

筆算能力與數字常識表現之差異性的探討

楊德清
私立新埔工商專科學校

摘要：這份研究提供台灣國小六年級與國中二年級學生在筆算能力與數字常識之表現。

台灣學生的總體表現在筆算能力上是一般都比數字常識的表現還好，學生在筆算測驗的平均成績是顯著地優於要求使用數字常識觀念的平行問題之平均成績，研究結果顯示具有良好的計算技巧並不一定伴隨著數字常識觀念之發展。

簡介

國際間數學成就測驗之結果顯示台灣學生和日本學生之表現遠優於其他國家(Husen, 1967; McKnight, 1987)。美國著名學者史帝文生等 (Stevenson, 1993; Stevenson, 1986; Stigler, 1991) 所作一連串長時期的研究日本、台灣、和美國學生之數學成就測驗更加確認這些研究結果。台灣學生在數學成就測驗上有很好的表現包括筆算能力(Written Computation)。然而卻無法顯示他(她)們對基本數字觀念或數字常識之瞭解，在此種情形下，鼓勵個人從事這個研究，以探討台灣學生在筆算能力與數字常識(Number Sense)能力之差異性。

什麼是數字常識？數字常識(楊德清, 1997) 可以解釋為個人對數字和運算之一般性的瞭解。它也包括了有能力以彈性之方法對數學作判斷以及發展策略以處理數字和運算之關聯。它也反應了能夠使用數字和數量之方法當作溝通、處理、以及註解資訊之工具的能力。

由於數字常識主張學習數學是一種有意義化的活動，所以在目前歐、美、日等先進國家的數學教育改革文獻中 "數字常識" 被特別強調 (NCTM, 1989; AEC, 1991)。數字常識是一個很重要之數學名詞，它激勵了許多歐、美、日等先進國家的數學教育家，包括學校教師，課程編著者， 和研究人員之討論。這些研究已經陳列了數字常識的主要組成元素 (McIntosh, 1992; Sowder, 1992; Sowder, 1989)，陳述數字常識的特徵 (Howden, 1989; Reys, 1991)，以及從心理學之觀點作理論性的分析數字常識 (Greeno, 1991)。

經由這些討論與研究提供了數字常識的多重面貌，基本上而言，數字常識的組成元素包含了：使用不同的方式表達數字，認識數字之相對與絕對之大小，適當的選擇與使用參考值(Benchmarks)，瞭解運算對數字之相對的影響，靈活彈性地使用心算 (Mental Computation) 和估計 (Estimation)。

數字常識在美國和其他先進國家受到相當程度之重視，而且要求將其融入中小學之數學課程中(Willis, 1991)；然而目前我們的數學教育並沒有發現數字常識的重要性。台灣的

數學教育強調經由背誦公式與計算以獲得正確之答案。如此之重視計算能力或許會產生很高之成績，但是否會將如此之計算能力轉換為對數字之理解與應用，則無法得之。澳洲與美國學者 (McIntosh, 1992) 認為“學生具有很高的筆算能力或許會，或許不會發展數字常識” (p. 3)。例如一位國小六年級學生認為 $2/5 + 3/7 = 5/12$ ；或許一位國小二年級的學生會說 $40 - 36 = 16$ ，這些學生企圖利用在數學課堂中所學過之算術理論以求解，而不是對數字常識的認知。

目前對於發展數字常識之主要的關心焦點是緣由於數學教育過於強調算術演算法則而忽略對數字之瞭解。例如，當一位學生被要求去思考其計算結果是否合理時，他(她)通常使用相同的方法再計算一遍，而不是考慮題目上下文之內容及所包含數字關聯性(Wyatt, 1985)。事實上，數字常識這並不是一個新的主題，美國學者 Brownell (1935)強調有意義的學習數學之價值以及 Hibert (1984)探討演算程序之教學與觀念性的學習數學之間的挑戰已經被討論許多年了。

這些討論導引了研究方向及產生了一些基本問題，例如，何時數字常識會伴隨著演算能力而成長？數字常識與計算能力之關聯性？一些研究結果顯示重要的數字和運算之觀念會隨著時間之發展而成長 (Hibert, 1982; Resnick, 1983; Sowder, 1992)。而且這種發展是“最容易被培養成長的如果這個焦點是一致的，日以繼夜地和時常發生在每一個數學課程內” (Thornton, 1989, p. 21)。數字常識之持續性的發展被美國學者 B. J. Reys (1994) 所探討，她說“數字常識並不是一個完整之個體為學生所擁有或不擁有而是一種程序隨著經驗和知識之發展而成長(p. 114)。

經由這些研究和討論導引我思考去評估台灣國中和國小學生之數字常識能力與探究數字常識和筆算能力之關聯性。

方法

樣本：本研究之樣本取自新竹。新竹共有 27 所小學和 11 所國中。二所國小六年級學生共 115 人(三班)和二所國中共 119 人(三班)參加本次之研究。國小樣本之選擇乃取自靠近市區之學校，國中之取樣乃選自常態分班之學校。

工具：研究者設計了一份筆算測驗 (WCT) 包含了 20 題的計算題。國小六年級與國中二年級使用相同的題目。其中 19 題題目都在國小六年級的課程範圍內；只有一題 ($6\frac{2}{5} \div 15/16$) 超越當時所教授的課程範圍。

本研究亦設計了一份包括了 40 題之數字常識(NST)測驗題。其中一些題目採用美國和澳洲的數學教育家和研究人員所設計之題目(Carpenter,1980; Markovite 1994; Reys, 1991)。NST 包含了選擇題，填充題，以及選擇與簡答之組合 (參考表 1 和表 2)。

NST 前 20 題與 WCT 的題目是平行的，即相同的數字皆使用於 WCT 與前 20 題之 NST 題目中，但測驗的型態不同。Table 2 陳列了平行題目之範例，結果將於稍後討論。

程序：1994 年 10 月的第二和第三週分別執行 WCT 和 NST 的測驗。如果正確則 WCT 的每一題給予一分；若不正確則給 0 分。WCT 之每一題不給部分分數。NST 的每一題指定最高得兩分。若是題目為單純的選擇題，答案正確則給 2 分，不正確則給零分。若題目需要答案及解釋則各佔一分。若解釋不正確、不清楚、或空白則為 0 分。因此，WCT 共 20 題最高 20 分；NST 有 40 題共 80 分。

表 1 國小六年級與國中二年級之 NST 測驗題中所包含之填充題和選擇題與填充題之組合範例

題目	回答型態	百分比	
		國小六	國中二
填充題			
3/8或7/13較接近1/2? 為什麼?	7/13正確理由	10	28
	7/13不正確理由	18	19
	3/8	49	33
	相同	1	0
	沒有回答	22	20
選擇和填充之組合			
有多少不同的小數在1.42和1.43之間? 選出你的答案及回答問題.			
A. 沒有. 為什麼?	A.	36	5
B. 一個. 是那一個?	B.	10	5
C. 一些. 給與二個例子.	C.	5	3
D. 非常多. 給與三個例子.	D. 正確的例子	29	71
	不正確的例子	3	7
	沒有回答	17	9

表2 國小六年級和國中二年級之三題比算測驗(WCT)和數字常識測驗(NST)範例
題目與測驗結果

WCT題目 (正確百分比: (國小六, 國中二))

$$12/13 + 7/8 (61, 63); 72 \div 0.025 (54, 56); 5/9 + 8/15 (57, 76)$$

NST題目

不須要計算, 請找出最接近的答案: $12/13 + 7/8$

- A.1(10, 20) *B.2(25, 38) C.19(36, 14) D.21(16, 12) E.不知道(13, 16)

不須要計算, 請找出最接近的答案: $72 \div 0.025$

- A.遠小於72 (31, 14) B.小於72一點點(18, 10)

- C.大於72一點點(18, 20) *D.遠於72 (33, 56)

那一個的和是大於1?

- A. $\frac{5}{11} + \frac{3}{7}$, (10, 9) B. $\frac{7}{15} + \frac{5}{12}$, (22, 17) C. $\frac{1}{2} + \frac{4}{9}$, (16, 20) *D. $\frac{5}{9} + \frac{8}{15}$, (52, 54)

註: * 表示為正確之答案, () 內數字為答該選項學生的百分比, 前者為國小六, 後者為國中二

結果

測驗成績(完整之結果請參考 Yang, 1995)。表 3 陳列了國小六年級與國中二年級之 WCT 和 NST 正確答案之百分比, 國小六年級和國中二年級之 WCT 和 NST 之間的相關係數分別為 0.53 和 0.69。

表3 依年級陳列WCT和NST之正確百分比之平均數(與標準差)和正確百分比之範圍

	年級	WCT	NST
平均百分比和標準差	6 (n=115)	67 (13.1)	45 (26.5)
	8 (n=119)	73 (10.9)	57 (23.5)
正確百分比的範圍	6	25 to 95	20 to 74
	8	10 to 100	23 to 96

註: 百分比平均數是以正確答案的百分比為基礎。

研究者與教師和學生討論這些考題顯示 WCT 為熟悉之型態, 然而 NST 之考型為一個新的經驗而且對某些學生而言 NST 具有挑戰性。

二個年級在 WCT 和 NST 之表現上並沒有很顯著之性別差異($p>0.05$), 然而在 WCT 之

成績表現卻很明顯地高於平行之 NST 成績(強調數字常識)。

經由比較這 20 題的平行考題之成績表現，WCT 和 NST 之不同的表現層級可以很明顯地被檢視；表 2 陳列 20 題中之 3 個範例。雖然 WCT 是測驗學生使用傳統之計算方法找出一個正確之答案，平行的 NST 考題則測驗學生是否有能力應用不同之數字常識的概念以回答相同之計算問題。

表 4 報告國小六年級和國中二年級之 WCT 和 NST 之測驗結果，以及 t-test 之結果。對國二學生而言，WCT 之平均成績是很顯著地比 NST 之成績高 ($t=0.02$)。此種結果顯示學生在計算能力表現良好並不表示學生能夠應用數字常識以解決相同之非計算問題。WCT 之成績表現是一般地比 NST 之成績好，兩個年級之情況皆如此。表 2 報告一些特殊之結果。檢視六年級題目分析之結果顯示 20 個 WCT 之題目中有 16 題之平均成績皆比 NST 之成績高；而且這些題目中有 11 題 WCT 之正確百分比高於相似之 NST 之成績至少 10% 以上。例如，在 WCT 中，學生被要求去計算 534.6×0.545 之結果；然而在平行之 NST 題目中學生被告知 291357 為 534.6×0.545 之結果，但忘了小數點之位置，他們的主要工作並不是去經由計算以找出正確之答案，而是去決定小數點之適當位置。61% 國小六年級的學生可以正確地經由複雜之計算找出正確之唯一答案；然而卻有 87% 的學生在 NST 之測驗題中選擇了不正確的答案 (29.1357)。這顯示學生使用了計算規則 534.6×0.545 有四位小數，而非使用數字常識的概念，即 534.6 乘以略大於 0.5 之數目其結果應大約介於 250 和 300 之間。

檢視國中二年級之題目分析測驗相同之結果亦顯現；20 題之 WCT 題目中有 14 題之正確百分比高於 NST 之結果。其中有 9 題之百分比至少高於相對之 NST 題目有 10%。例如，超過 60% 的國中二年級學生正確地計算 $12/13 + 7/8$ 之結果，然而對於相對之 NST 題目卻只有 38% 的學生可以決定其概略值為 2；將近一半的學生回答其估計值為 19、21、或不知道。估計這兩個分數之和可以迅速地經由認知每一個分數是小於 1，所以其和是接近 2。雖然大多數的國二學生對這個複雜的計算問題，能夠使用標準的計算方法以找出正確的答案。然而有很多同學卻無法真正的掌握所被計算數值的真正意義。國小六年級學生在這個問題上的差異性更大；61% 的學生可以正確地完成複雜之計算工作，但只有 25% 左右的學可以利用數字觀念估計其值接近 2(參考表 5)。

在 $72 \div 0.025$ 這個問題中可以發現，國小六年級學生在 WCT 和平行之 NST 問題的表現上差異仍大(相差 21%)。但國中二年級之表現卻相近。這顯示國二學生之小數觀念較好。對照 $12/13 + 7/8$ 之結果顯示學生對小數運算之瞭解程度遠高於對分數之運算之瞭解。顯然分數問題比小數問題困難。

表4 國小六年級和國中二年級學生之WCT和平行之NST之正確百分比平均數(和標準差)以及t-test結果

Grade	Form	N	Mean (Std Dev)	df	t-ratio
6	NST	115	50 (22.49)	114	2.96 (p=0.02)
	WCT	115	67 (13.08)		
8	NST	119	62 (18.95)	118	3.03 (p=0.02)
	WCT	119	73 (10.89)		

結論

這份研究報告之結果是取樣於台灣的一個城市而且只有四所學校的六個班級共234學生參與，所以樣本的代表性受到限制且引用此結果應該要非常的小心。然而這份研究結果提供非常強烈的證據顯示台灣學生在比筆算能力上要優於相對的數字常識能力。更特別的是，這些學生雖然具有非常良好的計算能力並不代表他(她)們能夠應用非計算的數字常識概念去解決相同之問題，這些結果支持澳洲與美國學者 McIntosh, 等(1992)所提出之主張，即精於計算能力並不意味著數字常識之能力亦將伴隨而來，這個發現也證實了 Sowder(1988) 所提出之主張“正確的答案並不是良好的思考之唯一安全指標”和“教師必須檢視答案之外的學習且必須要求學生給與除了答案之外的過程”(p. 227)。

最後，這個研究之結果提供了一個較好之機會以進一步瞭解台灣學生之數字常識概念。

參考文獻

1. 楊德清 (民, 86). 數學教育中目前大眾所關切之一個主題 - 數字常識, 科學教育月刊, 200, 12-18。
2. AEC, Australian Education Council (1991). A national statement on mathematics for Australian schools. Melbourne: Curriculum Corporation.
3. Brownell, W. A. (1935). Psychological considerations in the learning and The teaching of arithmetic. In W. D. Reeve (Ed.). The teaching of arithmetic, Tenth yearbook of NCTM, (pp. 1-31). NY: Bureau of Pub., Teachers College, Columbia Univ..
4. Carpenter, T. P., et al. (1980). Results and implications of the Second NAEP Mathematics Assessment: Elementary school. Arithmetic Teacher, 27(8), 10-12, 44-47.
5. Greeno, J. G. (1991). Number sense as situated knowing in a conceptual domain. Journal for Research in Mathematics Education (JRME), 22, 170-218.

6. Hiebert, J. (1984). Children's mathematics learning: The struggle to link form and understanding. The Elementary School Journal, 84, 497-513.
7. Hiebert, J., Carpenter, T. P., & Moser, J. M. (1982). Cognitive development and children's solutions to verbal arithmetic problems. JRME, 13, 83-98.
8. Howden, H. (1989). Teaching number sense. Arithmetic Teacher, 36(6), 6-11.
9. Husen, T. (Ed.). (1967). International study of achievement in mathematics: A comparison of twelve countries. New York: Wiley.
10. Markovits, Z., & Sowder, J. (1994). Developing number sense: An intervention study in grade 7. JRME, 25(1), 4-29.
11. McIntosh, A., Reys, B., & Reys, R. (1992). A proposed framework for examining basic number sense. For the Learning of Mathematics, 12(3), 2-8.
12. Mcknight, C. C., et al. (1987). The underachieving curriculum: Assessing U.S. school mathematics from an international perspective. Champaign, IL: Stipes.
13. NCTM, National Council of Teachers of Mathematics. (1989). Curriculum and evaluation standards for school mathematics. Reston, VA: Author.
14. Reys, B.J.(Ed.).(1991). Developing number sense in the middle grades. Reston, VA: NCTM
15. Reys, B. J. (1994). Promoting number sense in middle grades. Teaching Mathematics in the Middle School, 1(2), 114-120.
16. Sowder, J. (1992). Estimation and number sense, in D. A. Grouws (Ed.), Handbook of research on mathematics teaching and learning (pp. 371-389). NY: Macmillan.
17. Sowder, J., & Schappelle, B. P. (Eds.). (1989). Establishing foundations for research on number sense and related topics: Report of a conference. San Diego, CA: San Diego State Univ., Center for Research in Mathematics and Science Education.
18. Stevenson, H. W., Chen, C., & Lee, S. Y. (1993). Mathematical achievement of Chinese, Japanese, and American children: Ten years later. Science, 259, 53-58.
19. Stevenson, H. W., Lee, S. Y., & Stigler, J. W. (1986). *ibid*, 231, 693-699.
20. Stigler, J. W., Lee, S. Y., & Stevenson, H. W. (1991). Mathematical knowledge of Japanese, Chinese, and American elementary school children. Reston, VA: NCTM.
21. Thornton, C. A., & Tucker, S. C. (1989). Lesson planning: The key to developing Number sense. Arithmetic Teacher, 36(6), 18-21.
22. Wyatt, J. W. (1985). A case study survey of computational estimation processes and notions of

reasonableness among ninth grade students. Unpublished doctoral dissertation, University of Missouri Columbia.

23. Yang, D. C. (1995). Number sense performance and strategies possessed by sixth and eighth grade students in Taiwan. Unpublished, *ibid.*

Exploring the Difference Between Computational Performance and Number Sense

ABSTRACT

This research provides information on the written computation and number sense of Taiwanese elementary school students in grade 6 and junior high school students in grade 2.

Taiwanese students' overall performance on written computation was typically higher than their performance on the number sense tests. Student performance on test items asking written computation was significantly better than on the parallel questions relying on number sense. The results indicate that high skill in written computation is not necessarily accompanied by number sense.

科學教育月刊全年 10 期 (7、8 月休刊)，自九月 (第 212 期) 起收代印費及郵資全年 500 元。

帳號：1 2 2 8 5 2 4 1

戶名：國立臺灣師範大學
科學教育中心

