國際數學奧林匹亞競賽(1998)
試題解答評析(二)

陳昭地* 朱亮儒* 傅承德**
*國立臺灣師範大學　數學系
**中央研究院　統計研究所

三、第 39 屆國際數學奧林匹亞競賽試題詳解及評析

問題 1：（盧森堡）

〔解一〕（試題委員會公布的解法）

令 AC 與 BD 交於 E。由對稱性可設 P 在 ΔABE 中。設 P 到邊 AC 與 BD 的垂足分別為 M 與 N。首先可觀察出 $PA = PB$ 且 $PC = PD$。另一方面，我們可表示 ΔABP 與 ΔCDP 的面積[ABP]與[CDP]分別如下：

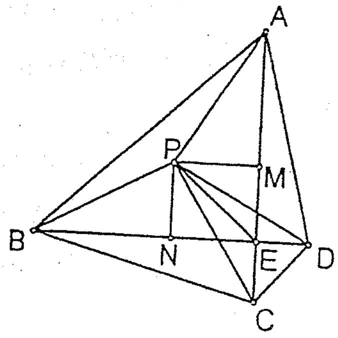
$$\begin{aligned}2[ABP] &= 2[ABE]-2[PAE]-2[PBE]\\ &= (AM+PN)(BN+PM)-(AM+PN)PM-(BN+PM)PN\\ &= AM\cdot BN - PM\cdot PN .\end{aligned}$$

與

$$\begin{aligned}2[CDP] &= 2[CDE]+2[PCE]+2[PDE]\\ &= (CM-PN)(DN-PM)+(CM-PN)PM+(DN-PM)PN\\ &= CM\cdot DN - PM\cdot PN .\end{aligned}$$

於是，可得

$$2([ABP]-[CDP]) = AM\cdot BN - CM\cdot DN . \qquad (*)$$



現在，我們用(*)式來證明原問題。若 A，B，C，D 四點共圓，則由點 P 是 AB 與 CD 的中垂線之唯一交點，可得知點 P 恰好是通過這四點 A，B，C，D 的圓之圓心。因此，M 與 N 分別為 AC 與 BD 的中點。於是，$AM = CM$ 且 $BN = DN$。再由(*)式可知$[ABP]=[CDP]$。反之，若$[ABP]=[CDP]$，由(*)式可知 $AM\cdot BN = CM\cdot DN$。如果 $PA \neq PC$，則由對稱性可令 $PA > PC$。於是由 $PB = PA > PC = PD$，可得 $AM > CM$ 且 $BN > DN$。如此，$AM\cdot BN > CM\cdot DN$，矛盾。故 $PA = PC$。這證明了點 P 到 A，B，C，D 四點的距離都相同。因此，A，B，C，D 四點共圓。

〔解二〕（試題委員會公布的另一解法）

將 AC 與 BD 看成直角坐標軸，並令點 A，B，C，D 的坐標分別爲(0,a)，(b,0)，(0,c)，(d,0)。由已知條件 AB 與 CD 的中垂線有唯一的交點 P，知聯立方程組 $2bx-2ay=b^2-a^2$ 及 $2dx-2cy=d^2-c^2$ 有唯一的解 (x_0,y_0)，其中

$$x_0=\frac{-c(b^2-a^2)+a(d^2-c^2)}{2(ad-bc)},\quad y_0=\frac{-d(b^2-a^2)+b(d^2-c^2)}{2(ad-bc)}. \tag{1}$$

因爲 $P_{(x_0,y_0)}$ 在四邊形 ABCD 的內部，於是[ABP]＝[CDP]的充要條件是

$$\begin{vmatrix}0 & a & 1\\ b & 0 & 1\\ x_0 & y_0 & 1\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}0 & c & 1\\ d & 0 & 1\\ x_0 & y_0 & 1\end{vmatrix}.$$

化簡得

$$ax_0+by_0-ab=cx_0+dy_0-cd. \tag{2}$$

將(1)式的 x_0 與 y_0 代入(2)式，可得(2)式的充要條件爲

$$(ac-bd)\left[(a-c)^2+(b-d)^2\right]=0.$$

從我們選擇的坐標系知 a 與 c 異號（同樣地，b 與 d 異號），因此，$(a-c)^2+(b-d)^2\neq 0$。於是可得 ac ＝ bd，此即 $AE\cdot CE=BE\cdot DE$，而此等式成立的充要條件是 A，B，C，D 四點共圓。

評析：

1. 本題爲盧森堡設計提供，爲一題平面幾何的題目，主試委員會預估爲簡易題。考試結果在 419 位參賽者中，有 103 位（24.6%）得滿分，也有 89 位（21.0%）得 0 分。全體得分的平均值爲 3.21 分，得分率 0.46，難度指數 0.47，屬本次六道試題中難度偏易者，而其鑑別指數爲 0.67，也相當合理。所有獲得金牌的 37 位選手在本題的平均得分數爲 6.51 分，而拿到銀牌的 66 位選手得分之平均值爲 5.08 分。我國 6 位選手得分之平均值高達 6.67 分，更超越金牌選手的平均得分，是我國勇奪第五名的得分關鍵題。
2. 解題評分重點：
   (1) 由四點共圓導出兩三角 ΔABP 與 ΔCDP 的面積相等，可得 2 分。
   (2) 由兩三角形 ΔABP 與 ΔCDP 的面積相等導出四點共圓，可得 5 分。
   (3) 在第(2)部分中，只證出部分的結果，或只得到交點 P 的坐標而無進一步的推導，僅可得 1 分。
3. 討論：
   (1) 我國六位代表本題得分依序爲 7，7，7，5，7，7 分，共得 40 分，其中僅劉育

廷同學在第(2)部分的推導中得到交點 P 的坐標，並進一步的描述其可行的解法，但因沒有具體的演算過程而無法拿到滿分。

(2) 伊朗及印度的所有參賽學生在本題的表現也相當傑出，皆得滿分，使得這兩個國家在本屆的成績與名次都大幅提升。

(3) 由於今年我國對這類型題目的訓練得宜，才能有如此佳績。未來在幾何題方面，必須把握現有的優勢，才能百尺竿頭，更進一步。

問題 2：（印度）

〔解答〕（試題委員會公布的解法）

因為共可配成 $\binom{b}{2}$ 對裁判，而且每一對裁判至多可對 k 個參賽者有相同的判決，故相同的判決總數至多是 $k\binom{b}{2}$。對 $i=1,2,3,\cdots,a$，令第 i 個參賽者被 x_i 個裁判判決通過，且被 y_i 個裁判判決不通過，則 $x_i+y_i=b$，且對此參賽者有相同的判決之裁判對數為

$$\binom{x_i}{2}+\binom{y_i}{2}=\frac{1}{2}\left(x_i^2+y_i^2-x_i-y_i\right)\geq\frac{1}{2}\left[\frac{1}{2}\left(x_i+y_i\right)^2-b\right]=\frac{1}{4}\left[\left(b-1\right)^2-1\right].$$

因為 b 是奇數，由上面的不等式可推出

$$\binom{x_i}{2}+\binom{y_i}{2}\geq\frac{1}{4}\left(b-1\right)^2.$$

於是可得

$$k\binom{b}{2}\geq\sum_{i=1}^{a}\left[\binom{x_i}{2}+\binom{y_i}{2}\right]\geq\frac{a\left(b-1\right)^2}{4}.$$

化簡上式即可導出原題之不等式。

評析：

1. 本題為印度設計提供，為一題組合不等式的題目，主試委員會預估為適中題。考試結果在 419 位參賽者中，有 141 位（ 33.7%）得滿分，也有 213 位（ 50.8%）得 0 分。全體得分的平均值為 2.74 分，得分率 0.39 ，難度指數 0.43 ，屬本次六道試題中難度中等者，而其鑑別指數為 0.82 ，相當高。所有獲得金牌的 37 位選手在本題的平均得分數為 6.62 分，而拿到銀牌的 66 位選手得分之平均值為 5.71 分。我國 6 位選手得分之平均值為 4.75 分，顯然，平常訓練仍需再加強這類型的題目，才能坐銀求金，以提升我國的名次。

2. 解題評分重點：

(1) 寫出型如 $\Sigma_i\left(\binom{x_i}{2}+\binom{y_i}{2}\right)$ 的計數式，至多可得 2 分。

(2) 證出(1)式的上界爲 $k\binom{b}{2}$，可獨立得 1 分。

(3) 證出(1)式的下界爲 $\frac{a}{4}(b-1)^2$，可獨立得 3 分。

(4) 最後導出問題的不等式，可再得 1 分。

(5) 證明中沒有用到 b 是奇數的特性，而只得到一較弱的下界時，至多可得 4 分。

(6) 處理太明顯的特例 $(a,b,k)=(3,3,2)$，不給分；處理如：$(a,b,k)=(7,7,3)$的特例，至多可得 1 分；處理無窮的特例，如：$b=3$ 而 a 是任意值，至多可得 2 分。

3. 討論：

(1) 在我國六位代表本題得分依序爲 7，7，4，2，0，7 分，共得 27 分，其中僅王世豪把重心擺在其他兩題上，而放棄得到部分分數的機會，相當可惜。

(2) 本題爲印度設計題供，其六位參賽學生本題皆得滿分，使得印度在本屆的名次大幅提升到第七名。

(3) 由於今年我國特別著重組合題型的訓練，學生的組合題成績也首度超越韓國，但表現仍不如歐美的幾個強隊。未來應更加強這類題型的訓練，才能迎頭趕上那些頂尖的強隊。

問題３：（白俄羅斯）

〔解一〕（試題委員會公布的解法）

首先觀察，對兩互質的正整數 a，b，恆有 $d(ab)=d(a)d(b)$。令 $n=p_1^{k_1}p_2^{k_2}\cdots p_t^{k_t}$，其中 $p_1,p_2,\cdots,p_t$ 爲相異的質數，而 $k_1,k_2,\cdots,k_t$ 是正整數。則有

$$d(n)=(k_1+1)(k_2+2)\cdots(k_t+1)$$

且

$$d(n^2)=(2k_1+1)(2k_2+2)\cdots(2k_t+1).$$

因此，滿足問題中的 $k=\frac{d(n^2)}{d(n)}$ 值必爲奇數。反之，我們將證明所有的正奇數 k 都是符合問題的條件（我們稱之爲合格數），意即存在正整數 $k_1,k_2,\cdots,k_t$，使得

$$k=\frac{2k_1+1}{k_1+1}\cdot\frac{2k_2+1}{k_2+1}\cdots\frac{2k_t+1}{k_t+1}.$$

對 k 使用數學歸納法證明上面的命題。顯然，$1=\frac{d(1^2)}{d(1)}$，故 $k=1$ 時命題成立。對大於 1 的奇數 k，假設比 k 小的奇數都成立。當 $k=4s+1$ 時，它可被表成

$$k=\frac{4s+1}{2s+1}\cdot(2s+1).$$

因為 $2s+1<k$，由歸納假設知命題對 $k=4s+1$ 的型式都成立。當 $k=4s+3$ 時，我們再分成 $8r+3$ 與 $8r+7$ 的情況討論：

(i) 當 $k=8r+3$ 時，它可被表成

$$k=8r+3=\frac{2(12r+4)+1}{(12r+4)+1}\cdot\frac{2(6r+2)+1}{(6r+2)+1}\cdot(2r+1).$$

因為 $2s+1<k$，故由歸納假設知命題對 $k=8r+3$ 的型式也都成立。

(ii) 當 $k=8r+7$ 時，我們先證明以下一個引理：當 x 是合格數，則 $2^m x-1$ 也會是合格數，其中 $m\ge 1$。令 $x=\dfrac{d(q^2)}{d(q)}$。對 $m=1$，取 $n=p^{x-1}q$，其中 p 是質數且不是 q 的因數。則

$$\frac{d(n^2)}{d(n)}=\frac{2x-1}{x}\cdot x=2x-1.$$

對 $m>1$，取

$$n=p_1^{2^{m-1}3x-2}p_2^{2^{m-2}3^2x-2}\cdots p_{m-1}^{2\cdot 3^{m-1}x-2}p_m^{3^{m-1}x-1}q,$$

其中 $p_1,p_2,\cdots,p_m$ 是相異的質數且都不是 q 的因數，則

$$\frac{d(n^2)}{d(n)}=\frac{2^m3x-3}{2^{m-1}3x-1}\cdot\frac{3^{m-1}3^2x-3}{2^{m-2}3^2x-1}\cdots\frac{2^23^{m-1}x-3}{2\cdot 3^{m-1}x-1}\cdot\frac{2\cdot 3^{m-1}x-1}{3^{m-1}x}\cdot x=2^m x-1.$$

這證明了上面的引理。現在，對任一大於 1 的奇數 k，我們可將 k 表成 $k=2^m x-1$ 的型式，其中 x 是奇數且 $x<k$。因為（由歸納假設）x 是合格數，故由引理知 $k=2^m x-1$ 也是合格數。因此，所有的奇數都是合格數。

〔解二〕（試題委員會公布的另一解法）

對任一正奇數 $k>1$，我們將用數學歸納法證明存在一正整數 n 使得 $\dfrac{d(n^2)}{d(n)}=k$。可令 k_0 為一正奇數，使得 $k=2^r k_0-1>k_0$。由歸納法的假設，我們可找到一正數整 n_0 使得

$$\frac{d(n_0^2)}{d(n_0)}=k_0.$$

令 $x_0=(2^r-1)k_0-1$，及 $x_i=2^i x_0$，$\forall_i=1,2,3,\cdots,r$。取 r 個與 n_0 互質的相異質數 $p_0,p_1,p_2,\cdots,p_{r-1}$，並取

$$n=p_0^{x_0}p_1^{x_1}\cdots p_{r-1}^{x_{r-1}}.$$

則

$$\frac{d(n^2)}{d(n)}=\frac{2x_0+1}{x_0+1}\cdot\frac{2x_1+1}{x_1+1}\cdots\frac{2x_{r-1}+1}{x_{r-1}+1}\cdot\frac{d(n_0^2)}{d(n_0)}=\frac{x_1+1}{x_0+1}\cdot\frac{x_2+1}{x_1+1}\cdots\frac{x_r+1}{x_{r-1}+1}\cdot k_0.$$

$$=\frac{x_r+1}{x_0+1}\cdot k_0=\frac{x_r+1}{(2^r-1)k_0}\cdot k_0=\frac{2^r x_0+1}{2^r-1}=2^r k_0-1=k\,.$$

故得證。

評析：

1. 本題爲白俄羅斯設計提供，爲一題數論題目，主試委員會預估爲難題。考試結果在 419 位參賽者中，僅有 30 位（ 7.2%）得滿分，其中有 12 位最後得到金牌，也有 91 位（ 21.7%）得 0 分。全體得分的平均値爲 1.76 分，得分率 0.25 ，難度指數 0.28 ，屬本次六道試題中難度次難者，而其鑑別指數爲 0.38 ，稍嫌偏低。所有獲得金牌的 37 位選手在本題的平均得分數爲 4.19 分，再拿到銀牌的 66 位選手得分之平均値爲 2.83 分。我國 6 位選手得分之平均値爲 3.50 分，顯然，欲爭取金牌的同學平常的訓練仍需特別加強這類構造性的數論題目。
2. 解題評分重點：

(1) 觀察出偶數都不是合格數，可得 1 分。

(2) 由 k 是合格數導出 $2^t k-1$ 也是合格數，可獨立得 2 分。

(3) 用數學歸納法證出所有的奇數都是合格數，累積得 7 分。

(4) 僅觀察出 2^t-1 或 $4k-1$ 是合格數或指出合格數有乘法封閉性，可得 1 分。

3. 討論：

(1) 我國六位代表本題得分依序爲 7 ， 2 ， 2 ， 0 ， 7 ， 3 分，共得 21 分，其中僅廖健溢與王世豪得到滿分，而劉育廷沒有得到本題 2 分的基本分數，實在可惜。

(2) 美國六位代表中有三位得到滿分 7 分，全隊總得分 34 分，是所有參賽國中表現最好的一隊。反觀今年第一名的伊朗，本題的總得分僅有 18 分，仍落後我國的成績。可見我國六位代表在這一道試題的表現確實值得誇獎。

(3) 我國學生廖健溢與王世豪的解法與試題委員會公布的解法二大致相同，由於分析得宜而能很快的掌握到解題要領。這類構造性的數論題需要有足夠的耐性，雖然陳明揚的方法很接近試題委員會公布的解法一，方向也很正確，但始終沒有構造出一個解題關鍵的例子而無法拿到好分數，令人婉惜。

問題 4 ：（英國）

〔解答〕（試題委員會公布的解法）

因爲 a^2b+a+b 可被 ab^2+b+7 整除，故也可被以下的數整除：

$$b(a^2b+a+b)-a(ab^2+b+7)=b^2-7a$$

更且，因為 $a \geq 1$，得 $b^2-7a<ab^2+b+7$。於是，當 $b^2-7a \geq 0$ 時，就有 $b^2-7a=0$。因此，$7\mid b$。可令 $b=7z$，則 $a=7z^2$。經代入 $(a,b)=(7z^2,7z)$ 檢驗，其中 z 是正整數，確實此種正整數序對都滿足問題的條件。另外一方面，當 $b^2-7a<0$ 時，$0<7a-b^2<7a$。因為正整數 $7a-b^2$ 可被 ab^2+b+7 整除，故此時 b = 1 或 b = 2（否則 $ab^2+b+7>9a>7a-b^2$，矛盾）。

(i) 當 b = 1 時，我們有

$$a+8 \mid 7a-1=7(a+8)-57.$$

於是，

$$a+8 \mid 57=1\cdot 57=3\cdot 19.$$

得 a = 11 或 a = 49。經分別代入(a,b)＝(11,1)及(49,1)檢驗，確實此種正整數序對也都滿足問題的條件。

(ii) 當 b = 2 時，我們有 $4a+9 \mid 7a-4$ 且

$$7a-4 \mid 4(7a-4)=7(4a+9)-79.$$

於是，

$$4a+9 \mid 79.$$

因為 79 沒有型如 4a + 9 的因數，故此種情況沒有滿足問題條件的正整數序對(a,b)。

綜合以上的討論，所有滿足問題的條件之正整數序對(a,b)為 $(7z^2,7z), z=1,2,3,\cdots,$ 及 (11,1)，(49,1)。

評析：

1. 本題為英國設計提供，為一題基本數論的題目，主試委員會預估為簡易題。考試結果在 419 位參賽者中，有 142 位（34.6%）得滿分，但也有 125 位（29.8%）得 0 分。全體得分的平均值為 3.46 分，得分率 0.49，難度指數 0.50，屬本次六道試題中最容易的一題，而其鑑別指數為 0.82，相當高。所有獲得金牌的 37 位選手在本題的平均得分數為 6.65 分，而拿到銀牌的 66 位選手得分之平均值為 6.26 分。我國 6 位選手得分之平均值為 6.00 分，略低於有於有銀牌選手之平均得分，將來的訓練仍需再加強這類型的題目，尤其是思考的嚴謹性，才能進一步提升我國的名次。
2. 解題評分重點：
   (1) 導出無窮組解 $(7z^2,7z)$，可得 3 分。但若僅觀察出來而無證明過程，祇能得 1 分。
   (2) 導出其他的解(a,b)必須滿足 $b \leq 2$，可獨立得 3 分。
   (3) 正確的解出 b = 1 和 b = 2 情況下的兩組解，可得 1 分。
3. 討論
   (1) 我國六位代表本題得分依序為 7，7，4，4，7，7 分，共得 36 分，其中四位同

學的演算過程都很完整而拿到滿分。然而，陳明揚與劉育廷在解不等式的過程中都忽略了 $b^2-7a=0$ 的情況，而得不到無窮組解 $(7z^2, 7z)$，各被扣了 3 分，相當可惜。

(2) 烏克蘭六位代表本題都得到滿分，共得 42 分，表現最爲傑出，其次是俄羅斯與匈牙利的 40 分，及美國與羅馬尼亞的 39 分。另外，保加利亞、韓國與日本都是 35 分。

(3) 這種類型的數論題對我國學生應不陌生，雖然我國六位選手在本題的總分數排名在前十名，但平均分數仍低於所有銀牌選手之平均得分，顯然仍有待進一步的檢討，才能使失誤降到最低。

問題５：（烏克蘭）

〔解一〕（試題委員會公布的解法）

在 ΔBMR 中，因爲 MK 與 RS 平行，故有

$$\angle BMR = 90^\circ - \frac{1}{2}\angle A,\quad \angle MBR = 90^\circ - \frac{1}{2}\angle B,\quad \angle BRM = 90^\circ - \frac{1}{2}\angle C.$$

因此，由正弦定律知

$$BR = \frac{\sin\angle BMR}{\sin\angle BRM}\cdot BM = \frac{\cos\left(\frac{1}{2}\angle A\right)}{\cos\left(\frac{1}{2}\angle C\right)}\cdot BM. \tag{1}$$

同理，在 ΔBKS 中，

$$\angle BKS = 90^\circ - \frac{1}{2}\angle C,\quad \angle BSK = 90^\circ - \frac{1}{2}\angle A,\quad \angle KBS = 90^\circ - \frac{1}{2}\angle B.$$

於是，

$$BS = \frac{\sin\angle BKS}{\sin\angle BSK}\cdot BK = \frac{\cos\left(\frac{1}{2}\angle C\right)}{\cos\left(\frac{1}{2}\angle A\right)}\cdot BM. \tag{2}$$

因爲 $BI \perp RS$ 且 $IM \perp AB$，並利用(1)與(2)的結果可得

$$\begin{aligned} IR^2 + IS^2 - RS^2 &= \left(BI^2 + BR^2\right) + \left(BI^2 + BS^2\right) - \left(BR + BS\right)^2 \\ &= 2\left(BI^2 - BR\cdot BS\right) = 2\left(BI^2 - BM^2\right) = 2\cdot IM^2 > 0 \end{aligned}$$

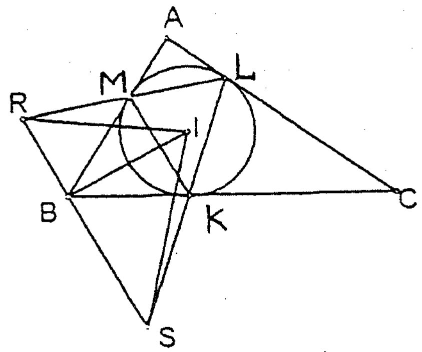
因此，由餘弦定律知 $\angle RIS$ 爲銳角。

〔解二〕（陳明揚同學的作法）

首先觀察易知

$$\angle BMR = \angle BSK = 90^\circ - \frac{1}{2}\angle A,$$

$$\angle RBM = \angle KBS = 90^\circ - \frac{1}{2}\angle B.$$



因此，$\Delta BRM \sim \Delta BKS$。於是，

$$BS \cdot BR = BK \cdot BM = BK^2 < BI^2.$$

由此可得

$$(RB + BS)^2 < (RB^2 + BI^2) + (BS^2 + BI^2).$$

此式即為 $RS^2 < RI^2 + SI^2$。故由餘弦定律知 $\angle RIS$ 為銳角。

評析：

1. 本題為烏克蘭設計提供，為一題平面幾何的題目，主試委員會預估為中等偏易題。考試結果在 419 位參賽者中，有 139 位（ 32.9%）得滿分，也有 184 位（ 44.6%）得 0 分。全體得分的平均值為 2.93 分，得分率 0.42 ，難度指數 0.43 ，屬本次六道試題中難度中等者，而其鑑別指數為 0.80 ，也相當高。所有獲得金牌的 37 位選手在本題的平均得分數為 6.27 分，再拿到銀牌的 66 位選手得分之平均值為 5.82 分。我國 6 位選手得分之平均值為 6.83 分，是我國參賽的 6 題中成績最好的一題。顯然，學生的努力及平常訓練得宜，加上我國學生的演算能力一向優於一般的外國學生，才能有如此好的成績。
2. 解題評分重點：
   (1) 利用餘弦定律證明 $\angle RIS$ 為銳角等價於 $BI^2 - BR \cdot BS > 0$ ，可得 2 分。
   (2) 利用相似三角形的性質得到 $BM^2 = BR \cdot BS$ ，可得 3 分。
   (3) 完整的完成其餘部分的證明，可再得 2 分。
   (4) 僅證明三角形 BMS 與 BRK 相似，祇能得 2 分。
3. 討論：
   (1) 我國六位代表本題得分依序為 7 ， 6 ， 7 ， 7 ， 7 ， 7 分，共得 41 分，其中僅賴信弘採用三角函數解析法，因書寫不完整被扣一分。我國六位代表的解法都不盡相同，成績很優異值得獎勵，但書寫的完整性仍需再加強以免被扣分。
   (2) 美國及俄羅斯的參賽學生在本題的表現不如理想，使得這兩國在本屆的成績與名次都明顯退步。
   (3) 由於今年我國對這類幾何型題目的訓練得宜，且我國六位代表都能把握住這類題型的得分機會，充分發揮個人的才華，才能榮獲三面金牌，並提升我國的名次。

問題６：（保加利亞）

〔解一〕（試題委員會公布的解法）

令 S 表示所有滿足已知條件的函數 f 所成的集合。對任一 $f \in S$，令 $f(1)=a$。取 $t=1$，$s=m$ 代入原函數方程式可得

$$f(f(m)) = a^2 m,\ \forall m \in N.$$

另一方面，取 $t = n$，$s = 1$ 代入原函數方程式可得

$$f(an^2) = [f(n)]^2\ \forall n \in N.$$

於是有

$$[f(m)f(n)]^2 = [f(m)]^2 f(an^2) = f(m^2 f(f(an^2))) = f(m^2 a^2 an^2) = f(a(amn)^2) = [f(amn)]^2.$$

因此，

$$f(amn) = f(m)f(n),\ \forall m,n \in N.$$

特別地，$f(am) = af(m)$，且

$$af(mn) = f(m)f(n),\ \forall m,n \in N. \tag{1}$$

以下我們要證明：$a \mid f(n),\ \forall n$。對任一給定的質數 p，我們令 $p^\alpha \mid a,\ p^\beta \mid f(n)$，但 $p^{\alpha+1} \nmid a$，$p^{\beta+1} \nmid f(n)$。由(1)及數學歸納法可證得

$$[f(n)]^k = a^{k-1} f(n^k),\ \forall k \in N.$$

因爲可整除 $[f(n)]^k$ 的 p 之最高密次方因爲爲 $p^{k\beta}$，而可整除 a^{k-1}的 p 之最高密次方因數爲 $p^{(k-1)\alpha}$，故

$$k\beta \ge (k-1)\alpha,\ \forall k \in N.$$

上式僅當 $\beta \ge \alpha$ 時才會成立。由於以上的討論是對任一質數 p 均成立，故得證 $a = f(1)$是每一個 $f(n)$的因數，$n = 1,2,3 \cdots$。

定義

$$g(n) = \frac{f(n)}{f(1)},\ \forall n \in N.$$

則 g 也是由 N 到 N 的函數且滿足

$$g(a) = a,\ g(mn) = g(m)g(n),\ g(g(m)) = m,\ \forall m,n \in N. \tag{2}$$

事實上，因爲

$$ag(g(m)) = g(a)g(g(m)) = g(ag(m)) = g(f(m)) = \frac{f(f(m))}{a} = \frac{a^2 m}{a} = am.$$

故得 $g(g(m)) = m,\ \forall m \in N$。更進一步地，由(2)式可得

$$g(n^2 g(m)) = g(n^2)g(g(m)) = m[g(n)]^2,\ \forall m,n \in N.$$

因此，$g \in S$。由於 $g(n) \le f(n), \forall n \in N$，因此欲求問題中的最小值，我們只須針對滿足(2)式的函數 g 考慮即可。首先我們證明函數 g 會把質數映到質數。設 p 為一質數且 $g(p)= uv$。則由(2)式知

$$p = g(g(p)) = g(uv) = g(u)g(v).$$

於是，$g(u)= 1$ 或 $g(v)= 1$。不失一般性，可令 $g(u)= 1$。則 $u = g(g(u))= g(1)= 1$。這證明了 $g(p)$是一個質數。又若 $g(m)= g(n)$，則

$$m = g(g(m)) = g(g(n)) = n.$$

因此，函數 g 是一對一。於是可知 g 會把不同的質數映至不同的質數。因此欲求出

$$g(1998) = g(2\cdot 3^3 \cdot 37) = g(2)(g(3))^3 g(37).$$

的一個下界，我們可取 $g(2)$，$g(3)$，$g(37)$為最小的三個質數 2，3，5，其中 $g(3)= 2$，則

$$g(1998) \ge 3\cdot 2^3 \cdot 5 = 120.$$

上面的不等式是對 S 中的任一 g 都成立。事實上，該等號對某些 $g \in S$ 是可成立，例如：取 $g(1)= 1$，$g(2)= 3$，$g(3)= 2$，$g(5)= 37$，$g(37)= 5$，而對其他的質數 p，令 $g(p)= p$，$\forall p \ne 2$，3，5，37。則由 g 有可乘性，對 $n = p_1^{k_1} p_2^{k_2} \cdots p_t^{k_t}$，我們可定義

$$g(n) = g(p_1)^{k_1} g(p_2)^{k_2} \cdots g(p_t)^{k_t}.$$

代回檢驗，確實此函數 g 滿足(2)式（其中 $a = 1$）。因此，$g \in S$ 且 $g(1998)= 120$。故問題的最小值為 120。

〔解二〕（廖健溢同學的作法）

首先證明：對使得函數值 $f(1998)$最小之 $f \in S$，恆有 $f(1)= 1$。假設 $f(1) = k \ne 1$，則由數學歸納法可得證

$$f(k^{i-1}) = k^i, \forall i \in N.$$

若 $f(a)= b$，再由數學歸納法可證得

$$f\left(a^{(2^i)}\right) = \frac{b^{(2^i)}}{k^{(2i-1)}}, \forall i \in N.$$

又 $f\left(2^{(2^i)}\right) \in N, \forall i \in N$，故 $k^{(2i-1)} \mid b^{(2^i)}$。於是，當質數 $p \mid k$ 時，$p \mid b$。令 k 與 b 的質因數分解式為

$$k = p_1^{s_1} p_2^{s_2} \cdots p_c^{s_c}, b = p_1^{t_1} p_2^{t_2} \cdots p_c^{t_c} q_1^{r_1} q_2^{r_2} \cdots p_d^{r_d}.$$

則有 $s_i \le t_i, \forall i$（因為若有某一個 $i, s_i > t_i$，則由極限值 $\lim \frac{2^n}{2^n - 1} = 1$ 可推知存在一個足夠大的 n 使得

$$\frac{2^n}{2^n-1}<\frac{s_i}{t_i}\ ,$$

即 $s_i(2^n-1)>t_i 2^n$。但因 $k^{(2n-1)} \mid b^{(2^n)}$，故

$$p_i^{s_i(2^n-1)} \mid p_i^{t_i 2^n}\ ,$$

得 $s_i(2^n-1)\le t_i 2^n$ 矛盾。因此，$k \mid b$，亦即 $f(1) \mid f(a), \forall a \in N$。接下來利用 f(1)＝ 1 的條件可得到與〔解一〕相似的解法。

評析：

1. 本題為保加利亞設計提供，為一題函數方程的題目，主試委員會預估為最難的一題。考試結果在 419 位參賽者中，只有 24 位（ 5.5%）得滿分，其中有 16 位最後得到金牌，也有高達 340 位（ 81.1%）得 0 分。全體得分的平均值為 0.68 分，得分率 0.10 ，難度指數 0.17 ，屬本次六道試題中難度最難者，而其鑑別指數為 0.33 ，略為偏低。所有獲得金牌的 37 位選手在本題的平均得分數為 4.38 分，而拿到銀牌的 66 位選手得分之平均值為 1.33 分。我國 6 位選手得分之平均值為 3.33 分。雖然我國六位代表本題的整體表現尚可，但仍有幾位學生沒有把握住解題技巧多得一點分數，相當可惜。
2. 解題評分重點：
   (1) 證明出 f(1)都可整除每一個 f(n)，可獨立得 3 分。
   (2) 證明出函數 $g(n)=\dfrac{f(n)}{f(1)}$ 會把質數映到質數，可獨立得 2 分。
   (3) 證明出 120 是 f(1998)的一個下界，可得 1 分。
   (4) 舉例證明出 120 確實是所有 f(1998)的最小值，可再得 1 分。
   (5) 僅證明出 f 或 g 有可乘性，至多可得 1 分。
3. 討論
   (1) 我國六位代表本題得分依序為 6 ， 7 ， 1 ， 1 ， 0 ， 4 分，共得 19 分，其中僅賴信弘的解法最完整而得到滿分，而王世豪因把得分重心擺在其他兩題上，而放棄得到部分分數的機會，有點可惜。
   (2) 出題國保加利亞的成績是與賽國中最好的，共得 36 分。另外，伊朗的參賽學生在本題的也表現相當傑出，有五位得到滿分，共得到 35 分，是伊朗在本屆的團體名次能得到第一的原因之一。
   (3) 廖健溢同學的解法含有相當高的技巧，但由於最後關頭在確定最小值是否可達到的步驟中，沒有明確的造出一個可達到最小值的函數，依評分標準不得不被扣一分，這也是廖健溢在本屆 IMO 的競賽中唯一被扣分的地方。另外，游志強的解法也很好，只可惜沒有完成 f(1)整除 f(n)部分的證明而被扣了 3 分。

(4) 從今年我國代表隊在這道最難的試題上之表現，似乎已不再像往年的代表隊有恐懼的第六題，值得可喜。

四、結論

從以上的成績統計及試題詳解與評析，我們綜合提出以下幾點結論，以供參考：

1. 本屆六道試題分屬平面幾何（解析），組合不等式，數論（構造性），數論（因數），平面幾何（三角）及代數（函數方程）。今年這六道試題的主要特色是出現兩題平面幾何而且都可用解析幾何的方法來證明，是近年來很少出現的題型。此外，最熱門的流行趨勢題型—組合題，今年原本有兩道題，但在主試委員會議中發現其中一道原已確定的組合題是考古題而臨時被更換成數論題（第三題），使得最後的六道競試題中只有一道組合題（第二題）。這樣搭配的題型對我國學生相當有利，也是造成今年我國成績大幅提升的原因之一。
2. 今年試題的難度事實上不高，參賽學生拿不到好成績（去年全部參賽學生的得分平均值為 16.07 分，今年的平均值為 14.78 分）的主要原因是兩道幾何題都偏重在解析的技巧上，雖然技巧不高，但如果沒有運用得宜恰到好處，則可能會陷入更複雜的計算式而達不到結果。以第五題的幾何題為例，美國與俄羅斯的學生很明顯的在這道題上吃了很大的虧，也因而造成這兩國的總成績較往年滑落。
3. 我國參賽的六位學生代表，計得三金二銀一銅，總分 184 分，在 76 個參賽國家中排名第五名，僅次於伊朗、保加利亞、美國及匈牙利。今年的成績是歷屆我國代表隊中表現最好的一次，主要的原因是在天時地利人和的理想環境下，我國參賽學生憑個人的努力與天賦所創造出來的佳績。這裡所指的天時是指選出的六道試題都非常適合我國學生作答，尤其是兩題幾何題的出現對我參賽學生最為有利；地利是指今年國際奧林匹亞數學競賽在我國舉行，學生們不須長途遠征，免於勞累，又加上食宿無後顧之憂，而能全力衝刺獲取好成績；人和是指今年的整個競賽活動在教育部，國科會，數學會，國立台灣師範大學科教中心及數學系的極力支持下，每一位協助訓練的教授，工作人員及輔導老師都能分工合作相輔相乘，達到訓練與輔導配合得宜的最高境界，其中更值得一提的是武陵高中盧澄根老師精心安排的參觀旅遊活動，使得參賽的六位學生能夠充分獲得身心的調養與壓力的紓解。
4. 今年我國參賽的六位學生代表超越預期的表現，值得嘉勉，其中廖健溢、賴信弘與游志強都有超水準的演出而榮獲金牌，王世豪與陳明揚都因疏忽了一些得分關鍵而與金牌絕緣，而劉育廷壓力過大，表現略有失常。在第一題與第五題的幾何題共 84 分中，

我國六位學生得到總分81分，表現最搶眼；第二題組合題全隊得分雖然不高，但已凌駕韓國之上，相當難能可貴；第三題數論題是一題難題，我國六位代表中有廖健溢與王世豪表現優異得到滿分；第四題是一題簡易的數論題，全隊中有四位得到滿分，尚稱正常；第六題是最難的函數方程，我國六位學生得到總分19分，其中包括賴信弘的滿分，表現仍屬上乘。雖然今年我國代表隊的表現相當優異，歸究其因乃與選取的題型有很大的關係，尤其今年的組合題型比往年少。因此，將來仍須在各個領域上再加強基本知識及解題技巧，特別是思考的嚴謹性與作答的完整性，應予通盤的輔導與訓練，才能持盈保泰更進一步。

五、參考資料

1. 陳昭地（民80年），1991年第三十二屆國際數學奧林匹亞競賽試題，科學教育月刊，143期（80年10月），第18～19頁。
2. 陳昭地（民81年），1992年第三十三屆國際數學奧林匹亞競賽試題，科學教育月刊，149期（'81年4月），第71～72頁。
3. 陳昭地（民82年），1993年第三十四屆國際數學奧林匹亞競賽試題解答評析，科學教育月刊，163期（82年10月），第48～72頁。
4. 陳昭地等（民83年），1994年第三十五屆國際數學奧林匹亞競賽試題解答評析，科學教育月刊，172期（83年9月），第24～39頁。
5. 陳昭地等（民84年），1995年第三十六屆國際數學奧林匹亞競賽試題解答評析(Ⅰ)，科學教育月刊，184期（84年11月），第35～44頁。
6. 陳昭地等（民84年），1995年第三十屆國際數學奧林匹亞競賽試題解答評析(Ⅱ)，科學教育月刊，185期（84年12月），第33～43頁。
7. 陳昭地等（民85年），1996年第三十七屆國際數學奧林匹亞競賽試題解答評析，科學教育月刊，192期（85年9月），第41～59頁。
8. 陳昭地等（民86年），1997年第三十八屆國際數學奧林匹亞競賽試題解答評析(Ⅰ)，科學教育月刊，205期（86年11月），第61～71頁。
9. 陳昭地等（民86年），1997年第三十八屆國際數學奧林匹亞競賽試題解答評析(Ⅱ)，科學教育月刊，205期（86年12月），第63～72頁。
10. 39th IMO Problems & Solutions, 39th International Mathematical Olympiad Jury Committee, July 10-21, 1998, Taiwan, ROC.
11. 39th IMO Golden Book, 39th International Mathematical Olympiad Jury Committee, July 10-21, 1998, Taiwan, ROC.