柯西不等式的變形與推廣

林雲壽
國立臺灣師大附中

柯西不等式在現行高中數學教材中，佔有相當重的份量。同樣的，柯西不等式在各種數學競賽，常可看得到其蹤跡。柯西不等式有許多有趣的變形，在證明某類不等式的時候，往往有事半功倍的效果。本文介紹幾個有趣的變形及柯西不等式的推廣，並舉例說明其應用，提供給有興趣參加數學競賽的同學做為參考。

一、柯西不等式的變形

（定理１） 設 $a_i \in R$，$b_i \in R^+ (i=1,2,\cdots\cdots,n)$ 則

$$\frac{a_1^2}{b_1}+\frac{a_2^2}{b_2}+\cdots\cdots+\frac{a_n^2}{b_n} \geq \frac{(a_1+a_2+\cdots+a_n)^2}{b_1+b_2+\cdots+b_n}$$（等號成立 $\Leftrightarrow a_i = kb_i, i=1,2,\cdots,n$）

證明：由柯西不等式知

$$\left(\frac{a_1^2}{b_1}+\frac{a_2^2}{b_2}+\cdots+\frac{a_n^2}{b_n}\right)(b_1+b_2+\cdots+b_n) \geq (a_1+a_2+\cdots+a_n)^2$$

故 $$\frac{a_1^2}{b_1}+\frac{a_2^2}{b_2}+\cdots+\frac{a_n^2}{b_n} \geq \frac{(a_1+a_2+\cdots+a_n)^2}{(b_1+b_2+\cdots+b_n)}$$

等號成立 $\Leftrightarrow \dfrac{a_i}{\sqrt{b_i}} = k\sqrt{b_i}, i=1,2,\cdots,n$

$\Leftrightarrow a_i = kb_i, i=1,2,\cdots,n$

（定理２） 設 a_i 是不全為零的非負實數，b_i 是正實數，$i=1,2,\cdots,n$

則 $$\frac{a_1}{b_1}+\frac{a_2}{b_2}+\cdots+\frac{a_n}{b_n} \geq \frac{(a_1+a_2+\cdots+a_n)^2}{a_1b_1+a_2b_2+\cdots+a_nb_n}$$（等號成立 $\Leftrightarrow b_1=b_2=\cdots=b_n$）

證明：$$\frac{a_1}{b_1}+\frac{a_2}{b_2}+\cdots+\frac{a_n}{b_n} = \frac{a_1^2}{a_1b_1}+\frac{a_2^2}{a_2b_2}+\cdots+\frac{a_n^2}{a_nb_n} \geq \frac{(a_1+a_2+\cdots+a_n)^2}{a_1b_1+a_2b_2+\cdots+a_nb_n}$$（由定理１）

等號成立 $\Leftrightarrow a_i = ka_ib_i, i=1,2,\cdots,n$

$\Leftrightarrow b_i = \dfrac{1}{k}, i=1,2,\cdots,n$

$\Leftrightarrow b_1 = b_2 = \cdots = b_n$

定理 1 提供當欲證明某類分式級數不等式時，可以直接將各個分子開方相加後再平方，各個分母直接相加。定理 2 實際上是定理 1 的推論，將定理 2 不等式的分子分母各乘

以a_i，變成定理 1 的不等式。

例 1. 設 a，b，c > 0，求證$\frac{a^2}{b+c}+\frac{b^2}{c+a}+\frac{c^2}{a+b}\geq\frac{a+b+c}{2}$（第二屆友誼杯競賽）

證明：不等式的左邊屬於定理 1 的形式，利用定理 1 知，

$$\frac{a^2}{b+c}+\frac{b^2}{c+a}+\frac{c^2}{a+b}\geq\frac{(a+b+c)^2}{(b+c)+(c+a)+(a+b)}=\frac{(a+b+c)^2}{2(a+b+c)}=\frac{a+b+c}{2}$$

（類題 1）設$a_i>0$，$1\leq i\leq n$，求證

$$\frac{a_1^2}{a_2+a_3}+\frac{a_2^2}{a_3+a_4}+\cdots+\frac{a_{n-1}^2}{a_n+a_1}+\frac{a_n^2}{a_1+a_2}\geq\frac{a_1+a_2+\cdots+a_n}{2}$$

例 2.設$0<a_i<1$，$i=1,2,\cdots,n$，$a_1+a_2+\cdots+a_n=s$，求證

$$\frac{a_1}{1-a_1}+\frac{a_2}{1-a_2}+\cdots+\frac{a_n}{1-a_n}\geq\frac{ns}{n-s}$$ （Shapiro 不等式）

證明：不等式的分子沒有平方，爲定理 2 的形式，

$$\frac{a_1}{1-a_1}+\frac{a_2}{1-a_2}+\cdots+\frac{a_n}{1-a_n}=\frac{a_1^2}{a_1-a_1^2}+\frac{a_2^2}{a_2-a_2^2}+\cdots+\frac{a_n^2}{a_n-a_n^2}$$

$$\geq\frac{(a_1+\cdots a_n)^2}{(a_1+\cdots+a_n)-(a_1^2+\cdots+a_n^2)}\geq\frac{s^2}{s-\frac{s^2}{n}}=\frac{ns}{n-s}$$

其中，$a_1^2+a_2^2+\cdots+a_n^2=\frac{a_1^2}{1}+\frac{a_2^2}{1}+\cdots+\frac{a_n^2}{1}\geq\frac{(a_1+a_2+\cdots+a_n)^2}{1+1+\cdots+1}=\frac{s^2}{n}$

(類題 2) 設$a_i>0(1\leq i\leq n)$，$a_1+a_2+\cdots+a_n=s$，求證

$$\frac{a_1}{s-a_1}+\frac{a_2}{s-a_2}+\cdots+\frac{a_n}{s-a_n}\geq\frac{n}{n-1}$$

如果定理 1 或定理 2 不等式的分子是三次或三次以上，應如何處理呢？這必須介紹柯西不等式的再變形。欲證明柯西不等式的再變形，就必須介紹柯西不等式的推廣。柯西不等式的次數是二次的，能不能推廣到三次或三次以上呢？答案是肯定的，請看「廣義的柯西不等式」。

二、柯西不等式的推廣

（定理３） 設$a_{ij}>0(i=1,2\cdots,n;\ j=1,2,\cdots,m)$，自然數$m,n\geq2$，則

$$(a_{11}^m+a_{22}^m+\cdots+a_{n1}^m)(a_{12}^m+a_{22}^m+\cdots+a_{n2}^m)\cdots(a_{1m}^m+a_{2m}^m+\cdots+a_{nm}^m)$$
$$\geq(a_{11}a_{12}\cdots a_{1m}+a_{21}a_{22}\cdots a_{2m}+\cdots+a_{n1}a_{n2}\cdots a_{nm})^m$$

（用符號表示爲 $\left(\sum_{i=1}^{n}a_{i_1}^{m}\right)\left(\sum_{i=1}^{n}a_{i_2}^{m}\right)\cdots\left(\sum_{i=1}^{n}a_{im}^{m}\right)\geq\left(\sum_{i=1}^{n}a_{i_1}a_{i_2}\cdots a_{im}\right)^{m}$ ）

證明：令 $\sum_{i=1}^{n}a_{ij}^{m}=S_j^m\quad(j=1,2,\cdots,m)$

及 $a_{i1}a_{i2}\cdots a_{im}=T_i\ (i=1,2,\cdots,n)$

原式等價於 $(S_1S_2\cdots S_m)^m\geq(T_1+T_2+\cdots+T_n)^m$

即欲證明 $\dfrac{T_1+T_2+\cdots+T_n}{S_1S_2\cdots S_m}\leq 1$ ……………………………… ①

由算幾（平均）不等式知，對每一個 $i=1,2,\cdots,n$,

$$\frac{T_i}{S_1S_2\cdots S_m}=\frac{a_{i1}a_{i2}\cdots a_{im}}{S_1S_2\cdots S_m}\leq\frac{\left(\frac{a_{i1}}{S_1}\right)^m+\left(\frac{a_{i2}}{S_s}\right)^m+\cdots+\left(\frac{a_{im}}{S_m}\right)^m}{m}$$

將上面 n 個不等式（ $i=1,2,\cdots,n$ ）相加，得

$$\frac{T_1+T_2+\cdots+T_n}{S_1S_2\cdots S_m}\leq\frac{\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{a_{i1}}{S_1}\right)^m+\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{a_{i2}}{S_2}\right)^m+\cdots+\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{a_{im}}{S_m}\right)^m}{m}=\frac{\overbrace{1+1+\cdots+1}^{m\text{個}}}{m}=1$$

這就證明了①，於是廣義的柯西不等式成立。

註：①當 $m=2$ 時，$\left(\sum_{i=1}^{n}a_{i_1}^2\right)\left(\sum_{i=1}^{n}a_{i_2}^2\right)\geq\left(\sum_{i=1}^{n}a_{i1}a_{i2}\right)^2$ 就是柯西不等式。

②當 $n=2$ ， $m=3$ 時，得 $(a_{11}^3+a_{21}^3)(a_{12}^3+a_{22}^3)(a_{13}^3+a_{23}^3)\geq(a_{11}a_{12}a_{13}+a_{21}a_{22}a_{23})^3$

與傳統柯西不等式比較知，若二次改成三次，左式的乘項改成 3 個括號相乘，右式也改成對應三項相乘。

利用廣義的柯西不等式可以證明算術平均與幾何平均的混合不等式，也是著名的 Carlson 不等式。

（定理４）（算幾混合不等式）（ Carlson 不等式）

設 $a_{ij}>0(1\leq i\leq n,1\leq j\leq m)$ ， m ， $n\in N$ ， $m\geq 2$ ， $n\geq 2$ ，則

$$\sqrt[m]{\left(\frac{\sum_{i=1}^{n}a_{i1}}{n}\right)\left(\frac{\sum_{i=1}^{n}a_{i2}}{n}\right)\cdots\left(\frac{\sum_{i=1}^{n}a_{im}}{n}\right)}\geq\frac{\sum_{i=1}^{n}\sqrt[m]{a_{i1}a_{i2}\cdots a_{im}}}{n}$$

證明：由廣義柯西不等式的兩邊各除以 n^m ，且 a_{ij} 改寫 b_{ij} ，

$$\frac{\left(\sum_{i=1}^{n} b_{i1}^{m}\right)\left(\sum_{i=1}^{n} b_{i2}^{m}\right)\cdots\left(\sum_{i=1}^{n} b_{im}^{m}\right)}{n^{m}} \geq \left(\frac{\sum_{i=1}^{n} b_{i1}b_{i2}\cdots b_{im}}{n}\right)^{m}$$

兩邊開 m 次方，

$$\sqrt[m]{\left(\frac{\sum_{i=1}^{n} b_{i1}^{m}}{n}\right)\left(\frac{\sum_{i=1}^{n} b_{i2}^{m}}{n}\right)\cdots\left(\frac{\sum_{i=1}^{n} b_{im}^{m}}{n}\right)} \geq \frac{\sum_{i=1}^{n} b_{i1}b_{i2}\cdots b_{im}}{n}$$

現在令 $a_{ij} = b_{ij}^{m} (1 \leq i \leq n, 1 \leq j \leq m)$ 代入上式得

$$\sqrt[m]{\left(\frac{\sum_{i=1}^{n} a_{i1}}{n}\right)\left(\frac{\sum_{i=1}^{n} a_{i2}}{n}\right)\cdots\left(\frac{\sum_{i=1}^{n} a_{im}}{n}\right)} \geq \frac{\sum_{i=1}^{n} \sqrt[m]{a_{i1}a_{i2}\cdots a_{im}}}{n}$$

註： Carlson 不等式是算幾混合不等式，解釋如下：

$a_{11}\ \ a_{12}\cdots\cdots a_{1m}$	左表是 $n \times m$ 的正數矩陣，
$a_{21}\ \ a_{22}\cdots\cdots a_{2m}$	m 行的算術平均的幾何平均
$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$	大於或等於 n 列的幾何平均
$a_{n1}\ \ a_{n2}\cdots\cdots a_{nm}$	的算術平均。

例 3. 設 $0 < \theta < \frac{\pi}{2}$，求 $\frac{2}{\sin\theta} + \frac{3}{\cos\theta}$ 的最小值。（民國 72 年大學聯考題）

解　碰到變數在分母，可用柯西不等式解決，但是可以利用的恆等式是 $\sin^2\theta + \cos^2\theta = 1$，因 $\left(\frac{2}{\sin\theta} + \frac{3}{\cos\theta}\right)(\sin^2\theta + \cos^2\theta)$ 無法消去 $\sin\theta$ 與 $\cos\theta$，所以必須將 $\frac{2}{\sin\theta} + \frac{3}{\cos\theta}$ 變成兩個自乘，

$$\left(\frac{2}{\sin\theta} + \frac{3}{\cos\theta}\right)\left(\frac{2}{\sin\theta} + \frac{3}{\cos\theta}\right)(\sin^2\theta + \cos^2\theta)$$

$$= \left[\left(\sqrt[3]{\frac{2}{\sin\theta}}\right)^3 + \left(\sqrt[3]{\frac{3}{\cos\theta}}\right)^3\right]\left[\left(\sqrt[3]{\frac{2}{\sin\theta}}\right)^3 + \left(\sqrt[3]{\frac{2}{\cos\theta}}\right)^3\right]\left[\left(\sqrt[3]{\sin^2\theta}\right)^3 + \left(\sqrt[3]{\cos^2\theta}\right)^3\right]$$

$$\geq \left(\sqrt[3]{\frac{2}{\sin\theta}}\sqrt[3]{\frac{2}{\sin\theta}}\sqrt[3]{\sin^2\theta} + \sqrt[3]{\frac{3}{\cos\theta}}\sqrt[3]{\frac{3}{\cos\theta}}\sqrt[3]{\cos^2\theta}\right)^3 = \left(\sqrt[3]{2^2} + \sqrt[3]{3^2}\right)^3$$

故 $\left(\frac{2}{\sin\theta} + \frac{3}{\cos\theta}\right)^2 \geq \left(\sqrt[3]{2^2} + \sqrt[3]{3^2}\right)^3$

即 $\dfrac{2}{\sin\theta}+\dfrac{3}{\cos\theta}\geq\left(2^{\frac{2}{3}}+3^{\frac{2}{3}}\right)^{\frac{3}{2}}$ ………最小值

等號成立 $\Leftrightarrow \dfrac{2}{\sin\theta}:\sin^2\theta=\dfrac{3}{\cos\theta}:\cos^2\theta$

$\Leftrightarrow \tan\theta=\sqrt[3]{\dfrac{2}{3}}$

（類題 3） 例 3 可推廣爲當 $a,b>0$，$n\in N$，$0<\theta<\dfrac{\pi}{2}$ 時，求證

$$\frac{a}{\sin^n\theta}+\frac{b}{\cos^n\theta}\geq\left(a^{\frac{2}{n+2}}+b^{\frac{2}{n+2}}\right)^{\frac{n+2}{2}}$$

等號成立 $\Leftrightarrow \tan\theta=\left(\dfrac{a}{b}\right)^{\frac{1}{n+2}}$

（提示：欲消去 $\sin^n\theta$，須考慮 n 個 $(\sin^2\theta+\cos^2\theta)$ 乘，於是 $\left(\dfrac{a}{\sin^n\theta}+\dfrac{b}{\cos^2\theta}\right)$ 也要考慮兩個自乘）

（類題 4） 設 $a,b>0$，$n\in N$，$n\geq 2$，$0<\theta<\dfrac{\pi}{2}$，求證

$$\frac{a}{\sqrt[n]{\sin\theta}}+\frac{b}{\sqrt[n]{\cos\theta}}\geq\left(a^{\frac{2n}{2n+1}}+b^{\frac{2n}{2n+1}}\right)^{\frac{2n+1}{2n}}$$

等號成立 $\Leftrightarrow \tan\theta=\left(\dfrac{a}{b}\right)^{\frac{n}{2n+1}}$

（提示：欲消去 $\sqrt[n]{\sin\theta}$，必須將 2n 個 $\left(\dfrac{a}{\sqrt[n]{\sin\theta}}+\dfrac{b}{\sqrt[n]{\cos\theta}}\right)$ 自乘，再配合 1 個 $(\sin^2\theta+\cos^2\theta)$ 相乘，可以完全消除分母）

例 4. 設 $a_i>0$，$1\leq i\leq n$，求證 $\sqrt[n]{\dfrac{a_1^n+a_2^n+\cdots+a_n^n}{n}}\geq\dfrac{a_1+a_2+\cdots+a_n}{n}$（冪平均不等式）

證明 將原式變形爲 $\left(a_1^n+a_2^n+\cdots+a_n^n\right)\cdot n^{n-1}\geq\left(a_1+a_2+\cdots+a_n\right)^n$，於是有（廣義）柯西不等式的影子了，將 n^{n-1} 變成 $n\cdot n\cdots n$（ n-1 個自乘），再把 n 改寫爲 $n=1^n+1^n+\cdots+1^n$ 便可以配合前面 $\left(a_1^n+a_2^n+\cdots+a_n^n\right)$，故由廣義柯西不等式知

$$\left(a_1^n+a_2^n+\cdots+a_n^n\right)\underbrace{\left(1^n+\cdots+1^n\right)\cdots\left(1^n+\cdots+1^n\right)}_{n-1\text{ 個}}\geq\left(a_1+a_2+\cdots+a_n\right)^n$$

$$\Rightarrow\left(a_1^n+a_2^n+\cdots+a_n^n\right)\cdot n^{n-1}\geq\left(a_1+a_2+\cdots+a_n\right)^n$$

兩邊各除以 n^n，再兩邊開 n 次方得

$$\sqrt[n]{\frac{a_1^n+a_2^n+\cdots+a_n^n}{n}} \geq \frac{a_1+a_2+\cdots+a_n}{n}$$

三、柯西不等式再變形

如果某類分式不等式的分子分母的次數均過 2 次，該如何利用柯西不等式來證明呢？下面定理 5 可以回答這個問題：

（定理５） 設 $a_i>0$，$b_i>0$，$(i=1,2,\cdots,n)$，$m\in N$，$k\in N$，$k>m$，則

$$\sum_{i=1}^{n}\frac{a_i^k}{b_i^m} \geq n^{1+m-k}\cdot\frac{\left(\sum_{i=1}^{n}a_i\right)^k}{\left(\sum_{i=1}^{n}b_i\right)^m}$$

證明　由廣義柯西不等式知

$$\left(\sum_{i=1}^{n}\frac{a_i^k}{b_i^m}\right)\overbrace{\left(\sum_{i=1}^{n}\sqrt[k-1]{b_i^m}\right)\cdots\left(\sum_{i=1}^{n}\sqrt[k-1]{b_i^m}\right)}^{k\text{-}1\text{ 個}} \geq \left(\sum_{i=1}^{n}a_i\right)^k \quad 與$$

$$\overbrace{\left(\sum_{i=1}^{n}b_i\right)\cdots\left(\sum_{i=1}^{n}b_i\right)}^{m\text{ 個}}\overbrace{(\underbrace{1+\cdots+1}_{n\text{ 個}})\cdots(\underbrace{1+\cdots+1}_{n\text{ 個}})}^{k\text{-}m\text{-}1\text{ 個}} \geq \left(\sum_{i=1}^{n}\sqrt[k-1]{b_i^m}\right)^{k-1}$$

上面兩式相乘，得

$$\left(\sum_{i=1}^{n}\frac{a_i^k}{b_i^m}\right)\left(\sum_{i=1}^{n}\sqrt[k-1]{b_i^m}\right)^{k-1}\left(\sum_{i=1}^{n}b_i\right)^m\cdot n^{k-m-1} \geq \left(\sum_{i=1}^{n}a_i\right)^k\left(\sum_{i=1}^{n}\sqrt[k-1]{b_i^m}\right)^{k-1}$$

$$\Rightarrow \sum_{i=1}^{n}\frac{a_i^k}{b_i^m} \geq n^{1+m-k}\cdot\frac{\left(\sum_{i=1}^{n}a_i\right)^k}{\left(\sum_{i=1}^{n}b_i\right)^m} \quad （等號成立 \Leftrightarrow a_i=\lambda b_i）$$

定理 5 就是柯西不等式再變形，遇到某類分式級數不等式的證明，可以將分子分母直接相加，但是要注意係數 n^{1+m-k}，面舉幾個例子說明。

例 5.　設 $a,b,c,d>0$，$ab+bc+cd+da=1$，求證

$$\frac{a^3}{b+c+d}+\frac{b^3}{a+c+d}+\frac{c^3}{a+b+d}+\frac{d^3}{a+b+c} \geq \frac{1}{3}$$

證明　由定理 5 知

$$\frac{a^3}{b+c+d}+\frac{b^3}{a+c+d}+\frac{c^3}{a+b+d}+\frac{d^3}{a+b+c} \geq 4^{1+1-3}\cdot\frac{(a+b+c+d)^3}{3(a+b+c+d)}=\frac{1}{12}(a+b+c+d)^2$$

如何解決 $(a+b+c+d)^2$ 呢？一定要利用已知條件，

因 $ab+bc+cd+da=(a+c)(b+d)=1$

故 $a+b+c+d=(a+c)+(b+d)\geq 2\sqrt{(a+c)(b+d)}=2$

所以，$\dfrac{a^3}{b+c+d}+\dfrac{b^3}{a+c+d}+\dfrac{c^3}{a+b+d}+\dfrac{d^3}{a+b+c}\geq\dfrac{1}{12}(a+b+c+d)^2\geq\dfrac{1}{12}\cdot(2)^2=\dfrac{1}{3}$

例 6.　設 ΔABC 的三邊長為 a，b，c，令 $S=\dfrac{a+b+c}{2}$，求證

$$\frac{a^n}{b+c}+\frac{b^n}{c+a}+\frac{c^n}{a+b}\geq\left(\frac{2}{3}\right)^{n-2}\cdot S^{n-1}$$

證明　看到分子是高次方就想到用定理 5（小心前置的係數）

$$\frac{a^n}{b+c}+\frac{b^n}{c+a}+\frac{c^n}{a+b}\geq 3^{1+1-n}\cdot\frac{(a+b+c)^n}{2(a+b+c)}=3^{2-n}\cdot\frac{(2S)^{n-1}}{2}=\left(\frac{2}{3}\right)^{n-2}\cdot S^{n-1}$$

例 7.　設 $A_1,A_2,\cdots,A_n$，為任意凸 n 邊形的內角角度，$n\geq 3$，$k\in N$，

求證　$\dfrac{1}{A_1^k}+\dfrac{1}{A_2^k}+\cdots+\dfrac{1}{A_n^k}\geq\dfrac{n^{k+1}}{((n-2)\pi)^k}$

證明　不等式左邊又是分式級數，但是分子的指數必須大於分母的指數，沒關係，我們可以將 1 改成 1^{k+1}，由定理 5 知

$$\frac{1}{A_1^k}+\frac{1}{A_2^k}+\cdots+\frac{1}{A_n^k}=\frac{1^{k+1}}{A_1^k}+\frac{1^{k+1}}{A_2^k}+\cdots+\frac{1^{k+1}}{A_n^k}\geq n^{1+k-(k+1)}\cdot\frac{(1+1+\cdots+1)^{k+1}}{(A_1+A_2+\cdots+A_n)^k}=\frac{n^{k+1}}{((n-2)\pi)^k}$$

(類題 5)　設 $x_i>0$，$i=1,2,\cdots,n$，$x_1+x_2+\cdots+x_n=S$，$k\in N$，$k\geq 2$，

求證 $\dfrac{x_1^k}{S-x_1}+\dfrac{x_2^k}{S-x_2}+\cdots+\dfrac{x_n^k}{S-x_n}\geq\dfrac{S^{k+1}}{(n-1)n^{k-2}}$

（類題 6）設 $a,b,c>0$，$abc=1$，$k\geq 2$，求證 $\dfrac{1}{a^k(a+c)}+\dfrac{1}{b^k(c+a)}+\dfrac{1}{c^k(a+b)}\geq\dfrac{3}{2}$

（提示：本題必須變形且要充分利用 $abc=1$，

$$\text{原式}=\frac{abc}{a^k(b+c)}+\frac{abc}{b^k(c+a)}+\frac{abc}{c^k(a+b)}=\frac{a}{a^k\left(\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right)}+\frac{b}{b^k\left(\frac{1}{c}+\frac{1}{a}\right)}+\frac{c}{c^k\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}\right)}$$

$$=\frac{\left(\frac{1}{a}\right)^{k-1}}{\frac{1}{b}+\frac{1}{c}}+\frac{\left(\frac{1}{b}\right)^{k-1}}{\frac{1}{c}+\frac{1}{a}}+\frac{\left(\frac{1}{c}\right)^{k-1}}{\frac{1}{a}+\frac{1}{b}}\geq 3^{3-k}\cdot\frac{\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right)^{k-1}}{2\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right)}$$

$$=\frac{3^{3-k}}{2}\cdot\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right)^{k-2}\geq\frac{3^{3-k}}{2}\cdot\left(3\sqrt[3]{\frac{1}{abc}}\right)^{k-2}=\frac{3}{2}\text{。）}$$