

國際數學奧林匹亞競賽(1998)

試題解答評析(一)

陳昭地* 朱亮儒* 傅承德**

*國立臺灣師範大學 數學系

**中央研究院 統計研究所

國際數學奧林匹亞競賽(IMO)試題源自主辦國以外之各參賽國於接受邀請繳交試題期限內提交0~6道題(陳昭地等,民80~民86),再由主辦國試題委員會研究選出約30題預選題,分屬代數、數論、幾何、與組合數學等不同領域,經由各參賽國的領隊組成之主試委員會修訂票選出最後的6道競試題,再依主題內容及難易層次分配成二份試題,分別在連續的兩天中舉行競試,每天3道題,考試時間都是4.5小時。今年的國際數學奧林匹亞競賽活動已經是第39屆,由中華民國主辦。試題委員會由兩位外國專家及多位國內學者組成,先從各國提供的一百多道試題中研究出適當的28題,含幾何、代數、數論和組合數學等不同難度的試題及參考解答。再由76個參賽國家的領隊組成的主試委員會經過三天的會議研究票選出2道幾何題,2道數論題,1道函數方程和1道組合不等式題。本文的目的在於針對這次我國代表團所翻譯成中文版的六道IMO試題提供參考解答,評析解題重點,且就我國六位學生代表答題概況及本屆76個參賽國419位學生代表的得分加以比較,統計與評析,以供國內相關學者專家、數學教師等輔導數學資優生之研究、應用與參考。

一、第39屆國際數學奧林匹亞競賽試題

第一天

Taipei, Taiwan - July 15, 1998

每題7分;考試時間 $4\frac{1}{2}$ 小時

Chinese version

-
- 問題1: 設凸四邊形ABCD的兩對角線AC與BD互相垂直,且兩對邊AB與CD不平行。已知點P為線段AB與DC的垂直平分線之交點,且在四邊形ABCD的內部。證明:A, B, C, D四點共圓的充分必要條件為 $\triangle ABP$ 與 $\triangle CDP$ 的面積相等。
- 問題2: 在某一次競賽中,共有a個參賽者及b個裁判,其中 $b \geq 3$ 且為奇數。設每個裁判對每一位參賽者的判決方式只有“通過”或“不通過”。已知任意兩個裁判至多可對k個參賽者有相同的判決。證明:

$$\frac{k}{a} \geq \frac{b-1}{2b}$$

問題 3：對任一正整數 n ，令 $d(n)$ 表示 n 的正因數（包含 1 及 n 本身）的個數。試確定所有可能的正整數 k ，使得有一個正整數 n 滿足

$$\frac{d(n^2)}{d(n)} = k.$$

第 二 天

Taipei, Taiwan - July 16, 1998

每題 7 分；考試時間 $4\frac{1}{2}$ 小時

Chinese version

問題 4：試確定所有的正整數序對 (a, b) ，使得 $a^2b + a + b$ 可以被 $ab^2 + b + 7$ 整除。

問題 5：設 I 為 $\triangle ABC$ 的內心， K ， L ， M 分別為 $\triangle ABC$ 的內切圓在邊 BC ， CA 及 AB 上的切點。已知通過點 B 且與 MK 平行的直線分別與直線 LM 及 LK 交於點 R 及 S 。證明： $\angle RIS$ 是一銳角。

問題 6：設 N 表示所有的正整數所組成的集合，考慮所有由 N 到 N 且滿足下列條件的函數 f ：對任意的正整數 s 及 t ，都有

$$f(t^2f(s)) = s(f(t))^2.$$

試求所有 $f(1988)$ 的可能值中之最小值。

二、第 39 屆國際數學奧林匹亞競賽成績統計

根據主辦單位確認公布之 1998 年第 39 屆國際數學奧林匹亞競賽 76 個參賽國共計 419 位競賽代表成績，並參考前幾屆的評析方式（陳昭地等，民 82 ~ 民 86），列表如下，以供試題解答及分析之參考。

表 1 第 39 屆 IMO 全部參與競試學生之成績統計表
總人數 419 人

項目 \ 題號	Q1	Q2	Q3	Q4	Q5	Q6	總計
平均得分	3.21	2.74	1.76	3.46	2.93	0.68	14.78
得分率	0.46	0.39	0.25	0.49	0.42	0.10	
標準差	2.58	3.21	1.78	3.01	3.12	1.79	
變異係數	0.80	1.17	1.01	0.87	1.06	2.64	
難度指數	0.47	0.43	0.28	0.50	0.43	0.17	
鑑別指數	0.67	0.82	0.38	0.82	0.80	0.33	

註：高分組 111 位，低分組 114 位

表 2 金牌、銀牌、銅牌及未得獎分組成績統計表

表 2(a) 金牌獎 (人數 37 人, 成績 ≥ 31)

項目 \ 題號	Q1	Q2	Q3	Q4	Q5	Q6	總計
平均得分	6.51	6.62	4.19	6.65	6.27	4.38	34.62
得分率	0.93	0.95	0.60	0.95	0.90	0.63	
標準差	1.07	1.50	2.32	0.92	1.90	2.80	
變異係數	0.16	0.23	0.55	0.14	0.30	0.64	

表 2(b) 銀牌獎 (人數 66 人, $31 > 成績 \geq 24$)

項目 \ 題號	Q1	Q2	Q3	Q4	Q5	Q6	總計
平均得分	5.08	5.71	2.83	6.26	5.82	1.33	27.03
得分率	0.73	0.82	0.40	0.89	0.83	0.19	
標準差	2.08	2.55	2.01	1.66	2.23	2.21	
變異係數	0.41	0.45	0.71	0.27	0.38	1.66	

表 2(c) 銅牌獎 (人數 102 人, $24 > 成績 \geq 14$)

項目 \ 題號	Q1	Q2	Q3	Q4	Q5	Q6	總計
平均得分	4.12	3.15	2.00	4.73	4.25	0.22	18.47
得分率	0.59	0.45	0.29	0.68	0.61	0.03	
標準差	2.33	3.21	1.55	2.60	2.87	0.85	
變異係數	0.56	1.02	0.78	0.55	0.68	3.95	

表 2(d) 未得獎者 (人數 214 人, 成績 < 14)

項目 \ 題號	Q1	Q2	Q3	Q4	Q5	Q6	總計
平均得分	1.62	0.95	0.90	1.45	0.83	0.06	5.81
得分率	0.23	0.14	0.13	0.21	0.12	0.01	
標準差	1.74	2.08	0.89	2.12	1.80	0.32	
變異係數	1.08	2.20	0.99	1.47	2.17	5.64	

表 3 1998 年第 39 屆國際數學奧林匹亞競試中華民國學生代表得分及成績統計表

姓名	Q1	Q2	Q3	Q4	Q5	Q6	總分	獎牌
廖健溢	7	7	7	7	7	6	41	金
賴信弘	7	7	2	7	6	7	36	金
陳明揚	7	4	2	4	7	1	25	銀
劉育廷	5	2	0	4	7	1	19	銅
王世豪	7	0	7	7	7	0	28	銀
游志強	7	7	3	7	7	4	35	金
總分	40	27	21	36	41	19	184	3金2銀1銅

表 4 1998 年第 39 屆國際數學奧林匹亞競試各題得分成績人數統計表

分數 \ 題次	Q1	Q2	Q3	Q4	Q5	Q60
0	89	213	91	125	184	340
1	16	19	117	47	16	29
2	115	26	152	14	38	6
3	41	6	20	38	22	10
4	27	5	3	20	9	7
5	23	4	1	10	5	1
6	5	5	5	23	6	2
7	103	141	30	142	139	24
總人數	419	419	419	419	419	419

(試題詳解及評析請見下期)