

一則幾何問題

謝銘峰
省立彰化高中

前言

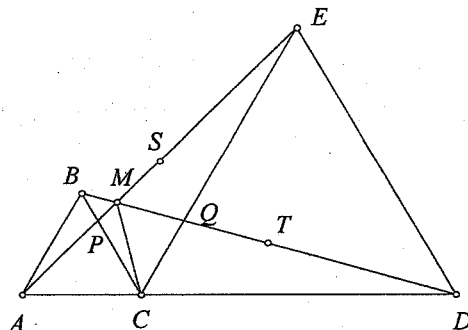
在「中學數學」雜誌上看到一個幾何問題，覺得這一個問題很有趣，介紹給大家欣賞欣賞。

問題

將線段 \overline{AD} 分成 \overline{AC} 、 \overline{CD} 兩段，分別以 \overline{AC} 、 \overline{CD} 為邊長在 \overline{AD} 的同側做兩個正三角形，如圖一所示。

連接 \overline{AE} 、 \overline{BD} 交於 M 點，

- (1) 試求 $\angle AMD = ?$
- (2) 證明 \overline{MC} 平分 $\angle AMD = ?$
- (3) 證明 $\overline{CQ} = \overline{CP}$ 。
- (4) 若 S 、 T 分別為 \overline{AE} 、 \overline{BD} 之中點，試求 $\triangle CST$ 是何三角形？



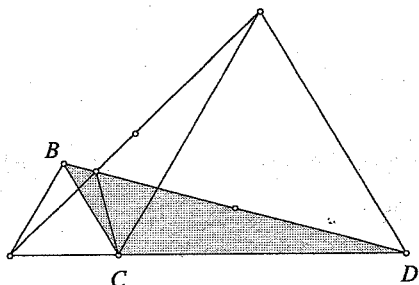
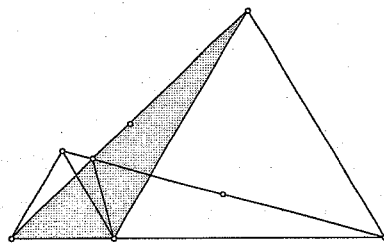
這一個問題之有趣，在於其解題的方法

甚多，讀者大人不妨先行試試。

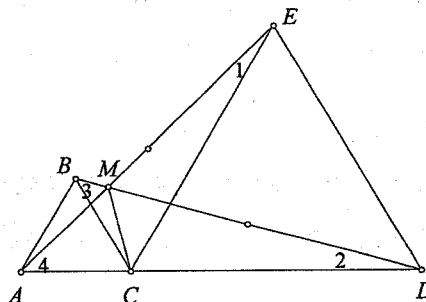
解題

以下筆者提供一個方法：純然「轉轉看即可」。

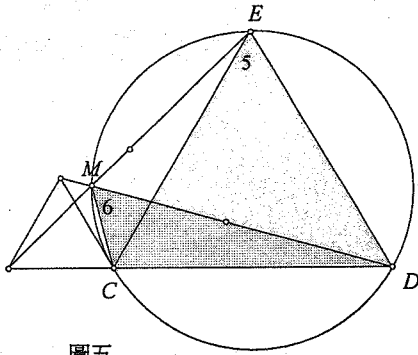
首先看 $\triangle ACE$ ，將 $\triangle ACE$ 以 C 點為中心順時針旋轉 60° (由圖二到圖三)，就變成了 $\triangle BCD$ ，因此，我們發現： $\angle 1 = \angle 2$ ，則 $MCDE$ 四點共圓，同理 $\angle 3 = \angle 4$ ， $MCAB$ 四點也共圓。



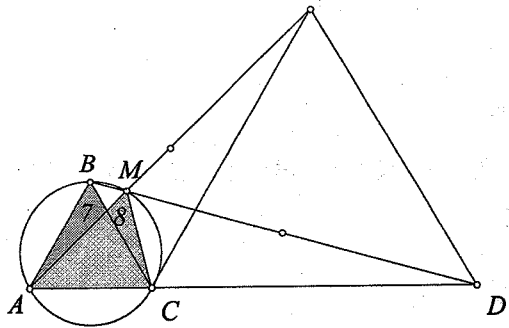
圖三



仔細看 $MCDE$ 四點所決定的圓(圖五)，顯然 $\angle 6 = \angle 5 = 60^\circ$ 、同理 $\angle 8 = \angle 7 = 60^\circ$ (圖六)，因為 $\angle AMD = \angle 6 + \angle 8$ ，於是 $\angle AMD = 60^\circ + 60^\circ = 120^\circ$ ，且顯然 \overline{MC} 平分 $\angle AMD$ 。

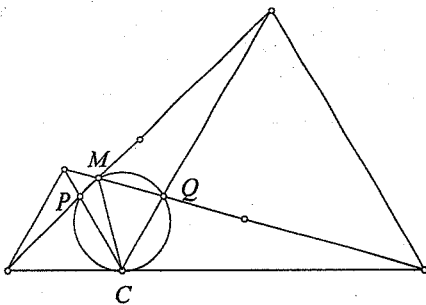


圖五

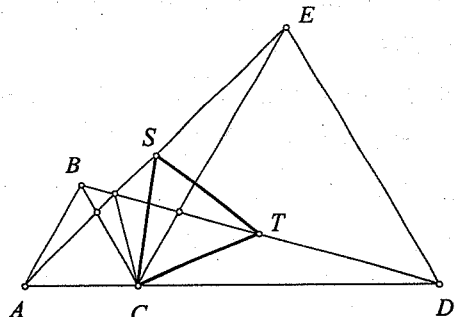


圖六

再觀察 $MPCQ$ 四點，因為 $\angle PMQ + \angle PCQ = 120^\circ + 60^\circ = 180^\circ$ ，於是 $MPCQ$ 四點也是共圓，根據等弧對等弦，我們很快就得到： $\overline{CP} = \overline{CQ}$ 。



圖七



圖八

最後，我們看看 $\triangle CST$ 是何三角形？再回到圖二、三，根據旋轉，顯然發現 $\overline{CS} = \overline{CT}$ ，則 $\angle CST = \angle CTS$ ，又因為旋轉 60° ， $\angle SCT = 60^\circ$ ，因此， $\angle CST = \angle CTS = \angle SCT = 60^\circ$ ， $\triangle CST$ 是一個正三角形。(圖八)

其實， S 、 T 不一定得是中點，只要是 \overline{AE} 、 \overline{BD} 上相同的等分點，就會使得 $\triangle CST$ 是一個正三角形。

結語

在高中雖然沒有幾何課，但是讓同學玩玩這樣的幾何題很有趣。筆者在課堂上空出一點時間讓同學動動手，發現同學很有興趣，玩的不亦樂乎。

上面的問題還有延展性，讀者大人可以再行發揮，而筆者提供的解題方法和「中學數學」中的方法並不相同，也許讀者另有不同方法。

另外，使用軟體 Geometer Sketchped 來玩這一個問題，不僅精確，你還可以拉動圖形，得到更多樂趣，讀者不妨試試看！

參考資料

1. 卜詩楨、胡慧，1998，由一題課本習題衍生出來的一類題，中學數學，2月，50頁。

(上接 57 頁)

參考資料

1. 第三十屆國際化學奧林匹亞，Editor: Mandy Cousin "Catalyzer" The magazing the 30th IchO, Issue No 1~13, 5~14 July 1998, Melbourne.
2. Dr. Charanai Panichajakul, "Catalyzer" Journal for the 31st International Chemistry Olympiad.
- 3.大會資料(1) Olympiad Program (1-114); (2) Examinations Manual (pp1-19, 及 sec a~j); (3) Transport Manual (pp1~85); (4) Guide Training Manual (pp~60); (5) Song Book (pp1~25).
- 4.W. Davids, A Sirota, H. Zechmann, "A Brief Review on the History and Content of the International Chemistry Olympiad", International Information center, Bratislava, Slovakia, 1998.
- 5.世界各國選拔賽試題，共十三國匯編成冊。