# 1998年第29屆國際物理奧林匹亞 理論競賽

林明瑞*、郭鴻銘*、蔣亨進**、管惟炎**
*國立臺灣師範大 物理系
**國立清華大學 物理系

請先仔細閱讀以下規定

1. 你只能用所提供之筆書寫。
2. 你只能在答題紙上的正面作答。
3. 答題時文字敘述儘量精簡，答案以方程式、數字和圖形爲主。請摘要將結果塡寫在答案紙上。
4. 除了你的答案和作圖以外，其他任何推導、計算、…等項，只要可作爲評分的參考，請將它們寫在空白的答案紙上。
5. 你也許會解答一個問題中後面部分的小題，但是前面部分的小題可能尚未解出。在這種情況下，你可將前面部分的小題在文中所敘述的結果當作已知，加以運用。
6. 在每張答案紙上標註隊名、學生編號、該頁的頁碼、和總頁數。在空白的答案卷上也要寫上題號。
7. 交卷前，請將答案紙依序排好。將你不希望被評分的資料留在桌子上。

## 第一題 正六角柱的滾動

考慮一個像常見鉛筆形狀的長六角柱剛體（圖 1-1）。六角柱的質量爲M，且均勻分布，其六角形截面的邊長爲 $a$ ，六角柱繞柱心軸的轉動慣量爲

$$I=\frac{5}{12}Ma^2 \quad \cdots\cdots (1)$$

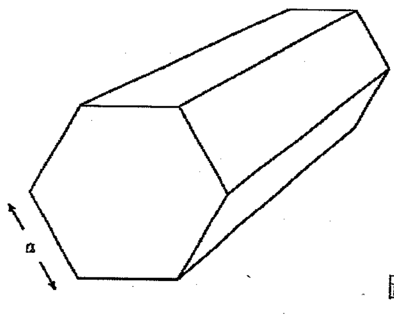


圖 1.1 截面爲正六邊形的固體六角柱。

六角柱繞其稜線的轉動慣量爲

$$I=\frac{17}{12}Ma^2 \quad \cdots\cdots (2)$$

(a) （3.5 分）此六角柱開始時，其中心軸線，沿水平方向靜置於一斜面上。斜面和水平面

的夾角為 $\theta$（圖 1.2）設六角柱的各側面有點微凹，使得六角柱和斜面只在稜線處有接觸，但微凹對其轉動慣量的影響可忽略。今令此六角柱由靜止不均勻的滾下斜面。假設摩擦力阻止六角柱滑動，且角柱維持與斜面接觸。設 $\omega_i$ 為一稜線碰觸斜面前瞬間的角速度。而 $\omega_f$ 為該稜線剛碰觸斜面後瞬間的角速度。試證明我們可寫成下面的關係式：

$$\omega_f = s\,\omega_i \quad \cdots\cdots (3)$$

將 s 值寫在答案卷上。

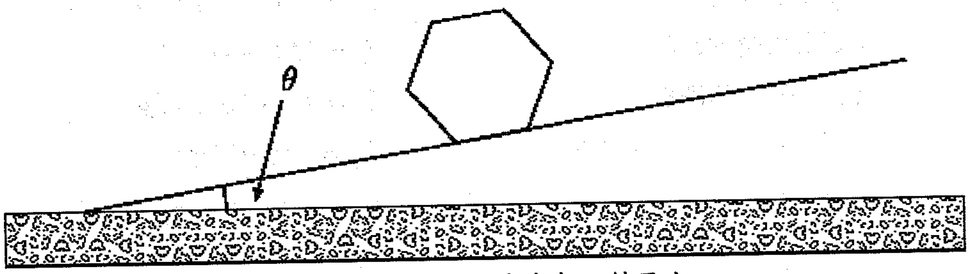


圖 1.2 一正六角柱置放在一斜面上。

(b) （1 分）在角柱稜線和斜面碰撞前、後的瞬間的動能分別為 $K_i$ 和 $K_f$，證明我們可寫成

$$K_f = \gamma K_i \quad \cdots\cdots (4)$$

將係數 $\gamma$ 的數值寫在答案卷上。

(c) （1.5 分）要使得下次的碰撞得以發生，$K_i$ 須大於一最小值 $K_{i,\min}$。它可成為下式：

$$K_{i,\min} = \delta\, Mga \quad \cdots\cdots (5)$$

$g = 9.81 m/s^2$ 為重力加速度。

求係數 $\delta$，用斜角 $\theta$ 和係數 $\gamma$ 表示之，將結果寫在答案卷上（$\gamma$ 用其代數符號，不用寫出數值）。

(d) （2 分）如果（c）題之條件滿足，動能 $K_i$ 隨角柱滾下斜面時，將趨近於一定值 $K_{i,0}$。設此極限值存在，證明 $K_{i,0}$ 可寫為

$$K_{i,0} = \kappa\, Mga \quad \cdots\cdots (6)$$

將係數 $\kappa$ 用 $\theta$ 和 $\gamma$ 表示之，寫在答案卷上。

(e) （2 分）求此不均勻的的滾下運動，一旦啟動後，會繼續不斷的滾下去的最小傾斜角 $\theta_0$，計算要精確到 $0.1^\circ$。將你算出的數值結果寫在答案卷上。

## 第二題 冰帽下的水

冰帽是一層厚冰（可厚達數公里）壓在地表上，在水平方向上可延伸達數十或數百公

里。在本題中，我們要考慮冰的熔化和冰帽下的水的性質。在此情形下，我們假定冰可以像黏滯流體一樣在各處產生壓力之變化，但主要由於在垂直方向上的移動，而使其脆弱容易變形。爲解此題，設下列各量爲已知。

| | |
|---|---|
| 水的密度 | $\rho_w = 1.000 \times 10^3 kg/m^3$ |
| 冰的密度 | $\rho_i = 0.917 \times 10^3 kg/m^3$ |
| 冰的比熱 | $c_i = 2.1 \times 10^3 J/kg{\cdot}^\circ C$ |
| 冰的熔化熱 | $L_i = 3.4 \times 10^5 J/kg$ |
| 岩石及岩漿的密度 | $\rho_r = 2.9 \times 10^3 kg/m^3$ |
| 岩石及岩漿的比熱 | $c_r = 700 J/kg{\cdot}^\circ C$ |
| 岩石及岩漿的潛熱 | $L_r = 4.2 \times 10^5 J/kg$ |
| 地表向外的平均熱流通量 | $J_Q = 0.06 W/m^2$ |
| 冰的熔點 | $T_0 = 0^\circ C$，爲常數 |

(a) （0.5分）假定地表某處有平均熱流向外流出，此處上面覆有一層厚冰帽，用上表中之數値，計算冰帽每年熔化掉的厚度。將你的答案寫在答案卷的方格中。

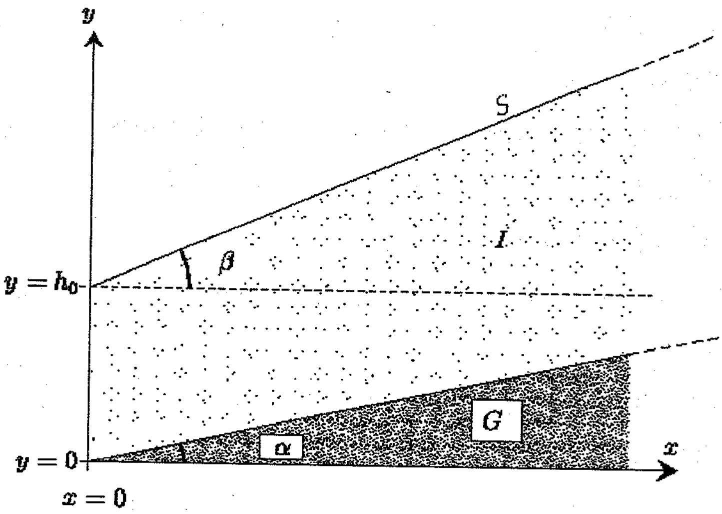


圖 2.1　一靜置於地表斜面上，具有平面表面的冰帽之橫截面圖。S代表冰帽表面，G代表地表，I代表冰帽。

(b) （3.5分）今考慮冰帽的上表面。在冰帽下的地面爲一傾角爲 $\alpha$ 的斜面，冰帽的上表面則爲一傾角爲 $\beta$ 的斜面（如圖 2.1 所示）。冰帽在 x=0 處的厚度爲 $h_0$，冰帽之上面及底面方程式分別爲 $y_1 = x\tan\alpha$，$y_2 = h_0 + x\tan\beta$。

將冰帽底面與地表之間的水層之壓力 p 以水平位置坐標 x 之函數表示之，並將此函數關係寫在答案卷上。

在水層成平衡，亦即水層不向兩旁流動的條件下，寫出 $\beta$ 與 $\alpha$ 之間的數學關係式，證明此數學式的形式為 $\tan\beta = s\tan\alpha$，求出係數 s，將 s 之數學形式寫在答案卷上。在圖 2.2 中，$y_1 = 0.8x$ 為此處地球表面的方程式。在 x=0 處冰層之垂直厚度為 2 公里。假定冰帽下的水層處於平衡狀態，畫出 $y_1(x)$ 的直線，並加上 $y_2(x)$ 直線以表明冰帽之上表面。在圖上標明各直線所指為何。

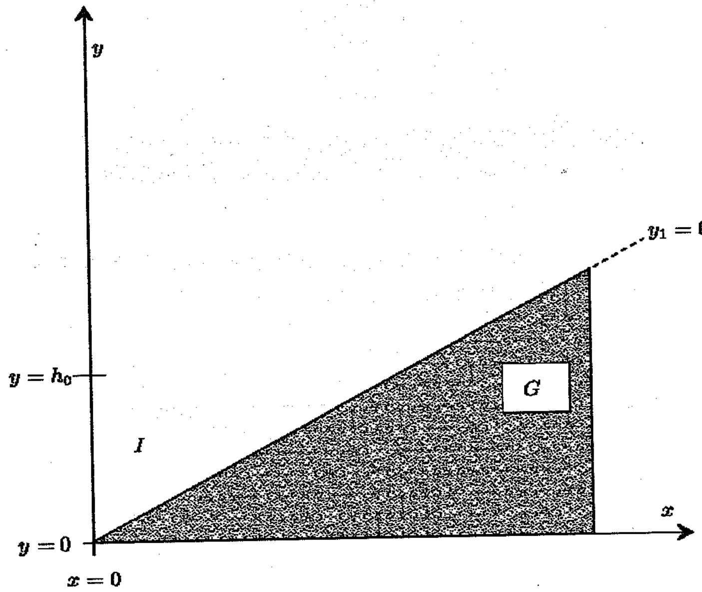


圖 2.2　受熱冰帽靜置在地表斜面上之截面圖，冰帽底面有一層處於平衡狀態的水。G 代表地表，I 代表冰帽。

(c)（1 分）今設有一各處厚度為 2 公里的冰帽，其下突然熔化，產生一高度為 H 及半徑 r 均為 1 公里的圓錐形水體（如圖 2.3 所示），假設其餘未熔化的冰塊僅在垂直方向上移動以適應此種變化。在一空白答案紙上，推導出在水體形成並達成靜液壓力平衡後，冰帽上表面之方程式，並畫出其形狀。

(d)（5 分）一群參與國際合作研究之科學家在年度探險中。在南極研究受熱之冰帽。這地區的冰帽之上表面通常為寬廣的平台形狀，但這次卻發現多一處有如火山口似的凹陷，呈現如圖 2.4 所示的上下倒置的圓錐形，中央下陷的深度為 100m，圓錐半徑為 500m。此處冰層厚度為 2000m。

經過一番討論，科學家們得到下列結論：即在冰帽下面發生小型的火山爆發。小量的岩漿（熔岩）熔穿冰帽的底面，然後凝固並冷卻下來。科學家們以下列方式估算

了岩漿的體積，並且推知冰熔化後所生之水的變動情形。

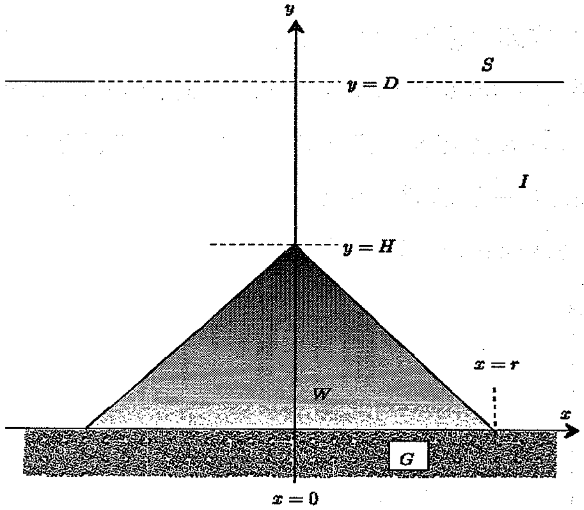


圖 2.3　冰帽中水圓錐體中央之垂直切面圖。S代表冰帽表面，W代表水，G代表地表，I代表冰帽。

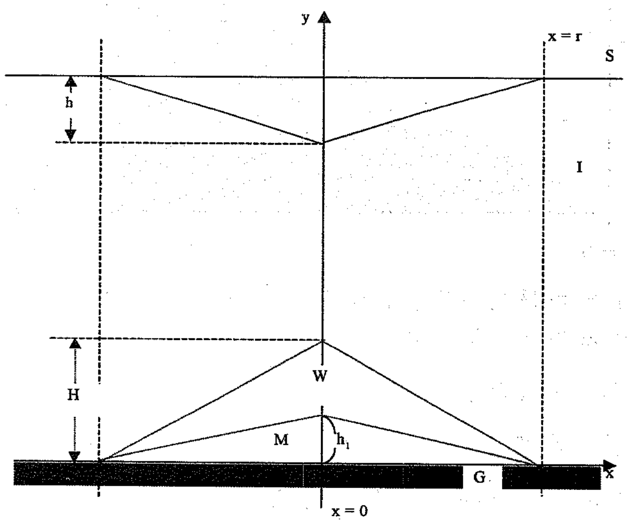


圖 2.4　受熱冰帽的倒錐形凹陷中央之垂直切面圖。S代表冰帽表面，G代表地表，I代表冰帽，M代表岩漿突起。注意此示意圖未按比例作圖。

假定冰塊只是垂直方向上移動，岩漿在開始時的溫度為 1200℃，完全處於熔融狀態。為簡單計，假定穿入冰層之岩漿在凹陷正下方形成圓錐體。岩漿升起時間遠較熱交換所需時間為短。熱流方向均假設為沿著垂直方向，如此在任一時刻，被熔化冰塊的周圍均形成錐形，其頂點位在岩漿圓錐體頂點的正上方。

在前述之假設下，冰塊的熔化經歷兩階段。在第一階段，在岩漿表面處熔化的水尙未達靜液平衡，因此會流失。流失之水其溫度可假設爲 0℃。其後的第二階段，水體達到靜液平衡，因此在水不會流失而逐漸累積在岩漿圓錐體的上方。

在到達平衡後，求下列各量，並將答案寫在答案卷上。

1. 水圓錐體頂點到原來冰層底面之高度 H。
2. 岩漿圓錐體之頂點高度 $h_1$。
3. 所產生之水的總質量 $m_{tot}$ 及流失的水質量 $m'$。

在作圖紙上，按比例畫出岩漿結塊後之形狀。未流失的水之形狀，使用圖 2.4 所示之坐標系。

## 第三題　比光速快嗎？

在本題中，我們將分析並解釋 1994 年所作的無線電波測量結果。該無線電波是由我們所在的銀河系內部的一個複合輻射源所發射出來。

電波接受器調整至波長爲數公分的無線電波的寬頻帶上。圖 3.1 顯示出在不同的時間所測得的一系列圖像。圖上所示一圈圈曲線代表等輻射強度曲線，類似於地圖上的等高線。圖中的兩個極大強度處，被解釋爲有兩個輻射體從標記爲 X 的共同中心處，反向離開。我們假設此共同中心在空間中固定不動，它本身也是一個很強的輻射源，但是它主要的輻射波長不在接收器所調整的頻道內。圖中的各個圖像雖然是在不同的日期所測得，但卻是選在一天中的同一時刻進行測量。

圖 3.1 的刻度標尺，畫在該圖下方，是用一線段表示，代表一弧秒(用 as 表示之，1as = 1/3600 度)。從測量者至標記爲 X 的天體中心處的距離估計爲 R=12.5kpc，（$1kpc=3.09\times10^{19}m$），光速爲 $3.00\times10^{8}m/s$。

(a)（2分）我們用 $\theta_1(t)$ 和 $\theta_2(t)$ 分別表示兩個電波放射源相對於共同中心的角位置，下標 1 和 2 分別代表左邊和右邊的輻射源，t 表示觀測的時刻。從地球上所觀測到的這兩個放射源的角速度分別爲 $\omega_1$ 和 $\omega_2$，其對應的視橫向線速率（即垂直於視線方向的速度分量的大小）則分別以 $v'_{1\perp}$ 和 $v'_{2\perp}$ 表示之。

利用圖 3.1 作一關係圖，以求出 $\omega_1$ 和 $\omega_2$，以毫弧秒/天（mas/d）爲單位表示之，並求出 $v'_{1\perp}$ 和 $v'_{2\perp}$ 的數值。將結果寫在答案卷上（可能有些結果會令你覺得困惑。）

(b)（3 分）爲了解決（a）題所產生的困惑，我們考慮一光源以速度 $\vec{v}$ 運動，$\vec{v}$ 的方向與光源和遠處觀察者的連線方向夾成 $\phi$ 角（$0\le\phi\le\pi$），如圖 3.2 所示。此速率可寫爲 $v=\beta c$，式中 c 爲光速。觀察者至光源間的距離爲R。觀察者所測得的光源的角速率

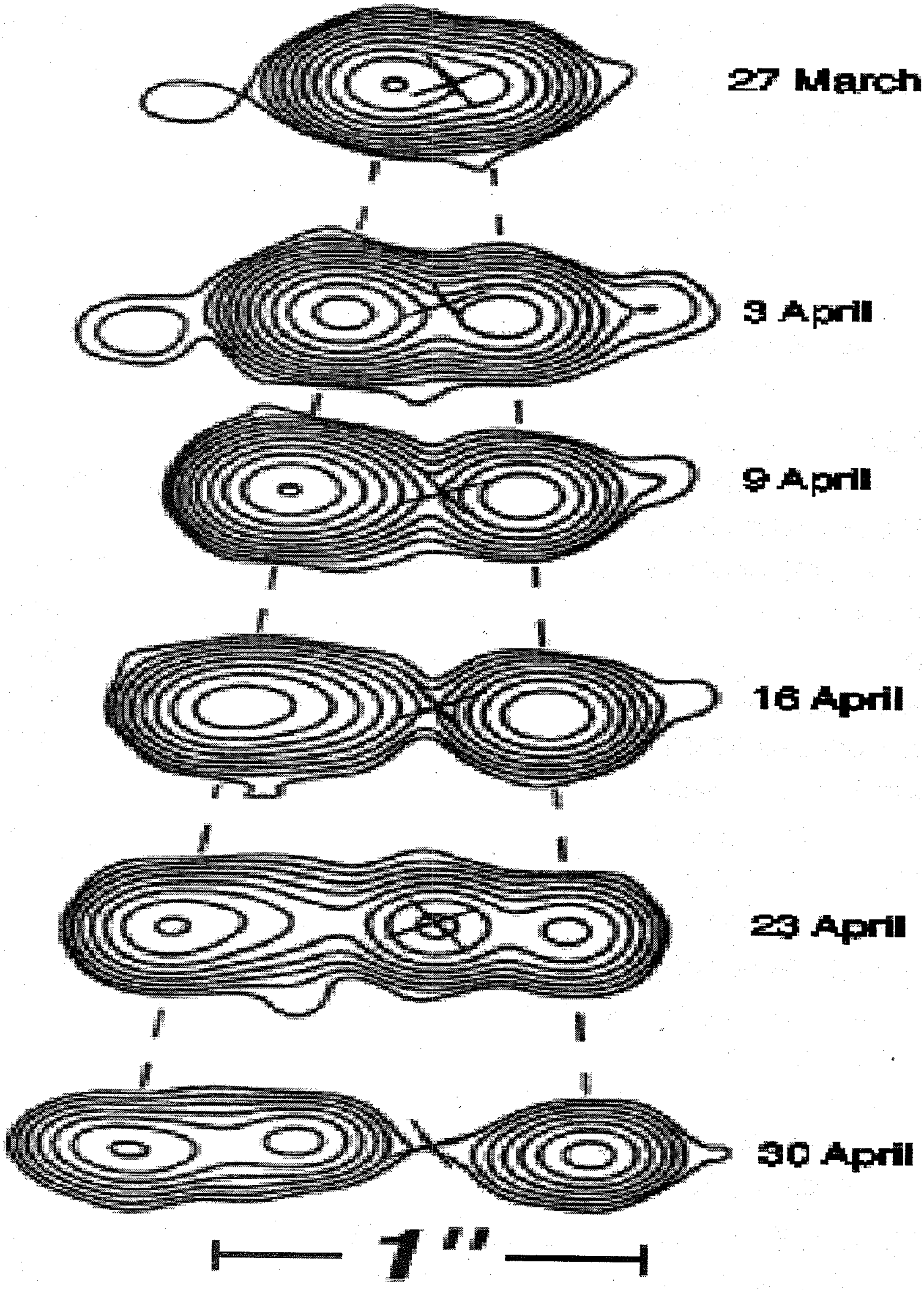


圖 3.1　從我們的銀河系中，一輻射源所發出的無線電波圖樣。

為$\omega$，垂直於視線的橫向速率為$v'_{\perp}$，求出$\omega$和$v'_{\perp}$，以$\beta$、R、和$\phi$表示之，並將結果寫在答案卷上。

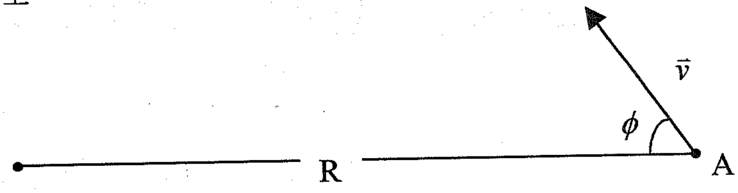


圖 3-2　觀察者在 0 點，光源的起始位置在 A 點，其速度為$\vec{v}$。

(c)（1 分）現在我們假設在引言及（a）中所描述的兩個輻射體以相同的速率$v=\beta c$反向運動，則（b）題的結果可用來從角速率$\omega_1, \omega_2,$及距離$R$，計算出$\beta$及$\phi$。此處的$\phi$就是對（b）題中左邊的物體，亦即（a）中下標為 1 的物體所定義的角度。

(b)（2 分）在（b）中僅有一輻射源的情況下，求出視橫向速率（垂直於視線方向）$v'_{\perp}$大於光速 c 的條件。將此條件寫成$\beta > f(\phi)$的形式，把$f(\phi)$的函數形式寫在答案卷上。在作圖紙上，畫出（$\beta,\phi$）平面圖中在物理上有意義的區域，並在圖上用斜線標出滿足$v'_{\perp}$>c 的條件的區域。

(e)（1 分）維持在（b）題單一物體的情況下，就給定的$\beta$值，求出視橫向速率$v'_{\perp}$的極大值（$v'_{\perp\max}$）的算式，並將結果寫在答案卷上指定的區域。請注意此速率在$\beta \to 1$時會無限增大。

(f)（1 分）在本題引言中，所介紹的 R 的估計值並非很可靠，因此科學家開始思考決定 R 值的更佳和更直接的方法。其中的一個構想如下：如果我們能夠辨認並測出由兩個輻射源所發出電波的都卜勒效應波長$\lambda_1$和$\lambda_2$，而與之相對應的兩物體在靜止時能發出的波長則同為$\lambda_0$，為一已知量。從相對論都卜勒效應的公式著手：

$$\lambda = \lambda_0\left(\frac{1-\beta\cos\phi}{\sqrt{1-\beta^2}}\right)$$

假設兩輻射源的速率相等，但方向相反，證明未知量$\beta = v/c$可用$\lambda_0, \lambda_1,$和$\lambda_2$表示為

$$\beta = \sqrt{1-\frac{\alpha\lambda_0^2}{(\lambda_1+\lambda_2)^2}}$$

寫出係數$\alpha$的數值於答案卷的指定區域。

你也許注意到以上所提議的波長測量，實際上提供一個新的估計輻射源距離的方法。