聯考數學科試題評析

黃淑琴
大學入學考試中心　研究發展處

大學聯考一結束，根據媒體報導，不少人認爲今年自然組數學比去年難，預估高、低標比去年（高標：55 分，低標：38 分）低約 10 分；社會組數學則比往年簡單，預估高、低標比去年（高標：58 分，低標：39 分）高約 10 分。的確，聯招會經統計後的數據亦顯示，今年自然組數學的高、低標分別爲 46 分、31 分；社會組數學的高標則高達 70 分，而低標也達到 46 分，都是近幾年所罕見。由圖一、圖二可看出自然組的成績偏低，多集中在 20～32 分；社會組的分佈曲線比較平緩，其中 60 分以上的人數所佔的百分比相當大，且 30 分以下的人數百分比較小。值得一提的是，由平緩的成績分佈曲線可得知，社會組試卷在鑑別學生能力的功能上，可以說非常顯著。

此外，這兩份試卷的題數均不多，與去年相同，自然組一共 13 題，而社會組一共 14 題，故考生能有較充裕的時間作答。各題的配分也比較平均，所以不致產生難度高的選擇題配分太少的現象。



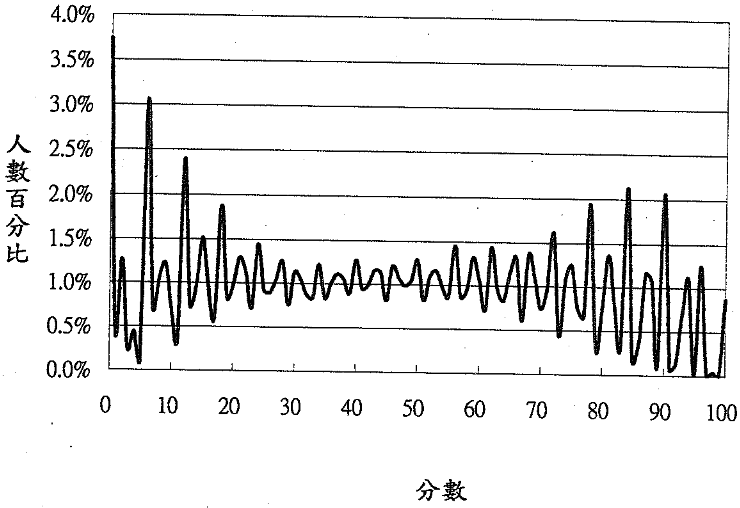
圖一　八十七學年度大學聯考自然組數學成績分佈圖

一、試題特色

若從教材內容、測驗目標、試卷版面等來分析今年數學科的試題，可發現幾個特色，簡述如下：

1. 麻雀雖小，五臟俱全

雖然今年試卷的題數不多，但是各冊的內容分佈較平均（表一），教材的涵蓋層面較廣泛（表二、表三）。



圖二　八十七學年度大學聯考社會組數學成績分佈圖

表一　87 大學聯考數學科各冊配分表

冊　別	自然組		社會組	
	題　號	配　分	題　號	配　分
一	選 1,填 1,二	24	選 1,填 1,填 2	20
二	選 2,選 3,選 4	18	選 2,填 6,二,三	34
三	選 6,填 2	16	選 3,選 4,填 4,填 5	28
四	選 5,填 3	16	填 3,填 7,填 8	18
理上	填 4,三	18		
理下	填 5	8		

至於測驗目標，自然組數學在概念性、程序性、解題能力等層次上是三足鼎立，幾近平均分佈（表二）；社會組數學則是概念性與程序性試題各佔約 30%，解題能力佔約 40%（表三）。

2. 運用之妙，存乎一心

今年社會組數學的每一個試題，所涉及的概念不多，即使需要計算，過程並不繁複。考生只要照著題目的意思或條件思考，不難想出解法。這些就是爲什麼很多人認爲今年社會組數學比往年簡單的主因。

表二　87 大學聯考自然組數學雙項細目表

教材內容 / 題號 / 測驗目標	數	函數與方程式	幾何	排列組合與機率統計	微積分	配分
	一(1)	一(3),(5) 二(1),(3)	二(4) 三(1)	四(2),(3)	理上(1),(2),(3) 理下(1)	
概 念 性		選 2,填 1	選 6	選 5		30
程 序 性	選 1	選 3,二			填 4,填 5	38
解題能力			選 4,填 2	填 3	三	32
配　分	6	30	22	16	26	

表三　87 大學聯考社會組數學雙項細目表

教材內容 / 題號 / 測驗目標	數	函數與方程式	幾何	排列組合與機率統計	配分
	一(2)	一(3),(5) 二(1) 三(2),(3),(4)	二(2),(4) 三(1),(3)	四(1),(2),(3)	
概 念 性		選 1,選 2,選 3	選 4		32
程 序 性	填 2	填 1,二		填 8	28
解題能力		填 4	填 5,填 6,三	填 3,填 7	40
配　分	6	46	30	18	

至於自然組數學比去年難的原因是，不少試題的難度與所選用的解題工具有關，如選擇題 4，相信大部分的考生是利用正、餘弦定理來解題，由於步驟多一些，加上考試氣氛緊張，稍不注意計算極可能出錯，這麼一來便加深了題目的難度。事實上，若採用向量來解題，過程比較簡單，沒有想像中的困難。此外，兩題計算題對多數考生而言難度過高，尤其是計算題三，主要的工具是微分，但是牽涉符號的處理，學生便不知所措。

如何將平日所累積的學習經驗與知識運用在考試上，全憑個人巧思，也涉及每個人對概念的純熟度。因此，惟有不斷的練習，持之以恆，才是學習數學的正確態度。

3. 兼籌並顧，因時制宜

大學聯招試務為配合印題作業，試卷有張數的限制，數學科試卷在只能印成一張的條件下，今年的設計採雙面印刷，每一個題目的下方均留空白。這種權宜之策，不僅方便考生計算，也減少視覺與心理壓力，一舉數得。

二、考生作答統計資料

這一節提供統計資料，以了解考生作答情形，至於統計值的計算與定義，請參閱 [1]，限於篇幅，不加贅述。

1. 選擇題

表四列出了兩組考生選擇題的答對率 P 與鑑別度 D，其中社會組考生作答情形良好，且每一題的鑑別度皆大於 0.4，極能區分考生能力；自然組數學除了第 6 題是極難之外，第 3，4 題是中等偏難，其餘則屬簡易題。鑑別度除了第 1 題之外，其餘皆良好。由於第 1 題的答對率高達 84%，低鑑別度是可以預期的，但是這並不意味著第 1 題的設計不當。相反的，一份試卷最好設計一、二個類似的簡易試題，尤其是試卷的第 1 題，難度不宜過高，目的有穩定考生情緒的作用，也能增加信心。

表四　87 大學聯考數學選擇題答對率與鑑別度

題號	自然組				社會組			
	單選	多選	P(%)	D	單選	多選	P(%)	D
1	✓		84	0.25	✓		50	0.74
2	✓		51	0.46		✓	70	0.56
3	✓		36	0.45		✓	49	0.67
4	✓		34	0.47		✓	47	0.44
5		✓	71	0.37				
6		✓	4	0.49				

註：多選題以得分率代替答對率

2. 非選擇題

非選擇題分爲填充題與計算題兩部分，自然組填充題佔 40 分，社會組填充題佔 48 分，計算題則皆爲 20 分。其中任一部分未得分的考生人數百分比可參考表五，得分的累積人數百分比如表六。顯然自然組計算題二、計算題三，及社會組計算題二的作答情形不理想。

表五　87 大學聯考數學非選擇題未得分的人數百分比

題型 / 人數百分比 / 組別	填充題	計算題二	計算題三
自然組	27%	54%	56%
社會組	12%	24%	45%

表六 87大學聯考數學非選擇題得分累積人數百分比

分數	自然組			社會組		
	填充題(40分)	計算題二(10分)	計算題三(10分)	填充題(48分)	計算題二(10分)	計算題三(10分)
48				4%		
42				11%		
40	1.2%					
36				20%		
32	6%					
30				31%		
24	16%			43%		
18				57%		
16	37%					
12				71%		
10		11%	1.8%		43%	26%
8	70%					
6				84%		
5		17%	25%		55%	30%
2		43%	36%		63%	47%

三、試題評析舉隅

例 1. 【87聯自然組數學選擇題4】

設 ΔABC之$\angle A = 60°$, $\overline{AC} = b$, $\overline{AB} = c$ 。今在 $\overline{BC}$ 上取一點 D ，使得 $\overline{BD} = \frac{1}{3}\overline{BC}$ 。令 $s = \overline{AD}$ ，則 s^2 等於

(A) $\frac{1}{9}(b^2+4c^2+4bc)$　(B) $\frac{1}{9}(b^2+4c^2+2bc)$　(C) $\frac{1}{9}(b^2+4c^2-2bc)$

(D) $\frac{1}{9}(4b^2+c^2+2bc)$　(E) $\frac{1}{9}(4b^2+c^2-2bc)$

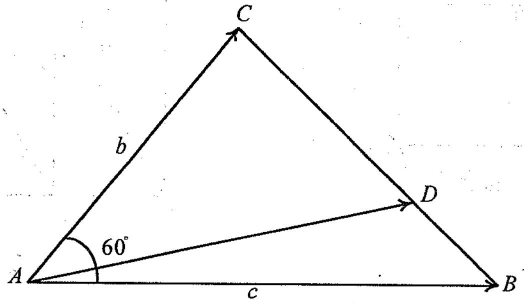
評析：這一題可能會讓很多考生選擇以正、餘弦定理爲工具來作答，雖然照樣可以求出答案，由於過程比較多一點，加上時間有限，稍不留意，極可能功虧一簣，如此便成爲難題。若利用向量來解題，問題就容易多了。首先，由分點公式可知(如圖一)

$$\overrightarrow{AD} = \frac{2}{3}\overrightarrow{AB} + \frac{1}{3}\overrightarrow{AC}$$

其次 $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = bc\cos 60° = \frac{1}{2}bc$ 。

注意向量長度的平方等於此向量與其本身的內積。因此，

$$\begin{aligned}(\overline{AD})^2 &= (\frac{2}{3}\overrightarrow{AB}+\frac{1}{3}\overrightarrow{AC})\cdot(\frac{2}{3}\overrightarrow{AB}+\frac{1}{3}\overrightarrow{AC})\\ &=\frac{4}{9}(\overline{AB})^2+\frac{1}{9}(\overline{AC})^2+\frac{4}{9}\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}\\ &=\frac{1}{9}(b^2+4c^2+2bc)\end{aligned}$$



圖一

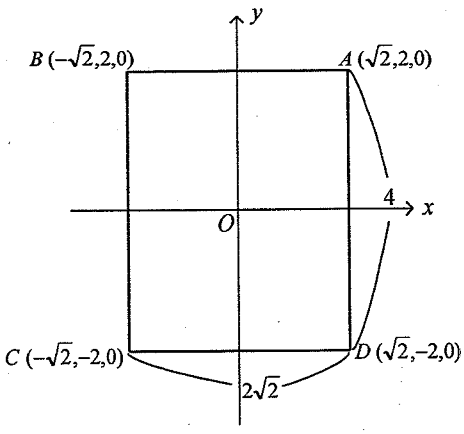
例 2. 【87 聯自然組數學選擇題 6】

設$(\sqrt{2}, 2, 0)$, $(-\sqrt{2}, 2, 0)$, $(-\sqrt{2}, -2, 0)$, $(\sqrt{2}, -2, 0)$為一正立方體的四個頂點，則下列的那些點也為此正立方體的頂點？

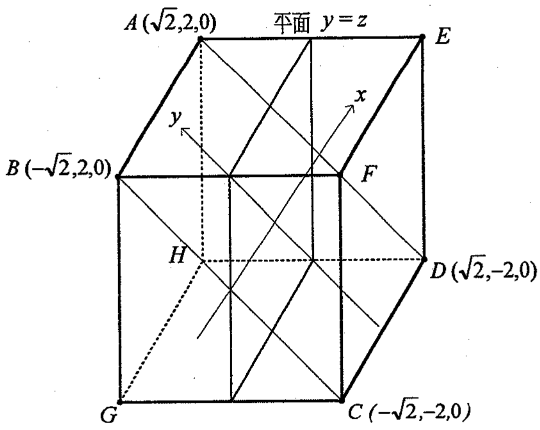
(A) $(\sqrt{2}, 0, 2)$　(B) $(0, 2, \sqrt{2})$　(C) $(\sqrt{2}, 2, 4)$

(D) $(\sqrt{2}, 2, 2\sqrt{2})$　(E) $(-\sqrt{2}, 0, -2)$

評析：這個題目有 43%的考生誤選(C)，52%的考生誤選(D)，由此可知，有不少考生誤以為題目中的四個頂點是位於此正立方體的同一個面。若同學們能先將這四個頂點標在坐標平面上(圖二)，觀察一下即可知道四邊形 $ABCD$ 的長與寬是不相等的(長＝4，寬＝$2\sqrt{2}$)。那麼四邊形 $ABCD$ 與正立方體的關係又是如何？同學們只要能想通這一點，繪出圖形加以觀察即可，並不需要複雜的計算或技巧。事實上，這個題目的重點在於圖形的對稱性。首先，我們注意到 A,B,C,D 是位於 xy 一平面，且在正立方體的兩組對角線上。因此，根據正立方體的對稱性，其餘四個頂點 E,F,G,H 也在正立方體的另外兩組對角線上，且位於 xz 一平面(圖三)。再者，由於 A,B,C,D 分別與 E,F,G,H 對稱於平面 $y=z$，所以只要分別將 A,B,C,D 的 y-坐標與 z-坐標對調，就可以找到 E,F,G,H 的坐標。



圖二



圖三

例 3.【87 聯自然組數學選擇題 3】

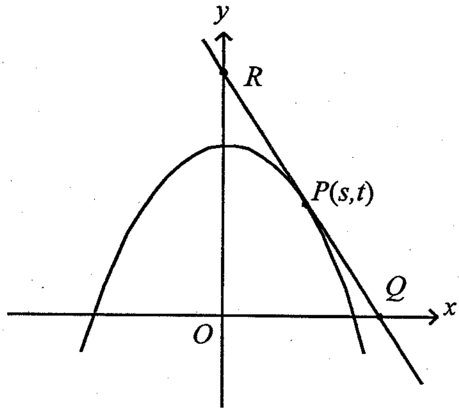
設 $a>0$, $O(0,0)$為原點。在拋物線 $ay=a^2-x^2$ 上取一點 $P(s,t)$，$s>0$。過 P 點作拋物線之切線，交 x 軸、y 軸於 Q、R 兩點。當 P 點變動時，ΔOQR 面積的最小值為何？

評析：這個題目主要是測驗學生是否會利用導數求極值。同學們也練習過不少這類的題目，但都是特定的函數，不像題目中拋物線方程式的係數是未給定的。再加上 P 點坐標也是以符號表示(注意 P 點是可變動的)，整個題目除了原點坐標之外，其餘的訊息似乎太抽象了，完全得靠個人的想像與詮釋。但是想像不出來的便手足無措，詮釋錯誤的又不知所云，真不知如何是好？

這裏提供一個解法，讓同學們參考。首先，同學們解題之前，可以作圖的就先畫圖，一方面畫出拋物線 $ay=a^2-x^2$ 的圖形，一方面了解問題。由於 $a>0$，此拋物線 $y=-\dfrac{1}{a}x^2+a$ 開口向下，頂點爲(0, a)，且對稱於 y 軸(圖四)。在拋物線的右支上，任意標上點 $P(s,t)$，過點 P 作拋物線的切線。則此切線分別交 x 軸、y 軸於 Q、R 兩點。

當 P 點變動時，Q、R 兩也隨之改變，則 ΔPQR 面積的最小值是多少？同學們了解題意之後，可試著分析解法。這是一個極值問題，基本工具是導數測試法，也就是說利用導數求極值。大致分成三個步驟：(1)以一個變數寫出 ΔPQR 的面積函數 f，(2)利用一階導數求出 f 的臨界點，(3)檢驗臨界點是否產生極值。這三個步驟當中，以步驟 3 最容易被忽略，很多學生一找到臨界點，便以爲它就是發生極值的地方，而不進一步檢驗，這是非常不好的習慣。請同學們務必

記住，雖然 0 是 $g(x)=x^3$ 的臨界點，但是 $g(0)=0$ 卻不是 g 的極值。



圖四

先求出 $y=-\frac{1}{a}x^2+a$ 的導函數 $y'=-\frac{2}{a}x$。因此過點 $P(s,t)=(s, a-\frac{s^2}{a})$ 的切線斜率爲 $-\frac{2s}{a}$，且此切線方程式爲

$$y=-\frac{2s}{a}x + \frac{a^2+s^2}{a}$$

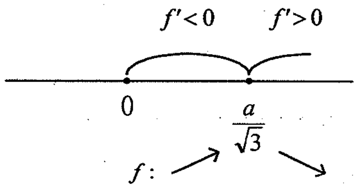
所以 Q 點坐標爲$(\frac{a^2+s^2}{2s}$，0)，R 點坐標爲（0，$\frac{a^2+s^2}{a}$）。

那麼 ΔPQR 的面積爲 $\frac{1}{2}\cdot\frac{a^2+s^2}{2s}\cdot\frac{a^2+s^2}{a}=\frac{(a^2+s^2)^2}{4as}$。

假設 $f(s)=\frac{(a^2+s^2)^2}{s}$ (注意常數 $\frac{1}{4a}$ 不影響解法)。這個問題相當於求 $f(s)$ $(s>0)$ 的極值。因爲

$$\begin{aligned} f'(s) &= \frac{s\cdot 2(a^2+s^2)\cdot 2s-(a^2+s^2)^2}{s^2} \\ &= \frac{(s^2+a^2)(3s^2-a^2)}{s^2} \\ &= \frac{(s^2+a^2)(\sqrt{3}s-a)(\sqrt{3}s+a)}{s^2} \end{aligned}$$

故 f 的臨界點爲 $\frac{a}{\sqrt{3}}$($-\frac{a}{\sqrt{3}}$不合)。另一方面，由於導函數 f' 在 $\frac{a}{\sqrt{3}}$ 的左右兩邊改

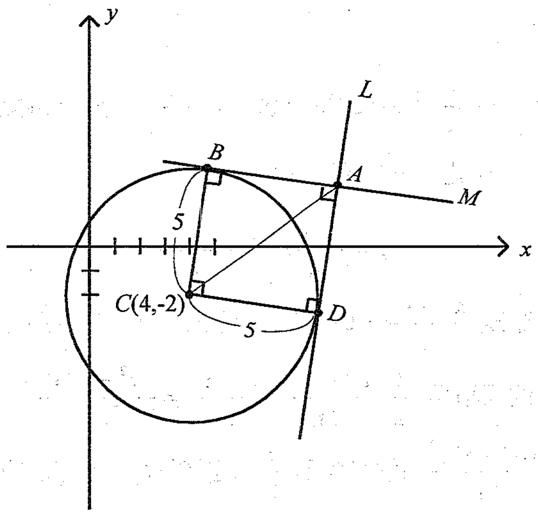


變符號，也就是說當 $0<s<\dfrac{a}{\sqrt{3}}$ 時，f 遞增，當 $s>\dfrac{a}{\sqrt{3}}$ 時，f 遞減，所以 $f(\dfrac{a}{\sqrt{3}})=\dfrac{16a^3}{3\sqrt{3}}$ 為 f 的極小值，且 ΔPQR 之最小面積為 $\dfrac{1}{4a}\cdot\dfrac{16a^3}{3\sqrt{3}}=\dfrac{4a^2}{3\sqrt{3}}$。

例 4. 【87 聯社會組數學填充題 5】

一圓的方程式為 $x^2+y^2-8x+4y-5=0$，考慮此圓任意兩條互相垂直切線的交點，所有這種交點所成圖形的方程式為＿＿(5)＿＿。

評析：這個題目乍看之下似乎很難，無法立刻判斷圖形，更遑論寫出方程式。其實，作圖才是了解問題的最佳途徑。先將此圓方程式化成標準式，得 $(x-4)^2+(y+2)^2=25$。故此圓之圓心為 $C(4,-2)$，半徑為 5 (如圖五)。



圖五

畫出任意兩條互相垂直的切線 L 與 M，假設 L 與 M 相交於點 A。想一想動點 A 所成的圖形是什麼？先看看切線與此圓的關係，既然相切，那麼 $L\perp\overline{CD}$，$M\perp\overline{BC}$。因此四邊形 $ABCD$ 有三個角 $\angle A,\angle B,\angle D$ 是直角(圖五)。因為四邊形內角和等於 360°，所以 $\angle C=90°$。換句話說，四邊形 $ABCD$ 是一個鄰邊等長 $(\overline{BC}=\overline{CD}=5)$ 的矩形，所以是個正方形。因此 $\overline{AC}=5\sqrt{2}$。再對這個結果作深入的詮釋，即任意兩條互相垂直切線的交點至點 $C(4,-2)$ 的距離為 $5\sqrt{2}$。同學們應該知道答案了吧，這些交點所成的圖形就是以 C 為圓心，$5\sqrt{2}$ 為半徑的圓，故方程式為 $(x-4)^2+(y+2)^2=50$。

例 5. 【87 聯社會組數學填充題 6】

設 $A(a,1)$、$B(2,b)$ 與 $C(3,4)$ 為坐標平面上三點，而 O 為原點。若向量 $\overrightarrow{OA}$ 與 $\overrightarrow{OB}$ 在

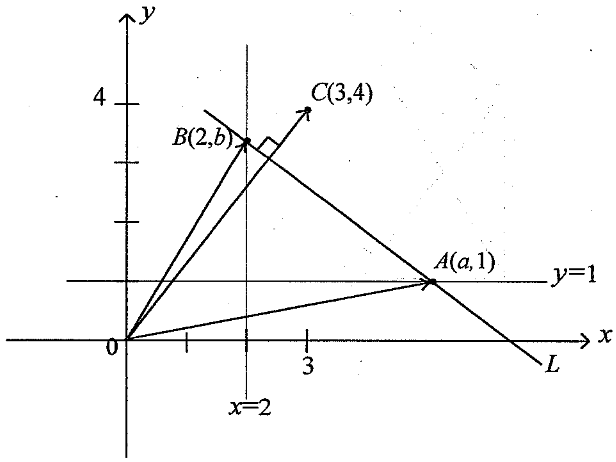
向量 $\overrightarrow{OC}$ 上的正射影相同，則 a 與 b 滿足的關係式為＿(6)＿。

評析：這個題目常用的解法有兩種，一種是求向量的正射影，可能是大部分考生所使用的方法；另一種是直線斜率，這個方法的構想得自對正射影的直觀了解，說明如下。

在坐標平面上，作出 $\overrightarrow{OC}$，直線 $x=2$ 與 $y=1$。其次，任意畫一條垂直於 $\overline{OC}$ 的直線 L。假設 L 分別與直線 $x=2$，$y=1$，相交於點 A，B。同學們仔細看看圖六，將不難發現 $\overrightarrow{OA}$ 與 $\overrightarrow{OB}$ 在 $\overrightarrow{OC}$ 上的正射影是相同的。由於 $\overline{AB}\perp\overline{OC}$，所以

$$\frac{b-1}{2-a}=-\frac{3}{4}$$

故 $3a-4b=2$。



圖六

例 6. 【87 聯社會組數學計算題三】

設 ΔABC 為一直角三角形，□$BCDE$ 是以 $\overline{BC}$ 為一邊向外作出的正方形。若 $\overline{BC}=5$、$\overline{CA}=4$、$\overline{AB}=3$，試求

(1) $\cos(\angle ACD)$。

(2) ΔACD 的面積。

評析：這個題目有 45%的考生沒有得分(表五)。我們先畫個圖(圖七)，看看是否能幫助思考。題目已假設 ΔABC 爲直角三角形，其實從 ΔABC 的三個邊長 3,4,5 也可得知這是一個直角三角形。或許是命題者擔心考生不易察覺，一開始就提醒，這麼一來問題單純多了，也不必藉助餘弦定理，只要知道三角函數的餘角關係

式即可完成。

因爲 $\angle A=90^\circ$，所以 $\sin(\angle ACB)=\frac{3}{5}$。因此

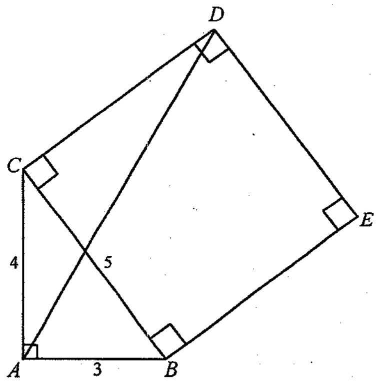
$$\cos(\angle ACD)=\cos\left(\angle ACB+\frac{\pi}{2}\right)=-\sin(\angle ACB)=-\frac{3}{5}$$

且

$$\sin(\angle ACD)=\sin\left(\angle ACB+\frac{\pi}{2}\right)=\cos(\angle ACB)=\frac{4}{5}$$

所以

$$\Delta ACD\text{的面積}=\frac{1}{2}\cdot\overline{AC}\cdot\overline{CD}\cdot\sin(\angle ACD)=\frac{1}{2}\cdot4\cdot5\cdot\frac{4}{5}=8$$



圖七

四、學習方針

同學們在學校接受長期的數學教育，吸收不少數學概念，學習了許多解題的方法與技巧，亦參加無數次的大、小考試，以鍛鍊應考的能力，爲的就是希望在大學入學考試時一展身手，可以說是養軍千日，用在一時。

數學是一個著重思考與練習的學科，除了須具備清晰的概念之外，利用這些概念去解決一個問題的能力亦非常重要。不論是概念的建立，或是解題能力的培養，絕非記憶背誦就能達到的，惟有將概念融會貫通，並學習以不同的角度思考一個問題，才能得到完整全方位的知識，碰到難題，自能迎刃而解。

五、問題探討

目前主要的大學入學方式有二，其一爲傳統的大學聯考，其二爲推薦甄試。這兩者最大的差別是後者將考試分成二個階段，第一段爲學科能力測驗，主要測驗學科的基本能

力，作爲檢定之用；第二段則爲指定項目甄試，主要是評量學生是否具備特殊專長與性向，由各校系自行辦理。推薦甄試至今已試辦五年，成效不錯，頗爲高中師生所接受。

若兩段式的大學入學考試成爲未來的趨勢，那麼學科能力測驗本身，以及學科能力測驗與教學的關係，將爲大家所關注。以下提出幾個問題，和教育工作者一起思考：

1. 目前的學科能力測驗，是否能測驗出學生的基本能力？學校的教學能否因此得到正面影響？
2. 那些數學概念或能力是學生上大學就讀所不可或缺的(分文、理兩組)？
3. 學科能力測驗的多選題是否應比照大學聯考，採取答錯倒扣的模式？
4. 學科能力測驗的填充題，除了目前的題型之外，是否尚有其他的電腦可讀式題型？
5. 學科能力測驗應如何分級？每一級的意義如何界定？試題如何與各級分配合？

或許每個人對以上的問題，見解不同，但是關心數學教育的程度是一致的。八十八學年度起，高中教材將全面開放，採一綱多本政策，相信那個時候教材的核心課程將成爲高中教學的重要課題。

參考資料

1. 黃淑琴，八十六學年度大學入學考試試題分析(數學科)，大學入學考試中心，1998。

誌　謝

感謝臺灣大學數學系楊宏章教授與臺灣師範大學化學系蕭次融教授對本文所提供的建議，以及大學入學考試中心資訊管理處協助統計資料的處理。

（上接68頁）

下午搭機返台，終於回到美麗的寶島。

記得我報告得獎的那天，有個韓國學生問我“*How did you win the game?*”我回答“*I don't know. Just do it!*”沒錯，Just do it。我覺得任何事不必在意有沒有收穫，重要的是有沒有盡力去做，因爲在這之中，已經學到了很多東西。例如互相合作與互相信任。

此次活動的最終目的，也是希望各國間能互助合作，不論是經濟上還是學術上，因爲每一件成功的事一定是很多人的合作與支持。

天啊！現在是早上5：30，我已經連續寫六小時了，還是草草結束吧！